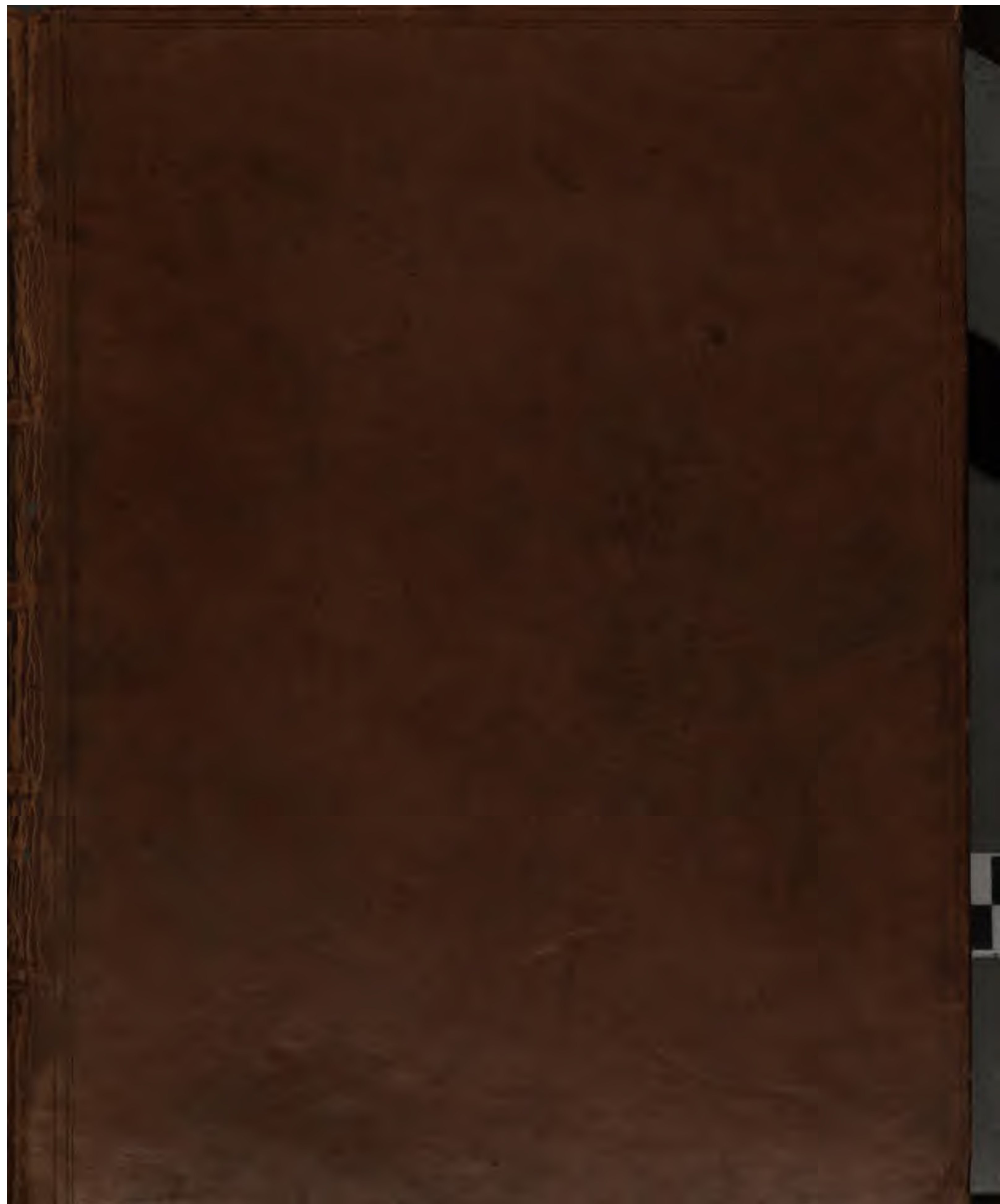






HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCLXXXIV.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année,

Tirés des Regiſtres de cette Académie.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXXVII.

TABLE
POUR L'HISTOIRE.

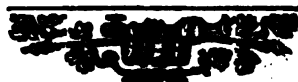
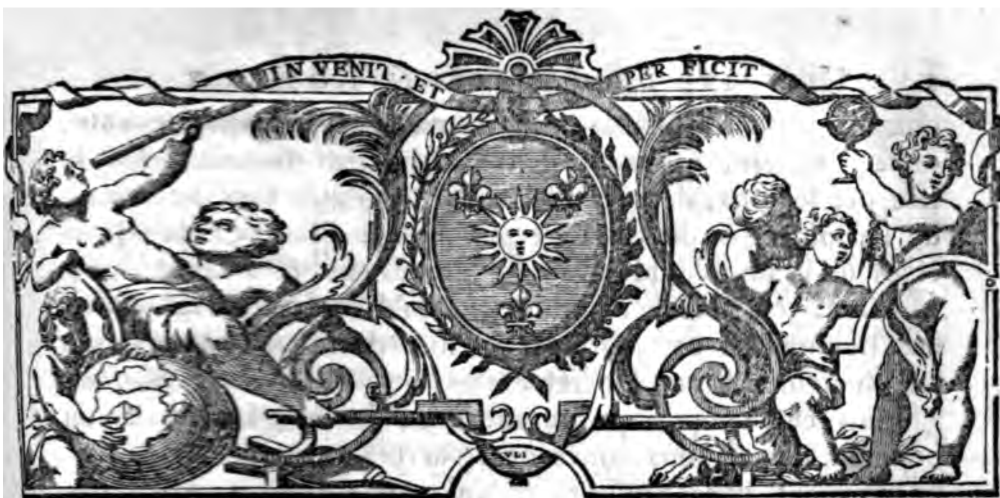


TABLE.

TABLE.

TABLE.





HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Année M. DCCLXXXIV.

SON ALTESSE ROYALE LE PRINCE HENRI DE PRUSSE, qui voyageoit en France, ſous le nom du *comte d'Oëls*, ayant fait à l'Académie l'honneur d'aſſiſter à ſa ſéance du 4 ſeptembre 1784, le Secrétaire a lû le diſcours ſuivant:

MESSIEURS,

Ce jour glorieux pour nous, ſemble retracer à nos yeux les temps à jamais célèbres où les héros d'Athènes ne dédaignoient pas de venir au retour de leurs victoires;

entendre dans les écoles la voix d'Anaxagore & de Socrate, où ces Césars, ſi grands dans le ſénat, ſi terribles à la tête des légions, dépoſant des lauriers cueillis ſur les bords de l'Euphrate & du Rhin, ſe plaiſoient à diſcuter les principes de la philoſophie avec Apollonius, avec Pline, avec Maxime, ou à rechercher le peu qu'il étoit alors donné aux hommes de connoître ſur les loix de la nature & ſur les phénomènes de l'Univers.

Mais ces temps, qui furent ceux de la gloire & du bonheur des nations gouvernées par ces grands hommes, ne forment dans l'hiſtoire qu'un petit nombre de jours ſereins, qui ont brillé de loin en loin au milieu d'une longue ſuite de ſiècles condamnés à l'erreur & à la misère. Périclès vivoit encore quand les Athéniens chaſsèrent de leur ville Anaxagore, convaincu d'avoir oſé dire, le premier, que le ſoleil étoit un globe de feu, & qu'une Intelligence avoit préſidé à la formation du monde. Bientôt après, dociles à la voix d'un vil farceur, ils condamnèrent Socrate à la mort. Chez les Romains à peine un empereur vertueux a-t-il fermé les yeux, qu'un indigne ſucceſſeur s'empreſſant d'étouffer les dernières lueurs de la raiſon, livre l'empire à la tyrannie de l'ignorance & de la ſuperſtition.

C'eſt qu'alors les lumières étoient le partage de quelques hommes privilégiés, choiſis dans un ſeul peuple. Aujourd'hui, elles ont pénétré dans toutes les claſſes de la ſociété, elles ſe ſont répandues chez toutes les nations. Chaque peuple expoſé à la cenſure de tous les autres, & contenu par l'opinion commune de l'Europe, ne peut plus ni ſe livrer à ces excès honteux, ni éteindre un flambeau que ſes voiſins auroient bientôt ralumé. Nous ne reverrons plus ces jours où Gerbert & Roger Bacon étoient regardés comme des magiciens, parce qu'ils avoient entrevu quelques demi-vérités; où Galilée couvert de gloire & d'années, condamné par des moines à une priſon perpétuelle, étoit contraint d'abjurer les vérités qu'il avoit

découvertes ; où l'indigence obligeoit Képler à faire des horoſcopes; où Deſcartes achetant par un exil volontaire le droit d'inſtruire les hommes, trouvoit encore des Voëtius, même dans le pays de la liberté; où le ſpectacle des maux cauſés par l'intolérance, forçoit Huyghens & Roëmer à fuir de la patrie qu'ils avoient adoptée.

Aujourd'hui les lettres, les ſciences & la philoſophie, long-temps ſéparées, quelquefois ennemies, ont acquis en ſe réuniſſant un empire ſur l'opinion des hommes, que rien ne peut plus leur enlever. Loin de croire, comme autrefois, que les préjugés peuvent être utiles, ſinon aux peuples, du moins à ceux qui les gouvernent, on ſait maintenant qu'il n'eſt aucun préjugé qui ne puiſſe devenir une ſource de malheurs pour les citoyens, une cauſe de révolutions ou d'affoibliſſement pour les états; on ſait que ſi les hommes éclairés ſont les ſeuls qui ſoient dignes de donner des loix à leurs ſemblables, les hommes inſtruits ſont auſſi les ſeuls qui ſachent obéir aux loix.

On commence à ſavoir que le plus dangereux & peut-être le ſeul ennemi du genre humain, c'eſt l'erreur; qu'elle produit également & ces paſſions qui troublent l'ordre du monde, & la foibleſſe qui rend ces paſſions dangereuſes; que c'eſt elle qui inſpire à ceux qui commandent des loix contraires à leurs intérêts comme à l'intérêt général, tandis qu'en ſéduiſant les eſprits de la multitude, elle oppoſe à tout changement utile une barrière trop ſouvent inſurmontable.

Les ſciences ont acquis une ſi grande étendue, leurs applications ſe ſont tellement multipliées, la philoſophie a ſu connoître ſi bien la véritable méthode de chercher la vérité, que tous ceux qui s'occupent du bonheur des hommes, de la grandeur & de la proſpérité des empires, ou trouvent à chaque pas l'occaſion de faire un uſage utile des vérités qu'on doit à la philoſophie & aux ſciences; ou ſont arrêtés au milieu de leurs travaux par des queſtions qu'elles ſeules peuvent réſoudre. L'art de la guerre, cet art

où le ſuccès paroît dépendre de l'activité & du coup-d'œil plutôt que des connoiſſances acquiſes, où les héros ſemblent devoir tout à eux ſeuls & rien à ce qu'on a pu leur enſeigner; cet art éprouve lui-même, dans preſque toutes ſes parties, le beſoin de ces ſciences paiſibles, fondées ſur l'expérience ou ſur le calcul, & ſes progrès qui ont ſuivi ceux des connoiſſances humaines en ont fait enfin de nos jours une véritable ſcience. Auſſi les plus grands maîtres de cet art, ſe ſont-ils montrés dans ce ſiècle les plus dignes protecteurs de la philoſophie & des lettres, & ſi cette protection n'avoit pas été une ſuite néceſſaire de l'étendue de leur eſprit & de l'élévation de leur caractère, l'intérêt de leur gloire leur eût inſpiré la même conduite; car les ſiècles éclairés peuvent ſeuls aſſigner la place qu'ils méritent, & ſentir la différence du conquérant qui ne doit ſes victoires qu'à la terreur qu'inſpire ſa férocité, & du héros dont le génie maîtriſe les événemens & fait encore diminuer les maux de la guerre.

Mais ſi ceux qui ont intérêt de craindre le progrès des lumières, n'oſent plus ſuppoſer qu'elles ſont dangereuſes, ils ont eſſayé de rendre du moins odieux les hommes qui cherchent à les répandre. Déſeſpérant d'être déſormais aſſez forts avec le ſecours de l'ignorance, ils ont voulu ſoulever les paſſions en leur faveur; & pour y réuſſir, ils ont imaginé d'accuſer les philoſophes, les ſavans, les gens de lettres, de méconnoître les diſtinctions établies dans la ſociété & de reſerver uniquement leurs hommages aux talens & aux vertus. Ils eſpéroient avoir trouvé dans cette accuſation un ſecret ſûr de ſuſciter aux lumières utiles, des ennemis puiſſans, implacables & ſur-tout très-nombreux; car la vanité perſuade aiſément à des particuliers très-obſcurs, qu'ils ſont auſſi dans une de ces claſſes qui auroient trop à perdre ſi on vouloit n'eſtimer dans chaque individu que ſon mérite réel. Mais en ſuppoſant même cette inculpation auſſi fondée qu'elle l'eſt peu, du moins elle ne rendroit pas ceux contre qui elle eſt dirigée bien coupables, aux yeux des hommes dont

ils doivent ambitionner le plus les bontés & l'eſtime. Suppoſons, en effet, qu'ils oublient qu'un héros eſt ſorti du ſang de Charlemagne ou de Witikind, & que le rang auguſte qu'il occupe ne leur en impoſe point; la juſtice qu'ils rendront à ſes qualités perſonnelles n'en devient-elle pas plus digne de lui? En ſauront-ils moins admirer la réunion ſi rare d'une activité qui ne laiſſe, ni perdre un inſtant, ni échapper une occaſion, & d'une ſageſſe conſommée, qui dans la conduite d'une guerre entière n'offre pas même l'apparence de la plus légère faute, aux yeux des juges les plus éclairés & les plus ſévères? Verront-ils avec moins d'étonnement le même génie qui combine avec force pendant la guerre les plans les plus vaſtes, veiller pendant la paix ſur les plus petits détails qui ſervent à former les inſtrumens de ſes victoires? Seront-ils moins touchés de cette humanité toujours agiſſante, toujours occupée d'adoucir ces malheurs, ſuite trop inévitable de la guerre, & qui dans toute une campagne au milieu des mouvemens les plus importans & dans les poſitions les plus critiques, n'oublie pas un ſeul inſtant qu'il exiſte dans une ville conquiſe, un citoyen que l'amitié a confié à ſes ſoins. N'applaudiront-ils pas à un prince ami de la vérité, prompt à ſe rendre l'appui de ceux qui ſouffrent pour elle; regardant les hommes célèbres dans les lettres & dans les ſciences comme les objets les plus dignes de ſa curioſité; chériſſant la mémoire de ceux qui ne ſont plus, & cherchant avec empreſſement ce qui reſte d'eux dans les lieux honorés par leur génie? Cette ſimplicité de mœurs, ſi eſtimable, même dans un citoyen obſcur, ne devient-elle pas la preuve la plus certaine d'un grand caractère, lorſqu'elle ſe joint à tant de titres & ſur-tout à tant de gloire? Enfin le ſtoïciſme le plus exagéré, à quelque degré qu'il puiſſe porter l'oubli des diſtinctions ſociales, pourra-t-il s'empêcher de reſpecter, dans un héros, le frère & l'ami d'un grand homme?

Mais je ſens, Meſſieurs, combien mon foible organe eſt

au-dessous de vos sentimens, & combien je dois vous faire regretter la perte d'un savant illustre, en qui l'Académie auroit trouvé aujourd'hui un digne interprète. Comblé des bontés du Prince qui nous fait l'honneur d'assister à cette séance, honoré de sa familiarité, il lui eût fait entendre les accens d'une voix qui lui étoit connue : sans doute il a manqué au bonheur de M. d'Alembert de n'avoir pas assez vécu pour recevoir, dans cette Académie, le frère de son premier bienfaiteur, & nous osons croire qu'il manque aussi quelque chose à la satisfaction du Prince, lorsque ses yeux cherchent en vain le philosophe qu'il avoit jugé digne de son amitié, & dont il ne reste plus parmi nous que le souvenir de ses vertus & les monumens de son génie.

M. LAVOISIER a lû ensuite un Mémoire sur la combustion de l'esprit-de-vin, dans lequel il prouve qu'une livre de cette liqueur produit, en brûlant, dix-neuf onces d'eau.

M. TENON, un Mémoire sur l'œuf humain.

M. L'ABBÉ ROCHON, un Mémoire sur la manière de mesurer les hauteurs solsticiales, en employant une lunette de cristal d'Islande.

M. COULOMB, un Mémoire sur la manière d'employer la torsion des fils, à la mesure des forces très-petites.

M. BAILLY a terminé la séance par la lecture du Mémoire suivant.

EXPOSÉ des Expériences qui ont été faites pour l'examen du Magnétisme animal.

Lû par M. BAILLY, en son nom & au nom de M.rs FRANKLIN, LE ROY, DE BORY & LAVOISIER.

MESSIEURS,

VOUS savez que des commissaires ont été choisis par le Roi dans la Faculté de Médecine & dans cette Académie

pour examiner le Magnétiſme animal, & pour donner leur avis ſur ſon exiſtence & ſur ſon utilité. Nous en avons rendu compte au Roi & devant le public. Sa Majeſté a été ſatisfaite de notre travail, le public & l'Europe vont le juger.

Mais les Académiciens doivent à l'Académie & à leurs confrères un récit détaillé de leur conduite. Cet écrit eſt deſtiné à mettre ſous vos yeux les vues qui ont dirigé nos recherches, & les réſultats que nos travaux ont produits.

Quand je dis nous, Meſſieurs, j'entends la commiſſion entière; rien n'a été diſtingué, le travail appartient à tous: également guidés par les intérêts de la vérité, nous avons été toujours unis, toujours unanimes. Le compte qui va vous être rendu ici eſt un hommage particulier de vos confrères, mais il ne renferme rien qui ne ſoit le réſultat du travail commun des membres des deux compagnies.

Il y a déjà plus de ſix ans que le Magnétiſme animal a été annoncé à l'Europe, ſur-tout en France & dans cette capitale; mais ce n'eſt que depuis deux ans environ qu'il a intéreſſé particulièrement un aſſez grand nombre de citoyens, & qu'il eſt devenu l'objet de l'entretien public. Jamais une queſtion plus extraordinaire n'avoit partagé les eſprits dans une nation éclairée. On propoſoit un moyen ſûr & puiſſant d'agir ſur les corps animés, un remède nouveau, un agent univerſel pour guérir & prévenir les maladies. Cet art étoit un myſtère; les phyſiciens en ignoroient les procédés, & ils n'entendoient parler que de ſes prodiges. On citoit peu de cures réelles, mais beaucoup de perſonnes ſe diſoient ſoulagées, & le remède plaiſoit aſſez pour ſoutenir l'eſpérance des malades. Depuis quelque temps le ſecret a été communiqué. Alors on a vu des perſonnes inſtruites, éclairées, diſtinguées même par leurs talens, adopter la théorie & la pratique nouvelle qu'on leur enſeignoit; on a vu un nombre de médecins & de chirurgiens admis à l'école du Magnétiſme, en devenir les partiſans, en défendre la théorie, en ſuivre la pratique. Ces témoignages rendus au Magné-

tiſme devoient donner à penſer aux meilleurs eſprits, & faire ſuſpendre le jugement des ſavans. C'eſt dans ces circonſtances que les commiſſaires ont été nommés par le Roi; l'examen qu'il a ordonné eſt un fruit de la ſageſſe de ſon adminiſtration. C'étoit un ſcandale pour l'Europe de voir un peuple éclairé par toutes les ſciences & par tous les arts, un peuple chez qui la philoſophie a fait les plus grands progrès, oublier la leçon de Deſcartes qui en eſt le reſtaurateur, & renfermer dans ſon ſein deux partis oppoſés, qui uniſſoient leurs vues & leurs penſées ſur le même objet, mais qui ſe diviſoient & ſe combattoient; l'un en annonçant le Magnétiſme comme une découverte utile & ſublime, l'autre en le regardant comme une illuſion à la fois dangereuſe & ridicule. La déciſion étoit importante & indiſpenſable; il falloit éclairer ceux qui doutoient, il falloit établir une baſe ſur laquelle puſſent venir ſe repoſer ou l'incrédulité ou la confiance. On ne doit pas être indifférent ſur le règne mal fondé des fauſſes opinions : les ſciences qui s'accroiſſent par les vérités, gagnent encore à la ſuppreſſion d'une erreur; une erreur eſt toujours un mauvais levain qui fermente & qui corrompt à la longue la maſſe où elle eſt introduite. Mais lorſque cette erreur ſort de l'empire des ſciences pour ſe répandre dans la multitude, pour partager & agiter les eſprits, lorſqu'elle préſente un moyen trompeur de guérir à des malades qu'elle empêche de chercher d'autres ſecours, lorſque ſur-tout elle influe à la fois ſur le moral & le phyſique, un bon gouvernement eſt intéreſſé à la détruire. C'eſt un bel emploi de l'autorité que celui de diſtribuer la lumière ! Les commiſſaires ſe ſont empreſſés d'entrer dans les vues de l'Adminiſtration & de répondre à l'honneur de ſon choix.

Tranſportés au traitement public du Magnétiſme, ils ont d'abord été frappés d'une oppoſition très-remarquable entre la nature des effets produits & l'inſuffiſance apparente des moyens employés. D'une part, ce ſont des convulſions violentes, longues & multipliées; de l'autre, de ſimples

attouchemens,

attouchemens, des gestes & des signes : & cependant le traitement public fait reconnoître une grande puissance mise en action par ces moyens, tout foibles qu'ils sont. Un pareil spectacle semble nous transporter au temps & au règne de la féerie : cet empire exercé sur un nombre d'individus, l'homme qui en dispose, la baguette qui lui sert d'instrument, tout ressemble en effet aux enchantemens de nos fables ; ce sont leurs récits mis en action. Mais si ce spectacle étonne, il ne doit pas subjuguer. S'il a pu surprendre la foi d'un nombre de spectateurs conduits par une curiosité plus ou moins attentive, s'il a séduit sur-tout les malades toujours prêts à se tromper eux-mêmes, il n'a pu produire cet effet sur des hommes choisis pour un examen sérieux. Leur premier devoir étoit d'être en garde contre l'illusion ; ils se sont mutuellement surveillés, ils ont observé en silence ; & restés de sang-froid au milieu de l'enthousiasme, ils ont pu écouter leur raison & chercher la lumière.

Nous avons d'abord demandé par quels ressorts étoient produits tant d'effets surprenans, & quelles étoient les raisons qui les faisoient attribuer à un fluide inconnu & nouveau, à un fluide qui appartient à l'homme & qui agit sur l'homme. Plus cette découverte étoit grande & extraordinaire, plus on devoit être difficile sur le choix des preuves. Ensuite, procédant en physiciens, nous avons cherché à reconnoître la présence du fluide ; mais ce fluide échappe à tous les sens. On nous a déclaré que son action sur les corps animés étoit la seule preuve que l'on pût administrer de son existence. Vous avez vu, Messieurs, dans notre rapport, les raisons solides, qui parmi les effets prétendus de cette action, nous ont fait rejeter absolument la cure des maladies. La nature agit en même-temps que le remède ; on ne sait si le soulagement appartient au remède ou à la nature : la nature guérit quelquefois sans remède ; comment se convaincre de l'existence d'un remède invisible, par des guérisons que la nature peut opérer sans lui ? Nous avons donc été forcés de nous borner à observer l'action physique

du fluide opérant sur l'économie animale, des changemens momentanés; mais alors, Messieurs, nous sommes entrés dans un dédale de difficultés. Si les premières causes de la nature sont simples, les derniers résultats sont le produit d'une vaste complication. L'homme ne fait pas un mouvement qui ne puisse être dû à une infinité de causes; être moral & physique, ses affections, ses maux, ses mouvemens dépendent autant de sa pensée que de l'irritabilité de ses organes. Les expériences que nous avons faites sur nous-mêmes, nous ont fait reconnoître que lorsqu'on détourne son attention, il n'y a plus aucun effet. Les épreuves faites sur les malades nous ont appris que l'enfance, qui n'est pas susceptible de prévention, n'éprouve rien, que l'aliénation d'esprit s'oppose à l'action du Magnétisme, même dans un état habituel de convulsions & de mobilité de nerfs où cette action devroit être le plus sensible. Dans un nombre de malades, si les uns ressentent des effets légers & équivoques, les autres ne sentent rien, & nous avons dû en être surpris. Le Magnétisme n'est-il pas annoncé comme un fluide universel, comme le principe de la vie, & le grand ressort de la nature? Qu'est-ce qu'un agent qui n'agit pas toujours dans des circonstances semblables? L'absence de son action dans certains cas, n'indique-t-elle pas que dans les autres l'action qu'on lui attribue appartient à d'autres causes? Il a manqué son effet quand nous l'avons employé pour porter de la chaleur aux pieds; il a manqué son effet quand nous l'avons interrogé comme capable d'indiquer les maux. On a essayé différentes méthodes de magnétiser, en observant, en négligeant la distinction des pôles; elles ont eu les mêmes effets. Les pôles sont donc une chimère qui n'a d'autre objet que d'assimiler le nouveau Magnétisme au véritable Magnétisme qui est un des phénomènes de la nature. C'est ainsi, qu'en avançant dans notre examen, nous voyions disparoître l'une après l'autre les propriétés attribuées à ce prétendu fluide, & que l'édifice entier posé sur une base idéale s'écrouloit devant nous.

Forcés de renoncer aux preuves physiques, nous avons été obligés de chercher les causes des effets réels dans les circonstances morales. Nous avons, dans la suite de nos opérations, cessé d'être physiciens pour n'être plus que philosophes; & nous avons soumis à l'examen les affections de l'esprit & les idées des individus exposés à l'action du Magnétisme. Alors, en opérant sur des sujets qui avoient les yeux bandés, nous avons vu d'une manière évidente, cette action naître des idées que nous excitions, & les effets suivre la même marche que nos questions. En ne magnétisant pas, les effets étoient les mêmes, & répondoient de même à nos questions.

A ces effets variés & indépendans du Magnétisme, nous avons dû reconnoître l'influence de l'imagination; mais dans l'examen moral où nous conduisoit la nature de la question, nous avons suivi, autant qu'il a été possible, la marche certaine & méthodique des sciences: observant en philosophes, nous avons encore emprunté les procédés de la physique. Nous avons opéré, comme on fait en chimie, où, après avoir décomposé les substances, découvert leurs principes, on s'assure de l'exactitude de l'analyse, en recomposant les mêmes substances à l'aide de ces principes réunis. Nous avons dit: les effets qu'on attribue au Magnétisme, & à un fluide que rien ne manifeste, n'ont lieu que lorsque l'imagination est avertie & peut être frappée; l'imagination semble donc en être le principe. Il faut voir si on reproduira ces effets par le pouvoir de l'imagination seule; nous l'avons tenté, & nous avons pleinement réussi. Sans toucher & sans employer aucun signe, les sujets qui ont cru être magnétisés ont senti de la douleur, de la chaleur & une chaleur très-grande. Sur des sujets doués de nerfs plus mobiles, nous avons produit des convulsions & ce qu'on appelle des *crises*. Nous avons vu l'imagination assez exaltée, devenue assez puissante pour faire perdre en un instant la parole. Nous avons en même-temps prouvé la nullité du Magnétisme, en le mettant en

oppoſition avec l'imagination. Le Magnétiſme ſeul, employé pendant trente minutes, n'a rien produit; & auſſi-tôt l'imagination miſe en action a produit ſur la même perſonne, avec les mêmes moyens, dans des circonſtances abſolument ſemblables, une convulſion très-forte & très-bien caractériſée. Enfin, pour compléter la démonſtration, pour achever le tableau des effets de l'imagination, également capable d'agiter & de calmer, nous avons fait ceſſer la convulſion par le même charme qui l'avoit produite, par le pouvoir de l'imagination.

Si nous n'avons pas fait d'expériences ſur les animaux que l'on regarde comme privés de l'imagination, c'eſt que les expériences auroient été plus difficiles & plus délicates, ſans être plus concluantes. D'abord, la cure des maladies des animaux ne prouve pas davantage que la cure des maladies des hommes; & quand nous nous bornerons à agir ſur les animaux momentanément, comment connoîtrons-nous ce qu'ils éprouvent? Ne pouvant les interroger, leurs mouvemens ne peuvent être qu'équivoques. D'ailleurs, une grande raiſon pour rejeter cette eſpèce de preuves, eſt qu'on annonce un fluide univerſel, un fluide agiſſant ſur l'homme, & propre à guérir ſes maux. Il ſeroit ſingulier qu'on en vantât les bons effets ſur l'eſpèce humaine, & qu'on ne pût les rendre ſenſibles que ſur l'eſpèce animale: c'eſt donc ſur l'homme que nous avons dû éprouver le Magnétiſme, & nos expériences ne nous ont fait découvrir que le pouvoir de l'imagination. Nous avons procédé par des preuves négatives, & cette marche étoit déterminée par la nature des choſes. Une opinion eſt attaquée & défendue par des moyens contraires: un agent réel doit être démontré par des preuves poſitives, tandis qu'un agent chimérique ne peut être exclu que par le manque d'effets & par la démonſtration de ſa nullité.

La ſuite d'expériences que nous avons faites nous a donc permis de conclure & d'établir que rien ne prouve l'exiſtence du fluide magnétique animal. La ſaine phyſique ne

permet pas de recourir à un fluide inconnu & insensible, pour expliquer des effets qui peuvent tous être produits par l'imagination, ou seule, ou combinée avec l'attouchement & l'imitation.

Telles sont les causes des effets attribués au Magnétisme, tel est le résultat de notre travail; mais les phénomènes observés permettent encore quelques résultats que nous allons proposer. Ces résultats concernent l'imitation & l'imagination, deux de nos plus étonnantes facultés : ce sont des faits pour une science encore neuve, celle de l'influence du moral sur le physique; & nous demandons qu'il nous soit permis d'entrer à cet égard dans quelques détails préliminaires & purement philosophiques.

L'homme moral, comme l'homme physique, n'existe & ne devient tel qu'il est que par ces deux facultés : il se forme, il se perfectionne par l'imitation ; il agit, il devient puissant par l'imagination. L'imitation est donc le premier moyen de sa perfectibilité; elle le modifie depuis la naissance jusqu'à la mort. Sans l'imitation, les progrès d'un individu seroient perdus pour tous les autres : c'est par elle que dans la société polie & habituelle les caractères s'effacent, & que tous les individus ont la même physionomie; c'est par elle que les enfans apprennent nos usages, nos conventions, se plient à nos habitudes, s'instruisent de la langue. La prononciation adoucie par un long usage, est un effet de la même cause. Cette imitation agit également sur les esprits; elle n'introduit pas les vérités nouvelles, mais elle conserve les idées reçues; elle forme & constitue l'esprit national; & comme le plus souvent elle fait croire sans examen, c'est sur son pouvoir irrésistible que sont fondés les préjugés qui ont une durée si longue & une résistance si puissante.

Avec cette faculté, tout resteroit au même terme, tout seroit communiqué; mais le niveau des connoissances & des institutions ne s'éleveroit jamais. L'imagination est la faculté progressive; c'est par elle que les hommes ont par-

couru les différens états de la société perfectionnée : faculté éminemment active, auteur des biens & des maux, tout est devant elle, l'avenir comme le présent, les mondes de l'univers comme le point où nous sommes. Elle agrandit tout ce qu'elle touche, elle va sans cesse exagérant, & cette exagération fait sa force. C'est par cette force qu'elle déploie les ressources morales & qu'elle multiplie les forces physiques : à sa voix la nature obéit & se développe toute entière. Aussi quand l'imagination parle à la multitude, la multitude ne connoît plus de dangers ni d'obstacles; un seul homme commande, & les autres ne sont que des instrumens. Les nations sont ce que veulent les souverains, les armées ce que sont leurs généraux; & c'est une vérité connue depuis Alexandre jusqu'à FRÉDÉRIC & SON ILLUSTRE FRÈRE.

L'imitation, telle que nous venons de la peindre, Messieurs, semble avoir une marche lente & graduée, elle ne s'établit que par des leçons répétées; mais si dans la société elle a des progrès insensibles, dans le traitement du Magnétisme elle se manifeste par des phénomènes frappans. Les crises y sont d'autant plus multipliées qu'elles sont plus violentes; elles commencent toutes à-peu-près dans le même-temps, il semble que ce soit une étincelle qui allume un incendie. Cette facilité de communication est très-remarquable. Nous savions que l'homme, machinal dans un grand nombre de ses mouvemens, se plie à la longue à répéter ce qu'il voit & ce qu'il entend; mais les convulsions du Magnétisme nous montrent que le même effet a lieu instantanément, en grand, & de manière qu'un nombre d'individus convenablement disposés, sont des instrumens montés à l'unisson, & dont un seul fait mouvoir tous les autres.

Quant à l'imagination, on connoît les dérangemens qu'une impression vive & subite a souvent occasionnés dans la machine de l'homme. L'imagination renouvelle ou suspend les fonctions animales; elle ranime par l'espérance,

ou elle glace par la terreur. Dans une nuit elle fait blanchir les cheveux, dans un instant elle rend ou l'usage des jambes ou la parole; elle détruit ou elle développe le germe des maux, elle donne même la mort. Mais ces effets surprenans appartiennent à des révolutions inopinées; c'est le concours des circonstances qui les amène, & le hasard qui semble les produire; ils ne paroissent point dépendre de la puissance & de la volonté de l'homme. Ce que nous avons appris, ou du moins ce qui nous a été confirmé d'une manière démonstrative & évidente, par l'examen des procédés du Magnétisme, c'est que l'homme peut agir sur l'homme, à tous momens & presque à sa volonté, en frappant son imagination; c'est que les gestes & les signes les plus simples peuvent avoir les plus puissans effets; c'est que l'action que l'homme a sur l'imagination peut être réduite en art, & conduite par une méthode, sur des sujets qui ont la foi. On parle du Magnétisme d'intention, sans doute l'intention peut suffire, pourvu qu'elle soit réciproque; elle établit entre deux individus une relation & une dépendance nécessaires. L'intention que je dirige, c'est mon imagination qui commande; l'intention qui me répond, c'est l'imagination qui s'exalte & qui obéit. La recherche d'un agent qui n'existe pas, sert donc à faire connoître une puissance réelle de l'homme. L'homme a le pouvoir d'agir sur son semblable, d'ébranler le système de ses nerfs, & de lui imprimer des convulsions; mais cette action ne peut être regardée comme physique: nous ne voyons pas qu'elle dépende d'un fluide communiqué; elle est entièrement morale, c'est celle de l'imagination sur l'imagination. Action presque toujours dangereuse, que l'on peut observer en philosophe, & qu'il n'est bon de connoître que pour en prévenir les effets.

Le Magnétisme n'aura pas été tout-à-fait inutile à la philosophie qui le condamne; c'est un fait de plus à consigner dans l'histoire des erreurs de l'esprit humain, & une grande expérience sur le pouvoir de l'imagination.





OUVRAGES

PRÉSENTÉS À L'ACADÉMIE.

PRIX.

L'ACADÉMIE avoit proposé, pour sujet d'un Prix qui devoit être donné en 1782, la question suivante:

1.° Déterminer par des caractères constans, faciles à saisir même par ceux qui n'ont pas fait une étude particulière de la botanique, les différences qui existent entre les divers cotonniers d'Asie, d'Afrique, & d'Amérique.

2.° Indiquer l'état naturel du coton dans sa coque après la maturité, son adhérence à la graine, la manière dont ses brins enveloppent les graines, afin d'en déduire le meilleur procédé pour les en séparer dans leur plus grande longueur.

3.° Établir, d'après des épreuves suffisantes, les rapports des degrés de finesse, de blancheur, de longueur & de ténacité qui sont propres aux brins de chaque espèce de cotonnier, ainsi que le rapport de ces qualités avec la perfection des filatures.

Ce Prix a été remis en 1784, & décerné à une pièce ayant pour devise, *Deus bone*, dont l'auteur est M. Quatremère.

LES

LES Mémoires approuvés par l'Académie, destinés pour le volume des Savans-Étrangers, sont au nombre de vingt-cinq.

Essai sur la construction des tables de logarithmes: par M. Callet.

Mémoire sur plusieurs pièces de canon, forgées en Espagne : par M. de Norbek, depuis correspondant de l'Académie.

Sur la fonte des minéraux de plomb.

Sur la fonte des scories provenant de celle des minéraux de plomb, où l'on détaille la manière de retirer l'argent & l'or des cendres des Monnoies & des Orfévres.

Observations sur le traitement des minérais de fer à la fonte.

Ces trois Mémoires sont de M. Duhamel, depuis membre de l'Académie.

Sur les difficultés que présente la préparation des alkalis fixes caustiques secs, & sur les propriétés peu connues de ces sels bien purs.

Sur la nécessité d'employer l'alkali volatil, en état de gaz, dans les expériences délicates de la chimie; & sur quelques propriétés nouvelles du gaz alkalin.

Sur la décoloration du bleu de Prusse, par la chaux, la magnésie, &c.

Observation sur la dissolution lente du régule d'antimoine, par l'acide marin.

Observation sur un précipité rose mercuriel, produit par le lait, la lymphe, &c.

Remarques sur la différence du foie d'arsenic & du sel neutre arsenical, & sur la cause de cette différence.

Mémoire ſur les propriétés du ſel neutre, réſultant de la combinaiſon de l'acide crayeux avec le fer.

Deſcription d'un feld-ſpath criſtalliſé, que l'on trouve mêlé avec le criſtal de roche & le mica dans les environs d'Alençon.

Obſervations ſur une ſingulière criſtalliſation du ſel neutre arſenical; avec quelques remarques ſur la nature de ce ſel.

Mémoire ſur les phénomènes que préſente l'alkali fixe végétal cauſtique, trituré à froid avec le ſoufre & quelques préparations antimoniales.

Recherches chimiques ſur le kermès minéral.

Ces onze Mémoires ſont de M. de Fourcroy, depuis membre de l'Academie.

Réſultat d'une expérience faite ſur la réſiſtance d'un maſſif de bois de chêne imbibé d'eau, contre les progrès de l'inflammation excitée par les matières incendiaires, &c : par M. Darçon.

Obſervations aſtronomiques faites à Bagdad : par M. de Beauchamp, vicaire général de Babylone, depuis correſpondant de l'Académie.

Mémoire ſur la manière d'échauffer les maiſons des pays-froids, &c : par M. le Maréchal-Duc de Croy.

Sur la montagne des Chalanches près d'Allemont en Dauphiné : par M. Schreiber, directeur des Mines de Monſieur.

Sur les ſemences des champignons : par M. de Beauvois, correſpondant de l'Académie.

Sur les nombres : par M. l'Abbé Genti, depuis correſpondant de l'Académie.

Obſervation ſur les plantes de mer : par M. Vaſtel.

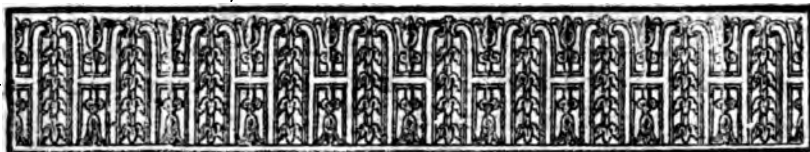
Mémoires & obſervations ſur quelques procédés peu connus, mais utilement employés à des conſtructions maritimes d'exécution difficile : par M. de Fourcroy, maréchal-de-camp, depuis membre de l'Académie.

Sur le tartre contenu dans le verjus & dans le mouſt, &c : par M. le Marquis de Bullion.

MACHINE approuvée par l'Académie.

INSTRUMENT propre à tracer toutes ſortes de lignes parallèles : par M. Milon, conſeiller au Châtelet.





ÉLOGE

DE M. MACQUER.

PIERRE-JOSEPH MACQUER, docteur-régent de la Faculté de médecine de Paris, professeur de chimie au Jardin du Roi, pensionnaire de l'Académie des Sciences, membre de la Société de médecine, de l'Académie de médecine de Madrid, & des Académies de Stockolm, de Turin & de Philadelphie, naquit à Paris le 9 Octobre 1718, de Joseph Macquer & de Marie-Anne Caillet. Il tiroit son origine d'une famille noble d'Écosse, qui avoit sacrifié ses biens & sa patrie à son attachement pour la religion romaine & pour la maison de ses anciens Rois.

Les parens de M. Macquer exigeoient qu'il prît un état, & il choisit celui de médecin, qui contrarioit moins qu'aucun autre son goût naissant pour les sciences physiques. La chimie fut le principal objet de ses travaux, & il fut reçu à l'Académie en 1745, à l'âge de vingt-sept ans. Depuis cette époque, des recherches sur la chimie, des ouvrages élémentaires sur cette science, & des travaux sur les arts qui en dépendent, ont rempli toute l'étendue de sa vie.

Les phénomènes singuliers que présentoit l'arsenic avoient attiré l'attention des chimistes dans le temps où presque tous avoient conservé au moins un penchant secret pour les idées chimériques des adeptes. On connoissoit la propriété qu'a cette substance de décomposer le nitre & d'en séparer l'acide, qui, dans cette opération, acquiert une belle couleur bleue; mais personne encore n'avoit songé à examiner

acides propres à certaines ſubſtances,
la diſtillation avec l'acide nitreux,
iſtent tout formés, ſoit qu'ils doivent
s parties conſtituantes à la décompo-
l'acide qu'on a employé.
a, peu de temps après, la première
u de Pruſſe. Cette matière colorante
qu'une combinaiſon du fer avec une
alis enlèvent aux matières charbon-
ve en montrant que l'alkali digéré ſur
charge de cette ſubſtance, & ne laiſſe
de fer, tandis que ce même alkali ainſi
une diſſolution de fer, précipite de
Pruſſe. Les chimiſtes ont regardé cette
du charbon par l'alkali fixe, comme étant
& l'alkali qui en eſt chargé a même
alkali phlogiſtiqué. Mais les progrès de la
nrichiſſant d'un grand nombre de faits ;
même-temps bien plus pauvre en théories
oit l'être, ſi pourtant avoir perdu des théories
nes, ce n'eſt pas avoir beaucoup gagné. La
dénominations & même des expoſitions que
des phénomènes portoient, ſans preſque qu'on
quelque teinte de ces ſyſtèmes, & il a fallu
nouvelle langue, que peut-être dans quelques
faudra changer encore.

fusibilité & la ductilité de ce métal, celles de ses propriétés, dont les chimistes s'étoient jusqu'alors le moins occupés. Ils parvinrent à la fondre au miroir ardent d'une manière imparfaite. Quelques morceaux arrondis par la fusion, parurent avoir une véritable ductilité; & ce fait important consigné dans nos Mémoires, a soutenu l'espérance des chimistes qui, depuis, ont trouvé des moyens de forger & de travailler cette substance singulière, également intéressante, & par les faits nouveaux qu'elle présente dans la chimie des métaux, & par l'utilité dont elle deviendra un jour dans les arts.

Un voile épais en couvre encore l'origine & l'histoire; & malgré l'abondance de ce métal, le préjugé en refuse à ceux qui veulent l'étudier & dont heureusement ces obstacles n'ont fait qu'exciter le zèle. On avoit cru d'abord que la platine qui peut se mêler avec l'or, s'y unissoit si intimement, qu'il étoit impossible de reconnoître le mélange & de la séparer d'avec l'or. Sans doute cet inconvénient auroit encore été un motif bien foible pour condamner à une éternelle inutilité une substance que la nature a prodiguée, & qu'à bien des égards il seroit difficile de remplacer; mais cet inconvénient n'existe même plus depuis quarante ans. Cependant l'opinion de ceux qui possèdent la platine est restée la même; exemple moins rare qu'on ne croit, & de la lenteur avec laquelle les vérités s'établissent, & de cette fatalité singulière qui fait regarder l'opinion la moins fondée, comme suffisante pour donner le droit de ravir aux hommes quelque portion de leur liberté, tandis qu'on exige que l'inutilité d'une prohibition soit rigoureusement prouvée, & souvent le soit depuis long-temps, pour se croire autorisé à la faire cesser. Il semble que chez tous les peuples & dans tous les temps, on ait regardé l'esclavage comme le véritable état de l'homme, & la liberté comme un état forcé, & pour ainsi dire contre nature.

Vers 1750, M. Macquer fut chargé, par la Cour, d'une commission particulière. Il existoit alors en Bretagne, un

fomme, le Comte de la Garaie, qui, entraîné par une véritable paſſion à l'exercice de la bienfaiſance, s'étoit dévoué depuis quarante ans, au ſervice de l'humanité ſouffrante. Il avoit bâti un hôpital à côté d'un laboratoire de chimie; il ſoignoit, il traitoit lui-même les malades auxquels il adminiſtroit les remèdes préparés dans ſon laboratoire, remèdes qu'il avoit ou que du moins il croyoit avoir inventés. Son premier ouvrage étoit fondé ſur l'idée chimérique d'extraire des mixtes, par le moyen de l'eau, toutes leurs parties actives; & on devoit à cet ouvrage quelques préparations utiles, nouvelles ou peu connues.

D'autres idées du même genre avoient frappé depuis le Comte de la Garaie; & il vouloit vendre au Gouvernement ſes nouveaux remèdes, comme il lui avoit vendu ſes premiers ſecrets, c'eſt-à-dire, toujours au profit de ſon hôpital. Il eſt ſingulier, peut-être, qu'un homme ſi bienfaiſant fît un ſecret de ſes découvertes, & qu'il ne s'empreſsât point de les conſacrer gratuitement à l'utilité commune; mais puiſque ceux qui ſollicitent des grâces oublient ſi facilement que c'eſt aux dépens du ſang du peuple qu'ils cherchent à ſatisfaire leur avarice ou leur ambition, pourroit-on ne point pardonner un pareil oubli à celui qui ne demande que pour les malheureux?

M. Macquer fut chargé d'examiner ces remèdes. Le projet du Comte de la Garaie étoit alors d'extraire les parties ſalubres des minéraux par une longue macération avec des ſels neutres. Il avoit entr'autres préparé une teinture mercurielle par des procédés qui duroient pluſieurs mois; mais cette teinture n'étoit qu'une diſſolution de ſublimé corroſif dans l'eſprit-de-vin. Telle eſt en général l'hiſtoire de ces ſecrets ſi vantés, tantôt chimériques, tantôt connus de tout le monde, excepté de ceux qui les achettent.

M. Macquer ſe trouva placé à une époque où la chimie commençoit à ſe délivrer des rêves des alchimiſtes dont les ouvrages des reſtaurateurs de cette ſcience ſont encore infectés; mais la clarté, la méthode étoient un mérite

inconnu dans les livres de qui en traitoient, & sur-tout en France, un reste de cartésianisme ajoutoit à l'obscurité de la science, en la surchargeant de prétendues explications mécaniques.

M. Macquer est le premier qui ait donné des élémens de chimie où l'on trouve la même clarté, la même méthode, qui règnoient déjà dans les autres branches de la physique. Avant lui, on regardoit la chimie comme une science isolée, embarrassée, obscure, remplie d'opérations secrètes, de recettes énigmatiques presque comme une occupation dangereuse où l'on risquoit de compromettre sa santé, sa fortune, & même sa raison : elle parut dans les ouvrages de M. Macquer, une science simple, fondée sur les faits, procédant par des opérations dont une sage méthode prescrivoit tous les détails, utile à tous les besoinsde la vie humaine & liée au système général de nos connoissances. Ainsi, ses élémens contribuèrent à répandre le goût de la chimie, en montrant combien il étoit facile de l'apprendre ; tandis qu'un autre chimiste son contemporain, & autrefois son maître, en inspiroit l'enthousiasme par une marche plus hardie & des idées plus vastes & plus imposantes.

M. Macquer fit, pendant plusieurs années, des cours, conjointement avec M. Baumé. Il avoit préféré, dans ces cours, l'ordre qui lui avoit paru exiger de ceux qui les suivoient moins de connoissances préliminaires en chimie ; il décrivoit les expériences, exposoit les faits avec clarté, avec précision, y ajoutoit les explications les plus plausibles, les plus généralement adoptées, mais avec le ton d'un homme qui doute encore & qui veut seulement payer un léger tribut au besoin si naturel aux hommes, & sur-tout aux jeunes gens, de croire quelque chose. L'incertitude où une suite de simples faits auroit laissé ses disciples, leur eût paru trop pénible ; il les consoloit donc par quelques explications, mais il ne les trompoit point sur le prix qu'ils devoient y attacher. Il avoit l'art de choisir les parties de la chimie où les faits étoient le plus certains,
où

où les objets avoient été le plus discutés & le mieux éclaircis; enfin son but sembloit être principalement d'inspirer quelque confiance dans les vérités chimiques aux esprits d'une justesse sévère, & qui se piquent d'être difficiles en preuves. Il se concilioit ainsi l'estime & la confiance de ses disciples plus qu'il n'attiroit leur admiration; ils n'étoient point frappés de la fécondité de ses vues, mais ils sentoient qu'ils avoient en lui un guide sûr, qui ne les égareroit jamais. C'est avec un plaisir mêlé de douleur que je m'arrête sur ces détails. Je dois à M. Macquer mes premières connoissances en chimie; & en parlant ici de ses talens comme démonstrateur, c'est un devoir de reconnoissance dont je m'acquitte envers sa mémoire.

M. Macquer jugea qu'un dictionnaire de chimie étoit nécessaire pour assurer les heureux effets que ses livres élémentaires & ses cours avoient déjà produits. Cette manière de traiter les sciences appartient presque à notre siècle, & c'est un des services qu'il aura rendus à l'esprit humain. Aucune espèce de livres n'est plus propre à montrer à chaque époque le point où les sciences sont parvenues, à en faire connoître tous les détails, à en perfectionner la langue. Le public attendoit cet ouvrage de M. Macquer; son esprit naturellement juste & méthodique, son impartialité bien connue, son aversion pour les systèmes, la sagesse qu'il savoit mettre dans ses vues & dans ses jugemens, l'indiquoient comme le chimiste auquel on devoit desirer que cet important travail fût confié. L'exécution & le succès répondirent à cette attente. Il avoit pris la méthode la plus sûre pour faire un bon dictionnaire : celle de composer une espèce de cours de chimie complet & méthodique, dont les grands articles de son dictionnaire sont en quelque sorte les principaux chapitres, & peuvent être lûs suivant leur ordre naturel qu'il a indiqué dans une table particulière.

M. Macquer donna la seconde édition de son dictionnaire dans un moment où de nouvelles difficultés auroient pu

refroidir son zèle. C'étoit précisément celui où la connoissance d'un grand nombre de substances aériformes, jusqu'alors négligées dans les analyses, avoit produit dans toutes les parties de la chimie une révolution, & presque un bouleversement général; où toutes les théories devenoient incertaines, & toutes les expériences incomplètes. M. Macquer sut éviter à la fois les deux inconvéniens qui étoient le plus à craindre, celui de se refuser à des idées nouvelles qui l'obligeoient de revenir sur des opinions qu'il avoit long-temps adoptées, & celui de trop sacrifier à ces nouvelles idées, & de négliger les autres parties de la science. Il exposa les faits nouvellement découverts, en discuta les circonstances & les résultats, & garda un juste milieu entre un attachement servile aux opinions anciennes & l'enthousiasme des nouveautés.

Il est impossible d'être chimiste sans avoir la curiosité d'étudier les travaux des arts qui ne sont que des opérations chimiques faites en grand, d'après les règles fondées sur une expérience en général grossière & peu précise, mais qui présentent beaucoup de phénomènes instructifs, & où, parmi un grand nombre de procédés inutiles & bizarres, il s'en trouve d'autres qu'on seroit d'abord tenté de condamner, & dont un examen plus approfondi fait connoître les raisons & l'utilité.

M. Hellot, qui étoit commissaire du Conseil pour les teintures, & chimiste de la manufacture de porcelaine, desira d'avoir M. Macquer pour adjoint; & ce desir fait d'autant plus d'honneur à M. Hellot, qu'il savoit très-bien que la réputation de M. Macquer, en chimie, surpassoit la sienne, & qu'il est rare de se choisir pour successeurs ou pour adjoints, des hommes par lesquels on puisse craindre d'être éclipsé; mais il ne l'est pas moins de mériter, comme M. Macquer, qu'une conduite si noble ne puisse être regardée comme imprudente.

L'art de la teinture dépend de la chimie, & d'une chimie très-délicate & très-compliquée. M. Macquer voulut

d'abord traiter cette partie de la ſcience comme il avoit traité toutes les autres, c'eſt-à-dire, en donner les élémens, les principes, en diſſiper les ténèbres. Il regardoit ce préliminaire comme auſſi eſſentiel aux véritables progrès des arts qu'à ceux des ſciences, & une grande partie de ſon art de la teinture en ſoie, publié dans la collection de l'Académie, eſt conſacrée à l'expoſition de ces principes élémentaires. Il y joignit dans nos Mémoires, des procédés pour employer le bleu de Pruſſe comme teinture, & pour donner à la ſoie teinte avec la cochenille, la même nuance & le même brillant que cette ſubſtance colorante fait prendre à la laine; ces procédés ſont le fruit d'obſervations chimiques très-fines, & ce qui eſt rare dans les opérations des arts, on y eſt guidé par une méthode ſûre.

M. Macquer n'a rien publié ſur l'art de la porcelaine, & on doit le regretter. Cette poterie, utile à la Chine & au Japon, pays dans leſquels elle eſt d'un uſage commun, n'eſt encore, parmi nous, qu'un objet de luxe, & par conſéquent une bagatelle inutile. L'art de la porcelaine étoit le ſecret de quelques manufactures au commencement de ce ſiècle; mais elles ſe ſont répandues depuis chez preſque toutes les nations; elles ſe ſont multipliées, & pour nous procurer la jouiſſance d'un objet qui, ſans être d'une néceſſité réelle, pourroit devenir d'une véritable utilité, il ne faudroit aujourd'hui que rendre la liberté à ce genre d'induſtrie, & lever le voile, bien tranſparent à la vérité, ſous lequel quelques parties de cet art ſont encore cachées. Heureuſement l'on commence à convenir preſque généralement que les ſecrets dans les arts ne peuvent que produire le double effet, d'en reſtreindre l'uſage & d'en arrêter les progrès.

L'eſprit qu'on remarque dans les ouvrages de M. Macquer, eſt le même qui dirigea ſa conduite. Tout en lui étoit d'accord: cette juſteſſe d'eſprit, cette modération dans ſes jugemens, cette réſerve dans ſes aſſertions, étoient la ſource de la modeſtie, de la tranquillité, de la douceur qu'il

montra conſtamment dans toutes les circonſtances de ſa vie. Il étoit ſenſible aux critiques; mais il ne connoiſſoit ni l'aigreur, ni l'emportement de l'amour-propre bleſſé. S'il ne faiſoit pas valoir avec enthouſiaſme ce qui lui paroiſſoit utile & bon, du moins il approuvoit toujours avec plaiſir. C'étoit malgré lui, & lorſqu'il y étoit contraint par la juſtice, qu'il ſe déterminoit à porter un jugement ſévère. Il voyoit le bien, il l'aimoit, mais quelquefois cédoit trop facilement aux obſtacles, croyoit trop promptement à l'impoſſibilité du ſuccès, & ſe conſoloit trop tôt par l'idée qu'il eſt impoſſible d'empêcher le bien s'il eſt une fois connu, & qu'il ne faut que ſavoir attendre.

Quoiqu'il eût peu pratiqué la médecine, la Société Royale le choiſit pour un de ſes premiers membres; & ſon amour pour le bien public lui fit un devoir de s'intéreſſer à un établiſſement ſi utile. Les réclamations qui s'élevèrent contre cette inſtitution, n'ébranlèrent pas M. Macquer; il y reconnut les mêmes raiſonnemens & les mêmes principes que dans le ſiècle dernier on avoit oppoſés à l'établiſſement des compagnies ſavantes. Son zèle éclairé pour les Sciences & pour l'Académie, étoit encore un des motifs de ſon attachement à cette ſociété nouvelle; il ſavoit que c'eſt ſur-tout des progrès de la théorie que doivent s'occuper les compagnies qui, par leur conſtitution, embraſſent toute l'étendue des ſciences. C'eſt dans ces Académies ſeules que les recherches qui ne ſont point d'une application immédiate, qui ne frappent point la curioſité publique, peuvent être appréciées, ou eſpérer de trouver une récompenſe. Si, ſéduites par des vues d'une utilité prochaine, les compagnies ſavantes ſe livroient excluſivement à des recherches pratiques, la marche des ſciences en ſeroit retardée aux dépens de cette même utilité à laquelle on les auroit imprudemment ſacrifiées.

L'inſtitution d'un corps chargé ſpécialement de l'application des ſciences phyſiques à l'utilité commune, devoit donc paroître à un eſprit auſſi juſte que celui de M. Macquer,

non-ſeulement un moyen de perfectionner la médecine, mais un ſervice rendu aux ſciences, qui, s'enrichiſſant tous les jours de vérités & d'applications nouvelles, deviennent d'une immenſe étendue, & demandent à être partagées pour être mieux cultivées.

M. Macquer avoit paſſé une grande partie de ſa vie avec un frère qui aimoit les Lettres, & à qui l'on doit quelques abrégés chronologiques eſtimés; après la mort de ce frère, le ſeul chagrin violent qu'il ait jamais éprouvé, il ne vécut plus qu'avec ſa femme & deux enfans, dont l'éducation étoit ſon unique délaſſement & ſon occupation la plus chérie.

Il aimoit peu le monde, parce qu'il préféroit à tout la tranquillité & l'indépendance; cependant il étoit doux, facile même dans la ſociété, & on n'eût jamais deviné qu'il ne s'y livrât qu'à regret : l'eſpèce de contrainte qu'il y éprouvoit n'étoit pas l'embarras que donne l'humeur, c'étoit le beſoin de ces ſentimens doux auxquels il eſt ſi touchant de pouvoir s'abandonner en liberté, & qui rendent, pour ceux qui les connoiſſent, tout autre plaiſir inſipide. Il n'étoit point malheureux dans le monde, mais il y portoit toujours le ſouvenir involontaire du bonheur qui l'attendoit au ſein de ſa famille. C'eſt le contraire de ce qu'éprouve le commun des hommes, qui ſouvent ſe trouvent mal où ils ſont, ſans pouvoir dire où ils ſeroient mieux.

La ſérénité qui paroiſſoit dans toute la perſonne de M. Macquer, ſembloit indiquer une ſanté conſtante; mais cette ſérénité n'annonçoit que le calme de ſon ame. Il ſouffroit depuis long-temps, mais le cachoit aux perſonnes qu'il aimoit le plus, parce qu'il regardoit ſes maux comme incurables; il les ſentit redoubler peu-à-peu dans ſes dernières années, en obſerva le progrès, & conjectura très-juſte le moment où la mort devoit les finir. Peu de temps auparavant, il en avertit ſa femme, lui parla de ſa fin prochaine avec ſenſibilité, mais ſans trouble, la remercia du bonheur qu'elle avoit répandu ſur ſa vie, & inſiſta beaucoup

ſur le deſir qu'il avoit d'être ouvert après ſa mort, afin que la cauſe en fût connue. Quelques jours après, ſes maux augmentèrent, & il y ſuccomba le 15 Février 1784, ſans avoir perdu un inſtant ni ſa préſence d'eſprit, ni ſa ſenſibilité, ni ſa douceur, ni ſa tranquillité ordinaire. L'oſſification de l'aorte & des concrétions pierreuſes formées dans les cavités du cœur, avoient été la cauſe de cet état de ſouffrance auquel il étoit condamné depuis pluſieurs années, & de l'impoſſibilité d'exiſter dont il avoit ſenti ſi long-temps les approches lentes & douloureuſes.





ÉLOGE

DE M. BERGMAN.

TORBERN BERGMAN, professeur de chimie à Upsal, membre de l'Académie des Sciences de la même ville, de celles de Londres, de Berlin, de Stockolm, des Curieux de la nature, de Gottingue, de Turin, associé-étranger de la Société de médecine de Paris & de l'Académie des Sciences, naquit le 20 Mars 1735, à Catharineberg, dans la province de Vestro-Gothie, de Barthold Bergman, receveur des finances, & de Sara Hœgg.

Chez presque toutes les nations de l'Europe, l'état de financier est une profession lucrative & paisible; il n'en étoit pas de même alors en Suède. Souvent les receveurs des deniers publics, créatures d'un parti qui avoit été dominant dans une Diète, étoient exposés à la persécution de la Diète suivante, où le parti contraire avoit l'avantage. On croyoit trouver dans la recherche de leur fortune, des ressources pour le trésor public, & dans les poursuites exercées contre eux, un moyen presque sûr de capter la bienveillance du peuple. Il en résultoit que leurs profits devoient être d'autant plus grands, d'autant plus onéreux à la nation, qu'ils étoient plus incertains; mais en même-temps ceux qui, comme M. Bergman, refusoient d'embrasser cette profession, annonçoient au moins autant de sagesse que de désintéressement.

Lorsqu'il eut fini ses premières études, son père lui permit de suivre la carrière des universités, & de se rendre à Upsal. Un de ses parens fut chargé de veiller sur sa conduite. Bien loin d'avoir besoin de l'exhorter au travail, le surveillant se vit bientôt obligé de modérer son ardeur,

& ſur-tout de l'empêcher de cultiver les ſciences phyſiques. L'univerſité d'Upſal embraſſe les connoiſſances humaines dans toute leur étendue ; & ceux qui s'y appliquent à la théologie, au droit public, à la juriſprudence, peuvent eſpérer des places importantes & une grande fortune, tandis que les ſuccès dans l'étude des mathématiques & de la phyſique ne ſont récompenſés que par un peu de gloire. M. Bergman préféroit cependant ces dernières études, & cette préférence imprudente étoit l'objet des remontrances de ſon parent ; remontrances auxquelles il ne put échapper qu'en imaginant un moyen de cacher ſubitement ſes livres de phyſique, lorſqu'il étoit ſurpris, pour ne laiſſer voir que ceux qu'il lui étoit permis d'étudier. Cette néceſſité d'acquérir dans des genres auxquels il ne ſe livroit qu'avec dégoût, aſſez de connoiſſances pour perſuader qu'il en avoit été uniquement occupé, & cacher les progrès plus grands qu'il faiſoit dans les ſciences de ſon choix, altéra promptement ſa ſanté ; & au bout d'une année, il fut obligé de retourner dans ſa famille & de joindre aux études ſédentaires un exercice de corps habituel, qui ſeul pouvoit rétablir & fortifier ſa conſtitution. Mais il voulut que cet exercice ſervît encore à l'inſtruire ; il avoit étudié la botanique avant d'aller à Upſal ; il reprit cette étude dans ſa retraite, & y joignit celle des inſectes. Pluſieurs de ceux qu'il obſerva ne ſe trouvoient point claſſés dans les ouvrages de Linné. M. Bergman en forma une petite collection, & la fit remettre à cet homme illuſtre, qui alors habitoit Upſal. M. Bergman n'avoit pas oſé ſe préſenter à lui pendant ſon premier ſéjour. Cette diſcrétion eſt un ſentiment bien naturel dans un jeune homme qui frappé d'un juſte reſpect pour le génie, ne ſe croit pas digne encore de l'approcher, mais nourrit au fond de ſon cœur l'eſpérance de mériter un jour d'attirer ſes regards. Cet hommage fut d'autant plus agréable à Linné, que le jeune naturaliſte avoit eu le bonheur de rencontrer des eſpèces curieuſes & réellement inconnues.

Lorſque

Lorſque la ſanté de M. Bergman fut rétablie, il obtint la permiſſion de retourner à Upſal, avec une liberté entière de cultiver les mathématiques, la phyſique, l'hiſtoire naturelle. Il s'y étoit ménagé l'avantage d'être connu du ſavant dont le nom célèbre y éclipſoit alors les autres noms. Ainſi, cédant à cet empire que la gloire & le génie exercent ſur tout ce qui les environne, M. Bergman ne parut d'abord aimer que l'hiſtoire naturelle; elle fut l'objet de ſes premiers travaux, & ſon premier Mémoire fut une découverte. On ignoroit la nature d'un corps qui ſe trouve dans quelques eaux, & qui porte le nom de *coccus aquaticus.* M. Bergman s'aperçut que c'étoit l'œuf d'une ſangſue, œuf qui renfermoit dix à douze petits. Linné, auquel il fit part de cette obſervation, refuſa de le croire; mais M. Bergman le rendit lui-même témoin de ce fait. Alors Linné, après avoir écrit de ſa main au bas du mémoire de ſon élève; *vidi & obſtupui, je l'ai vu, & j'en ai été frappé d'étonnement,* l'envoya, décoré de cette honorable apoſtille, à l'Académie de Stockolm.

Peu de temps après, Linné donna le nom de M. Bergman à une nouvelle eſpèce d'inſectes. Cette manière d'attacher le nom d'un homme à une eſpèce qui doit être éternelle, ſemble annoncer qu'on croit, ou ſes talens, ou le ſentiment qu'on éprouve pour lui dignes d'être conſacrés à l'immortalité. C'eſt une ſorte d'apothéoſe qui ne coûte rien à la raiſon; mais le ſuccès de cet honneur dépend beaucoup du haſard. Ces dénominations diſparoiſſent ſouvent de la langue des ſciences, d'autres fois elles s'y conſervent, mais elles ceſſent de rappeler un nom oublié dont on a voulu vainement prolonger la mémoire; & les ſavans ne doivent compter ſur l'immortalité que lorſqu'ils l'ont méritée par leurs ouvrages.

Des Mémoires couronnés par l'Académie de Stockolm, ſur l'hiſtoire des inſectes qui attaquent les arbres à fruit, & ſur les moyens de ſe mettre à l'abri de leurs ravages; une méthode de les claſſer d'après la forme qu'ils ont dans

l'état de larve, époque où il feroit le plus utile pour l'agriculture de pouvoir reconnoître & détruire ceux qui font nuifibles; un grand nombre d'obfervations fur cette claffe d'animaux fi variés dans leurs formes & dans leur organifation, fi importans pour l'homme qui a fu en foumettre quelques-uns à fes befoins, tandis que les autres défendus par leur petiteffe, & puiffans par leur multitude, ofent lui difputer encore quelques parties de fon empire, enfin fi intéreffans par cette foule d'obfervations qu'offre au philofophe qui fait voir & réfléchir, le fpectacle de leur induftrie, de leur prévoyance, de leurs travaux, de leurs mœurs, de leur état de civilifation plus ou moins perfectionnée : tel a été le fruit du goût de M. Bergman pour une étude qui déjà n'étoit plus pour lui qu'un délaffement; car les mathématiques & les parties de la phyfique qui y ont rapport étoient devenues fa véritable occupation. M. Bergman aimoit à parler de fes premiers travaux dans un genre auquel il avoit renoncé, mais pour lequel il avoit confervé un goût très-vif; & long-temps après il citoit avec une forte de complaifance, que dans un feul jardin & pour une feule année, l'ufage d'un moyen qu'il avoit indiqué avoit prévenu la naiffance de plus de fept millions d'infectes deftructeurs.

Il fut nommé, en 1761, profeffeur de mathématiques & de philofophie naturelle. Depuis plufieurs années il enfeignoit les différentes parties de ces fciences. Nous lui devons une favante hiftoire de l'arc-en-ciel & des crépufcules, des recherches fur l'aurore boréale, fur les phénomènes électriques, fur l'électricité du cryftal d'Iflande, fur celle de la tourmaline. Enfin on trouve fon nom dans la lifte des aftronomes qui ont obfervé le premier paffage de Vénus fur le Soleil, parmi ceux dont les réfultats méritent le plus la confiance des favans.

Perfonne alors ne favoit à Upfal qu'il eût cultivé la chimie; mais Wallerius s'étant démis, en 1767, du titre de profeffeur dans cette fcience, M. Bergman fit infcrire fon nom dans la lifte des concurrens. Wallerius avoit efpéré

pouvoir faire paſſer ſa chaire à un de ſes élèves, & bientôt M. Bergman vit ſe réunir contre lui tous ceux qui formoient, à Upſal, le parti de l'ancien profeſſeur : car tout homme célèbre a la triſte facilité d'en avoir un, à moins qu'il n'ait la ſageſſe & la noble fierté de dédaigner un avantage ſi dangereux. Ce parti s'accrut bientôt de la foule de ces hommes condamnés à ne jamais reconnoître un mérite ſupérieur dans leurs contemporains, ainſi qu'à ne jamais croire une vérité ſi elle n'a point été une des opinions de leur jeuneſſe.

Deux diſſertations ſur l'alun, que M. Bergman avoit données comme un eſſai de ſes forces, furent critiquées avec amertume. Il devoit ſuccomber ſous cette eſpèce de conjuration. Heureuſement pour la chimie, le prince royal, aujourd'hui roi de Suède, étoit alors chancelier de l'univerſité d'Upſal; il conſulta des ſavans qui, étrangers à ce corps, ne pouvoient partager les préventions de ſes membres, examina les titres de M. Bergman & les reproches élevés contre lui, ſe chargea lui-même de répondre à ces reproches & de le défendre auprès du ſénat. C'eſt à-la-fois une anecdote bien honorable pour les ſciences, & une preuve frappante des progrès de la raiſon humaine, que de voir l'héritier d'un trône employer ſes talens, plutôt encore que ſon crédit, à ſoutenir devant les chefs de la nation la cauſe du génie perſécuté, & à lui faire obtenir juſtice.

On auroit pu craindre que M. Bergman, livré pendant long-temps à des études étrangères à la chimie, ne manquât, dans la nouvelle carrière où il s'étoit jeté, de cette étendue de connoiſſances, de cette facilité, de cette habitude des opérations, avantages ſans leſquels, dans les ſciences phyſiques, le talent peut encore beaucoup pour la célébrité du ſavant, mais très-peu pour le progrès de la ſcience & l'utilité réelle. On s'aperçut bientôt au contraire, que ſes études de géométrie, de phyſique, d'hiſtoire naturelle, étoient bien loin de lui avoir été inutiles. Elles le préſervèrent des préjugés & de l'eſprit de routine dont chaque partie

de nos connoiſſances ſemble avoir encore conſervé quelques veſtiges; elles donnèrent à ſes idées & à ſes vues plus de préciſion & plus d'étendue. Il vit que la chimie devoit être, après les mathématiques, la baſe fondamentale de la connoiſſance de la nature, qu'il falloit donc reculer les bornes du champ trop reſſerré où cette ſcience avoit été renfermée; mais qu'en lui ouvrant une carrière plus vaſte, on couroit riſque de n'y multiplier que les erreurs, ſi on ne s'occupoit en même temps d'en bannir toutes les explications vagues & ſyſtématiques, d'en réformer la langue, enfin d'y porter l'exactitude de quelques autres parties de la phyſique.

Son premier ſoin fut de former auprès de ſon laboratoire un cabinet dans lequel les ſubſtances du règne minéral étoient rangées par ordre, à côté des produits des expériences qui lui en avoient fait connoître la compoſition; une autre pièce renfermoit les minéraux qui ſe trouvent en Suède, & ils y étoient rangés ſuivant leur ordre géographique; enfin dans une troiſième, les modèles des machines, des inſtrumens, des métiers employés à faire ſubir à ces ſubſtances les préparations, à leur donner les formes qui les rendent utiles à nos beſoins, étoient placés à côté des produits que les arts en avoient formés. Par ce moyen, un élève apprend d'abord à connoître les ſubſtances d'après leur nature & la proportion de leurs principes. Plus loin, il les aperçoit rangées dans l'ordre où elles ont été répandues ſur le globe, & les loix qui ont préſidé à cet ordre deviennent plus faciles à reconnoître ou à ſaiſir. Enfin il voit comment les arts ont ſu employer ces ſubſtances, comment leur pratique a prévenu les théories, ou a ſu en profiter; comment on y a réſolu une foule de problèmes chimiques compliqués par une condition de plus, la néceſſité de les réſoudre avec profit, élément qui rend cette ſolution plus difficile, & les méthodes par leſquelles on l'a trouvée, ſouvent plus piquantes.

Cette manière d'inſtruire, ſi nouvelle, & pour laquelle

M. Bergman fit des ſacrifices conſidérables, eſt un des grands ſervices qu'un eſprit profond & philoſophique pût rendre aux ſciences. Bientôt après il les enrichit par de nombreuſes découvertes.

C'eſt lui qui le premier a fait bien connoître la ſubſtance à laquelle on donnoit le nom d'*air fixe*, & qu'il a nommée *acide aérien*, après avoir prouvé qu'elle avoit toutes les propriétés des acides.

Le nikel, le régule de manganèſe, la terre de magnéſie, la terre peſante étoient des ſubſtances nouvellement découvertes, & ſur leſquelles la chimie n'offroit avant lui que des vues ingénieuſes ou des expériences iſolées.

L'acide qu'on retire du ſucre & d'un grand nombre d'autres ſubſtances végétales, en diſtillant ſur elles de l'acide nitreux; ceux qu'on retire de l'arſenic, de la molibdène, du ſpath fluor, de la tunſthène, avoient été découverts dans ſon école, par lui ou par ſes diſciples. Mais il falloit une longue ſuite d'expériences & de recherches pour apprendre à connoître ces ſubſtances, ou nouvelles, ou peu familières aux chimiſtes, auſſi parfaitement que celles qui ont été plus anciennement traitées; & pour que leur analyſe, leurs propriétés, les phénomènes qu'elles préſentent dans leurs combinaiſons, formaſſent également un enſemble ſyſtématique de faits conſtans & précis.

M. Bergman oſa entreprendre ce travail immenſe; & tandis que ce terrein, juſque-là ſans culture, lui offroit d'abondantes moiſſons, il ſavoit en recueillir de nouvelles ſur ceux qu'une culture aſſidue ſembloit avoir épuiſés. Le fer qui eſt depuis ſi long-temps le ſujet des opérations de tant d'arts différens, & l'objet des recherches des ſavans & des artiſtes, n'a commencé à être vraiment connu que depuis les recherches de M. Bergman, qui a montré, dans ce qu'on prenoit pour du fer, pluſieurs ſubſtances étrangères, preſque toutes métalliques, dont l'exiſtence étoit inconnue; mais ce n'eſt point par ces travaux particuliers qu'il faut juger de ſon génie; c'eſt dans ſes nouvelles

méthodes, dans ſes théories générales, qu'il faut apprendre à le connoître & à l'apprécier.

Dans ſes diſſertations ſur l'analyſe des eaux, on le voit ajouter aux réactifs déjà employés, des réactifs nouveaux; faire ſentir l'imperfection de cette méthode, en même temps qu'il enſeigne à la porter à un degré d'exactitude encore inconnu ; ajouter à l'analyſe directe de nouveaux moyens de ne laiſſer échapper aucun des produits, de les ſéparer avec plus d'exactitude & d'en déterminer les quantités reſpectives avec une très-grande préciſion. Au lieu de chercher à les obtenir ſeuls pour les peſer enſuite, méthode ſouvent difficile & qui expoſeroit à en perdre une partie, il cherche au contraire le poids d'une des combinaiſons de chacun de ces principes, avec une ſubſtance bien connue qu'il a employée, pour enlever ce principe à ceux auxquels il étoit uni. Des expériences faites à part & plus en grand lui apprennent enſuite à connoître la proportion des ſubſtances qui conſtituent cette combinaiſon nouvelle; cette méthode ingénieuſe & féconde dont il eſt l'auteur rend les réſultats plus précis & ſouvent même plus aſſurés,

Les pierres précieuſes, connues ſous le nom de *gemmes*, avoient preſque entièrement échappé à tous les efforts de l'analyſe. M. Bergman parvint à les y ſoumettre, briſa l'union qui règne entre leurs parties, & ſépara les terres de différente nature dont elles ſont compoſées. La terre alumineuſe en forme plus de la moitié; la terre quartzeuſe & la terre calcaire, un peu de chaux de fer en ſont les autres principes; & c'eſt avec ces ſubſtances communes & viles en apparence, que la Nature, avec l'aide du temps, & par des moyens qui ſont encore un ſecret pour nous, parvient à former ces pierreries que leur éclat, leur rareté, leur éternelle durée ont rendu dignes de ſervir d'ornement à la beauté, & de parer la tête des rois ou les ſtatues des dieux.

Le diamant qui diffère de toutes les autres pierres, par la propriété qu'il a de brûler, n'a pu même ſe dérober tota-

lement à la sagacité de M. Bergman, qui en a fait assez pour prouver que si dans ses recherches sur le diamant, il n'a pu obtenir un succès également complet, c'est sa fortune & non son génie qu'il en faut accuser.

M. Bergman a prouvé la nécessité de procéder dans les opérations docimastiques par la voie humide, c'est-à-dire, par l'analyse où l'on emploie des menstrues, seule méthode qui puisse être rigoureuse; mais il enseignoit en même temps à perfectionner les procédés ordinaires, à les simplifier: il montroit quelle pouvoit en être la véritable utilité; il apprenoit à exécuter avec un chalumeau, un charbon, une simple cuillier & quelques substances d'épreuve, de premières analyses assez exactes, pour reconnoître les substances minérales avec certitude & se guider dans une analyse plus complète. M. Bergman entreprit alors de classer toutes ces substances d'après leur composition chimique. Cette méthode est la seule vraiment scientifique, puisque c'est la seule qui ait pour objet les qualités essentielles aux substances, celles dont dépendent toutes leurs propriétés secondaires; mais une difficulté jusqu'à lors insoluble avoit empêché les naturalistes d'adopter cette méthode, l'impossibilité d'en faire usage ailleurs que dans un laboratoire, par des moyens lents, coûteux & pénibles. M. Bergman avoit sçu vaincre cette difficulté, en inventant cette analyse au chalumeau; & aujourd'hui le minéralogiste armé de cet appareil portatif peut, au sein des mines, sur le sommet des montagnes, au fond des souterrains creusés par la nature, tout analyser & tout reconnoître.

Dans un Mémoire sur la cristallisation, publié en 1773, M. Bergman montra comment d'une forme primitive très-simple peuvent naître des formes de cristaux qui, au premier coup-d'œil, n'ont aucun rapport avec la forme génératrice; & comment la dissection de ces cristaux, l'examen des coupes qu'on peut y faire avec plus ou moins de facilité, apprennent à reconnoître cette figure primitive & les loix plus ou moins simples, d'après lesquelles elle a déterminé

la production des cristaux différens. Ce Mémoire n'est qu'un simple essai, c'est la première esquisse d'une théorie nouvelle, mais cette esquisse est l'ouvrage d'un grand maître. M. l'abbé Haüy s'occupoit de son côté des mêmes objets à peu-près dans le même temps, mais avec plus de suite, & c'est à lui que doit appartenir la gloire d'avoir établi cette théorie qui manquoit aux sciences naturelles.

Un des derniers ouvrages de M. Bergman, est un savant traité sur les attractions électives. Nous entrerons dans un détail plus long sur cette théorie qui est à la fois le fondement de la chimie, & le point par lequel elle se lie le plus à la physique, & doit un jour s'unir aux sciences mathématiques; union dont les recherches sur les phénomènes de la cristallisation peuvent nous faire espérer que l'époque n'est pas aujourd'hui très-éloignée.

M. Geoffroi, de cette Académie, paroît être le premier qui ait imaginé de réduire à quelques règles générales les phénomènes observés constamment dans les opérations chimiques. On appeloit alors *affinité* la force inconnue, en vertu de laquelle deux substances s'unissent & forment une combinaison. Si une troisième substance détruit cette première combinaison pour en former une nouvelle avec un de ses principes, on disoit qu'elle avoit avec ce principe une affinité plus grande que le second principe qui en avoit été séparé par elle. M. Geoffroi imagina de donner une table qui contenoit, pour les substances les plus importantes ou les plus connues, l'ordre de la force d'affinité, suivant laquelle les autres y adhèrent. C'étoit d'après les observations que cette table avoit été formée; elle étoit comme le précis des résultats que l'on en pouvoit tirer; elle réduisoit à un petit nombre de faits simples & généraux, la masse déjà très-grande des faits chimiques : elle pouvoit servir à donner l'explication de plusieurs phénomènes nouveaux, c'est-à-dire à montrer leur accord avec les faits déjà connus. Cette table eut le succès que méritoit une idée si ingénieuse, & depuis ce temps il n'est presque pas de chimiste célèbre qui,

qui, dans ses leçons ou dans ses ouvrages, n'ait donné la table des affinités de M. Geoffroi, corrigée, augmentée, perfectionnée. M. Bergman avoit porté, dans l'étude de la chimie, des vues trop philosophiques pour ne pas sentir l'importance de cette table & ne pas s'occuper de la rendre plus utile. Mais il regardoit ce travail comme devant former le résultat & le complément de tous les autres, & il avoit calculé le nombre effrayant de trente mille expériences nécessaires encore pour la rendre aussi complète que nos connoissances le permettent. Aussi auroit-il retardé encore long-temps la publication de cet ouvrage, si le dépérissement de sa santé ne lui eût fait envisager une mort prochaine. Alors il se crut permis de mettre au jour les matériaux qu'il avoit rassemblés, les idées qu'il auroit voulu éclaircir, les vues qu'il se proposoit de vérifier; il ne craignit plus le reproche d'avoir publié un ouvrage trop imparfait, de n'avoir fait que déviner ce qu'il auroit fallu prouver. *Il me suffit*, disoit-il, *que mes essais puissent mettre les autres en état de porter plus loin leurs recherches. Qu'importe que la vérité soit trouvée par moi ou par un autre, pourvu qu'elle le soit.*

Cependant cet ouvrage si imparfait à ses yeux, ne l'a pas été aux yeux des autres chimistes. Sa table incomparablement plus étendue que celle de M. Geoffroi, est la première qui contienne les loix des affinités, telles qu'on les observe en opérant par la voie sèche. Il a eu de plus l'idée absolument nouvelle d'exprimer, par des espèces de formules, toutes les opérations chimiques, dont les résultats servent de base à sa table. Un seul coup-d'œil fait voir les substances sur lesquelles on a opéré, la méthode employée & le résultat de l'opération.

Cette espèce de langue nouvelle mérite l'attention des philosophes; le moment approche où la langue alphabétique ne sera plus ni assez rapide, ni assez riche, ni assez précise, pour répondre aux besoins des sciences & suivre leurs progrès; elles seront forcées de s'arrêter, ou il faudra créer pour chacune une langue dans laquelle des signes invariablement déterminés,

expriment les objets de nos connoissances, les diverses combinaisons de nos idées, les opérations auxquelles nous soumettons les productions de la nature, & celles que nous exécutons sur nos propres idées, qui soient enfin pour tous les genres de sciences, mais avec plus de perfection encore, ce que la langue de l'algèbre est pour l'analyse mathématique.

Personne, avant M. Bergman, n'avoit mieux prouvé combien les loix des affinités sont constantes, & comment on peut, par un examen plus approfondi des phénomènes, rappeler à ces loix les faits qui paroissent le plus les combattre. Il montre en effet que la même substance agit tantôt comme n'étant qu'un seul principe, & tantôt comme étant elle-même décomposable, & par l'action séparée des différens principes dont elle est formée. Ici les principes, au lieu de se combiner deux à deux, se combinent trois à trois; là, une substance formée de deux principes est capable de conserver, avec une certaine quantité surabondante d'un de ses principes, une affinité assez forte pour enlever ce principe à une autre substance & la décomposer. M. Bergman s'est borné à la table des affinités simples ou regardées comme telles : car peut-être n'en existe-t-il pas réellement dans la nature. La table des affinités doubles eût exigé un travail immense que la durée trop courte de sa vie ne lui a point permis de terminer.

Au mot d'*affinité* il substituoit celui d'*attraction élective;* il employoit le mot *attraction*, parce que cette force, comme l'attraction Newtonienne, peut s'observer dans tous les corps de la nature, & tend à rapprocher, à unir les molécules entr'elles; & il y ajoutoit l'épithète *élective*, parce qu'elle n'est pas la même dans les molécules égales en masse, mais qu'elle varie suivant la nature des substances qui tendent à se combiner.

Dans cet ouvrage rempli de tant de vérités, ou neuves, ou éclaircies & mieux prouvées, dans celui où, par la comparaison des masses de métaux qui se précipitent mutuellement, M. Bergman cherche le rapport des quantités de

phlogistique qu'ils contiennent, on voit qu'il admettoit une théorie différente de celle qui paroît presque généralement adoptée par les chimistes françois. Dans M. Bergman, le soufre n'est pas une substance qui, s'unissant avec un des principes de l'air vital, forme de l'acide vitriolique; c'est une combinaison de l'acide vitriolique & du phlogistique. Elle se change en acide lorsqu'elle perd ce phlogistique & qu'elle s'unit à la matière de la chaleur, qui est elle-même une combinaison du phlogistique & de l'air vital. Une terre métallique est, suivant M. Lavoisier, le métal uni à l'air vital: suivant M. Bergman & M. Schéelle, c'est une terre unie à la matière de la chaleur, & le métal étoit la même terre unie avec le phlogistique. On voit combien les deux explications qui peuvent paroître opposées au premier coup-d'œil, se rapprochent lorsqu'on vient à les considérer de plus près. Aussi rendent-elles raison des phénomènes avec un succès presque égal; & jusqu'ici il paroît qu'aucune expérience vraiment décisive n'a ni confirmé, ni détruit aucun des deux systèmes. Mais quand M. Bergman se seroit trompé, la sincérité avec laquelle il n'a donné son opinion que comme la plus vraisemblable à ses yeux, la modestie avec laquelle il emploie le système d'explications proposé par M. Schéele, lorsqu'il lui eût été si facile d'en imaginer un autre, devroient lui faire pardonner cette erreur. D'ailleurs on ne pourroit lui faire, sans injustice, le reproche de n'avoir pas assez étudié la nouvelle théorie des gaz, reproche qu'ont mérité peut-être quelques partisans du phlogistique, puisque indépendamment de ses travaux sur le gaz aérien, sur le gaz hépatique des eaux sulfureuses, on lui doit la première explication solide de la détonation de l'or fulminant, détonation dûe à la production d'un air alkalin.

Une théorie de la terre fait partie des ouvrages de M. Bergman. Mais dans un discours sur la manière de chercher la vérité, ouvrage digne d'un homme qui avoit commencé par donner de grands exemples, il nous apprend lui-même ce que nous devons penser de ces hypothèses

philoſophiques. Il croyoit, comme M. Francklin, qu'il ne peut y avoir dans ces ſyſtèmes d'autre mérite que la facilité de les faire, jointe à celle de les abandonner. Il croyoit en même temps qu'en les enviſageant comme de ſimples plans d'expériences ou d'obſervations, ils peuvent avoir quelque utilité: d'ailleurs ils ſervent de cadre pour arranger les faits ſous un ordre plus frappant; en parlant à l'imagination, ils ſoutiennent une attention foible que laſſeroit une ſuite non interrompue de diſcuſſions & de faits; & à cet égard ils ſont en quelque ſorte, dans les ſciences, ce que ſont dans la littérature ces romans de morale ou de politique deſtinés à rendre l'inſtruction plus agréable & plus facile.

Les événemens de la vie de M. Bergman ſont peu variés. Placé comme profeſſeur de chimie à Upſal, il n'en ſortit plus que pour faire quelques courſes ſcientifiques dans les mines, & pour aller prendre les eaux lorſque ſa ſanté lui en avoit rendu le ſecours néceſſaire.

Il eut l'honneur d'être élu recteur de l'Univerſité: cette compagnie n'eſt pas ſeulement un corps littéraire; propriétaire de grandes terres ſur leſquelles elle exerce une autorité très-étendue, jouiſſant d'une juridiction ſur ſes membres & ſur les écoliers, poſſédant un grand nombre de ces immunités, de ces priviléges, que dans les ſiècles qui nous ont précédés on regardoit comme des encouragemens, & qui ne ſervent qu'à décourager le talent, à rallentir l'activité en détruiſant la concurrence; l'univerſité d'Upſal eſt au milieu de la Suède une ſorte de république. Les profeſſeurs en ſont les chefs; & tandis que dans les établiſſemens littéraires, toutes les inſtitutions devroient avoir pour but d'y maintenir la paix, & de diſpenſer leurs membres de toute occupation étrangère aux ſciences, la conſtitution de cette univerſité oblige les profeſſeurs à des ſoins qui peuvent les écarter ou les dégoûter de leurs fonctions, & inſpire aux autres corps de l'état, aux perſonnes puiſſantes le deſir de s'y faire des créatures, d'y avoir de l'influence. Ses membres pourroient être tentés quelquefois d'oublier que ce n'eſt pas leur intérêt, mais l'intérêt commun des citoyens, qui a été l'objet de leur

établiſſement; & de ſacrifier leur véritable devoir, le zèle pour le progrès des ſciences, à cet eſprit de corps auſſi mépriſable dans ſon principe, moins raiſonnable dans ſes motifs que l'intérêt perſonnel, mais plus audacieux dans ſes excès, & moins ſuſceptible d'être contenu par l'honneur ou par la crainte. Chef de cette univerſité alors partagée en deux grands partis, celui des théologiens unis aux juriſconſultes & celui des phyſiciens, M. Bergman ne s'occupa que de maintenir entr'eux l'union, l'égalité même, quoiqu'il eût contribué plus que perſonne à faire pencher la balance du côté du parti trop long-temps le plus foible; & l'époque de ſa magiſtrature eſt remarquable dans les faſtes de ce corps, par le petit nombre d'affaires & de délibérations que préſentent les regiſtres. Elle le fut auſſi par la ſageſſe de la conduite des écoliers; ils ſont en grand nombre, preſque tous au-deſſus de l'enfance & dans le premier âge des paſſions: ſouvent ils avoient éludé ou bravé la ſévérité des règlemens, & ils furent ſubjugués par leur reſpect pour la gloire de leur chef & leur admiration pour ſon génie. M. Bergman ſavoit que le premier dans une ſociété ſavante, n'eſt ni le chef de cette ſociété, ni l'homme dont la voix y a le plus d'influence; mais celui qui s'eſt illuſtré par un plus grand nombre de découvertes, ou qui en a fait de plus importantes.

Le roi de Pruſſe deſira d'attacher M. Bergman à ſon Académie. Le ſavant Suédois héſita un moment: ſa ſanté altérée par le double travail de l'enſeignement & des recherches chimiques, pouvoit ſe rétablir dans un climat plus doux; il auroit pu s'y livrer ſans partage à des travaux académiques. Mais le roi de Suède avoit été ſon bienfaiteur particulier; il ſut que ſa retraite affligeroit ce monarque, & il n'y ſongea plus: ſeulement il demanda au roi de ne pas lui faire perdre le mérite de ce ſacrifice en augmentant ſes appointemens; mais ſa demande ne fut point écoutée.

La réputation d'un ſavant illuſtre s'accroît par celle de ſes diſciples. Son nom ſe préſente à la poſtérité entouré des

noms célèbres qui ont dû à ses soins une partie de leur éclat; il conserve enfin sur les découvertes faites dans son école, une espèce de droit de suzeraineté. Parmi les chimistes formés par M. Bergman, nous citerons sur-tout M. Schéelle, parce qu'il est plus particulièrement son ouvrage. Un des auditeurs de M. Bergman découvrit par hasard, chez un apothicaire d'Upsal, un jeune élève à qui l'on reprochoit de négliger les travaux de son état en s'abandonnant à son goût pour la chimie. Il vit ce jeune homme, fut surpris des recherches ingénieuses auxquelles il avoit pu se livrer dans un laboratoire particulier, que, malgré la médiocrité de sa fortune & la gêne à laquelle il étoit soumis, il avoit su se former: cet élève étoit M. Schéelle. M. Bergman instruit de cet événement, voulut voir ce jeune homme, fut étonné de ses connoissances, de ses dispositions heureuses : ce génie naissant ne put échapper à la sagacité d'un maître habile; dès ce moment M. Schéelle fut son disciple chéri, bientôt son digne émule & toujours son ami. Au lieu d'affecter sur lui cette supériorité à laquelle un maître renonce avec tant de peine, M. Bergman se trouvoit assez grand pour ne vouloir que l'égalité; & loin de chercher à s'arroger quelque droit sur les travaux de M. Schéele, on lit dans ses lettres à des chimistes étrangers, qu'il voyoit avec une véritable douleur que l'erreur les lui attribuât quelquefois. Sa conduite à cet égard fut la même pour tous ses disciples; exact à les citer, ardent & habile à faire valoir leurs travaux, il alloit au-delà même de la justice rigoureuse qui malheureusement auroit encore été un mérite.

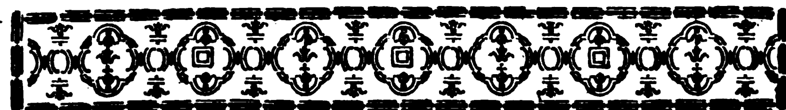
La célébrité de M. Bergman lui avoit fait des disciples dans toutes les contrées de l'Europe. En France, nous citerons en particulier deux magistrats qui honorent la magistrature par leurs lumières, par leur zèle ardent & éclairé pour le progrès des sciences, par le courage avec lequel ils se sont élevés au-dessus des préjugés, & qui en même temps ont fait honneur aux sciences par l'esprit d'humanité, de raison, de patriotisme éclairé qu'ils ont porté dans leurs fonctions. On reconnoîtra ici M.rs de Morveau

& de Virli. L'un d'eux, M. de Virli, voulut même aller entendre M. Bergman en Suède, & profiter de ses leçons; & nous devons à M. de Morveau la traduction de l'ouvrage où, sous le titre modeste d'Opuscules, M. Bergman a rassemblé les plus importantes de ses recherches.

L'usage de l'Académie de Stockolm est de partager entre ses membres le travail des éloges décernés à ceux qu'elle a perdus. M. Bergman se chargea de celui de Wallerius qui avoit été constamment injuste envers lui, & même envers la chimie, sur laquelle son aversion s'étoit étendue. Nous ne le louerons point d'avoir oublié en ce moment son ancienne injure; mais il étoit utile que le mérite réel de Wallerius fût apprécié par un homme fait pour le bien connoître, dont le suffrage ne seroit pas suspect, & M. Bergman fut assez sûr de lui-même pour ne pas craindre de confondre les limites étroites qui séparent la justice de la sévérité, & l'indulgence qu'on doit à un ennemi, d'une générosité qui seroit un outrage.

La passion de M. Bergman pour les sciences, avoit épuisé sa constitution naturellement ardente & délicate. Il prodiguoit sa santé, non-seulement pour les travaux qui pouvoient lui procurer des connoissances nouvelles ou lui mériter de la gloire, mais encore pour ceux qui, n'étant utiles qu'à l'instruction de ses disciples, ne lui offroient d'autre récompense que le plaisir d'avoir rempli son devoir. Pendant quelque temps les eaux minérales artificielles suspendirent ses maux, & ce fruit de ses travaux répara une partie du mal qu'ils lui avoient fait. Les eaux de Medewi en Suède lui sauvèrent une fois la vie, mais en 1784 il eut encore besoin de ce secours, elles ne lui firent plus aucun effet, & le 8 Juillet de la même année, il succomba sous le poids de ses maux, victime de son zèle pour ses devoirs & pour la chimie. Il n'avoit pas encore cinquante ans, & depuis long-temps son nom étoit, dans les sciences, un des premiers de l'Europe.





ÉLOGE

DE M. MORAND.

JEAN-FRANÇOIS-CLÉMENT MORAND, docteur-régent de la Faculté de médecine de Paris, premier médecin du cardinal de Bavière électeur de Cologne, des Académies des Sciences de Stockholm, de Harlem & de Bruxelles; de la Société Royale de Londres, de l'Académie de médecine de Madrid, de la Société botanique de Florence; de la Société économique de Berne, & de la Société d'émulation de Liége, pensionnaire anatomiste de l'Académie des Sciences, naquit à Paris le 29 Avril 1726, de Sauveur-François Morand, de cette Académie, & de Marie-Clémence Guerin.

Le père de M. Morand comptoit parmi ses parens, plusieurs chirurgiens célèbres; lui-même s'étoit illustré dans cette profession, & avoit contribué à lui faire obtenir la juste considération dont elle jouit de nos jours. Il étoit naturel qu'il desirât d'avoir dans son fils un successeur qui soutînt le nom que sa famille avoit acquis dans la chirurgie. Mais quoique le jeune Morand eût pris pour l'anatomie le goût qu'il seroit difficile qu'un si bon maître & un exemple si glorieux n'eussent pas réussi à lui donner, il préféra l'état de médecin.

Le goût naturel de M. Morand le portoit à cultiver les sciences, mais beauconp moins à en approfondir une en particulier, qu'à les effleurer toutes, & à rassembler sur chacune les faits singuliers ou importans, les observations neuves ou utiles qui s'offroient à sa curiosité, & qu'il cherchoit avec une activité infatigable. En parcourant ses

observations

obſervations répandues dans une foule de recueils différens, on eſt également ſurpris de leur nombre & de leur variété. Des analyſes d'eaux minérales, des obſervations ſur la compoſition ou les effets de remèdes nouveaux, & ſur l'utilité de divers inſtrumens de chirurgie ; l'expoſition de pluſieurs maladies extraordinaires obſervées, ſoit dans l'homme, ſoit dans les animaux, & propres à éclairer ſur les ſecrets de l'économie animale ; des remarques ſur quelques phénomènes de botanique ou de météorologie ; l'hiſtoire d'un inſecte, la deſcription d'une mine ou d'une montagne, des obſervations ſur l'altération que différentes ſubſtances ont éprouvée ou dans la terre, ou dans la mer ; des diſſertations ſur des antiquités, & enfin juſqu'à des recherches ſur le lieu de la ſépulture de cet Hermite Pierre, le premier auteur des croiſades, qui doit ſon immortalité à l'honneur funeſte, mais rare pour un particulier, d'avoir été la première cauſe de la mort de pluſieurs millions d'hommes : tel eſt le tableau très-abrégé & très-incomplet de ce qu'offrent les ouvrages épars de M. Morand.

En *1759*, il entra dans l'Académie comme adjoint-anatomiſte ; & on trouve dans les Mémoires de la même année, ſa diſſertation ſur la conſtruction intérieure & l'uſage du thymus. Cet organe ſingulier exiſte dans la poitrine du fœtus des animaux vivipares, croît avec eux, & continue même de croître encore dans les premiers temps qui ſuivent la naiſſance ; bientôt après il diminue, s'oblitère & diſparoît preſque en entier. Il exerce donc, dans les premiers temps de la vie, des fonctions qui deviennent enſuite inutiles à la conſervation de l'individu, & n'entrent plus dans l'ordre des loix d'après leſquelles il doit exiſter. Comme les conjectures des anatomiſtes ſur ces fonctions étoient peu ſatisfaiſantes, M. Morand a cru devoir en former de nouvelles ; & il ſuppoſe que, pendant le temps de la geſtation, le thymus ſépare du ſang la partie laiteuſe que lui fournit le placenta. Elle paſſe du thymus dans le canal thorachique, pour prendre enfin la route que ſuit le chyle dans les

animaux adultes. Lorſque l'animal eſt né & qu'il reſpire, ce même organe peut encore ſervir à la ſécrétion d'une partie du ſang, tant que la nouvelle route que prend alors la circulation n'eſt pas aſſez établie, & que le poumon n'exerce pas ſes fonctions d'une manière complète. La poſition du thymus, ſa conſtruction intérieure, la nature des vaiſſeaux qui le parcourent, tout ſemble concourir à rendre vraiſemblable cette opinion de M. Morand; & c'eſt beaucoup en ce genre, où l'ignorance, peut-être à jamais invincible, du premier principe de la vie, ne permet guère de s'élever au-deſſus de la vraiſemblance.

M. Morand s'occupa bientôt après d'un travail d'un autre genre. Il ſe chargea de donner à l'Académie la deſcription de l'art d'exploiter les mines de charbon de terre; minéral dont la nature ſemble avoir tenu en réſerve des maſſes immenſes pour le temps où l'induſtrie des hommes auroit perfectionné tous les arts ſans leſquels ce minéral ſeroit reſté ou inutile ou même inconnu. Cette précaution eſt d'autant plus bienfaiſante, que les progrès des arts accompagnent néceſſairement ceux de l'agriculture, qui ne peut elle-même ſe perfectionner ſans faire diſparoître de la ſurface de la terre les forêts immenſes qui la couvroient. En effet, la diſette de bois dont on ſe plaint déjà depuis long-temps, n'eſt que la ſuite infaillible des progrès de l'agriculture & du commerce. Les forêts doivent diminuer juſqu'à ce que le bois ait acquis le prix naturel qu'il doit avoir relativement aux autres productions, & que ce prix ſoit aſſez fort pour en rendre la culture avantageuſe. Ainſi, les moyens de multiplier les uſages du charbon de terre & de les répandre, ſont devenus un objet important, non pour ménager le bois, mais pour le rendre moins néceſſaire, laiſſer plus de terreins à d'autres productions, & le réſerver pour des uſages dans leſquels il peut être plus difficilement remplacé.

Les travaux de M. Morand, ſur le charbon de terre,

renferment à la fois tout ce que les ſciences peuvent apprendre ſur ſon origine ou ſur ſa nature, & les plus petits détails des travaux néceſſaires pour le tirer de la mine, ou des uſages économiques auxquels il peut être utilement employé. M. Morand prenoit au charbon de terre, aux ouvrages qui en ont traité, aux manufactures qui le conſomment, à tout ce qui a quelque rapport, même éloigné, avec cette ſubſtance, cet intérêt vif, cette eſpèce d'enthouſiaſme que l'objet d'une longue occupation ne manque guère d'inſpirer, dont ceux qui ne le partagent pas ne peuvent s'empêcher de s'étonner, que dans le premier mouvement on ſeroit tenté de trouver ridicule, mais qu'on reſpecte, par réflexion, comme la ſource de preſque tout ce qui ſe fait d'utile.

M. Morand entreprit un grand travail relativement aux états de population, objet important en politique comme en médecine. Il raſſembloit avec ſoin, tous les ans, ce qu'il lui étoit poſſible de recueillir, & il ſe propoſoit de donner chaque dixième année le réſultat de ſes obſervations dans les Mémoires de l'Académie des Sciences; mais il n'a pu exécuter ce projet que pour deux époques, celle de 1770 & celle de 1780. Les recherches de ce genre n'ont encore, parmi nous, ni obtenu toute l'eſtime, ni excité tout l'intérêt qu'elles méritent, ſoit parce que l'art d'en tirer des réſultats eſt encore & peu connu, & peu avancé, ſoit parce qu'elles aſſujettiſſent l'eſprit à une marche trop ſimple & trop régulière, qui conduit à quelques vérités utiles, mais avec beaucoup de travail & très-peu de gloire; au lieu qu'on peut obtenir à peu de frais une renommée plus brillante, en renfermant des demi-vérités ou même des erreurs dans des maximes vagues, mais impoſantes, & en les embelliſſant des formes de l'éloquence.

Quoique M. Morand n'eût preſque jamais pratiqué la Médecine, il n'en étoit pas un membre moins zélé de la Faculté. Il y a ſouvent préſidé à des thèſes, dont quelques-unes avoient pour objets des queſtions curieuſes:

telle est celle où il demande si les héros produisent des héros.

Cette question de la ressemblance des pères aux enfans dans les qualités morales, est sûrement une des plus dignes d'occuper les physiciens & les philosophes; mais il faudroit, pour la résoudre, avoir rassemblé un nombre d'observations d'autant plus grand, qu'il s'y trouve une source particulière d'incertitude à laquelle on ne doit pas sans doute attacher une importance trop grande, mais qu'il seroit imprudent de négliger.

L'humanité, le zèle de M. Morand pour le bien public, ne lui permettoient pas de refuser ses secours toutes les fois qu'une maladie épidémique ou extraordinaire réclamoit son assistance. Il donnoit ses soins aux malheureux & à quelques amis; il étoit même le médecin de trois communautés religieuses, qui, par la confiance qu'elles lui avoient montrée, avoient vaincu sa répugnance pour la pratique. Cette confiance n'a pas été trompée, si on en juge par leurs regrets & par le desir qu'elles m'ont témoigné de rendre ici en leur nom, à M. Morand, un témoignage public de leur reconnoissance.

M. Morand, fils d'un ancien Académicien, étoit né, pour ainsi dire, dans le sein de cette compagnie; il en avoit connu dès l'enfance le régime intérieur, & il l'aima toujours comme sa patrie. Sévèrement attaché à la règle, même dans les petites choses, ennemi des innovations, mais sans avoir l'humeur qui accompagne presque toujours cette disposition, & qui en trahit alors le motif, ceux mêmes dont il combattoit les opinions, respectoient la sincérité de son zèle & la pureté de ses intentions. Nous l'avons vu remplir, il y a peu d'années, les fonctions de directeur, avec ce mélange d'amour pour la règle & de condescendance pour ses confrères, que doit réunir le chef annuel d'une compagnie où il ne peut voir que des égaux; tandis qu'il savoit soutenir les intérêts de son corps avec cette dignité modeste

ſi convenable au repréſentant d'une Académie qui doit toute ſa conſidération à ſon utilité réelle, & au mérite perſonnel de ceux qui la compoſent.

La ſanté de M. Morand paroiſſoit nous promettre de conſerver encore long-temps un confrère qui nous étoit cher; mais il fut attaqué d'une péripneumonie maligne, le 9 août 1784, & il y ſuccomba le 13 du même mois, laiſſant une femme à laquelle il étoit uni par une amitié très-tendre, & dont il ne lui reſtoit pas d'enfans, & un frère, chanoine de la Sainte-Chapelle.





ÉLOGE
DE M. CASSINI.

CÉSAR-FRANÇOIS CASSINI DE THURY, noble Siennois, maître des comptes, directeur de l'Obſervatoire, de la Société royale de Londres, de l'Inſtitut de Bologne, des Académies de Berlin & de Munich, penſionnaire aſtronome de l'Académie des ſciences, naquit à Paris le 17 Juin 1714, de Jacques Caſſini & de Suſanne-Françoiſe Charpentier de Charmoi.

Quoique la famille de M. Caſſini, connue depuis pluſieurs ſiècles en Italie, fût comptée parmi les familles ſénatoriales de Sienne, dès le temps du cardinal Caſſini, archevêque de cette ville en 1426, & qu'il y ait eu un ſecond cardinal de ce nom dans la promotion de 1712, c'eſt aux ſciences qu'elle doit ſa principale illuſtration. Le nom de Dominique Caſſini ſera long-temps cité parmi ceux dont s'honore un ſiècle fécond en hommes de génie; & ce qui eſt ſans exemple dans notre hiſtoire, M. le comte de Caſſini, notre confrère, fils de M. de Thury, eſt le quatrième académicien en ligne directe de cette famille, qui, depuis 1669, a conſtamment & ſans interruption donné des aſtronomes à l'Académie.

Le nom de Caſſini impoſoit, pour ainſi dire, au jeune Thury l'obligation d'étudier l'aſtronomie, & de ſe rendre digne de ſuccéder à ſon père à l'Obſervatoire comme parmi nous. M. Maraldi voulut ſe charger de diriger les premières études du petit-fils de Dominique Caſſini dont il étoit l'élève & le neveu, ſes ſoins, aidés des heureuſes diſpoſitions de M. de Thury, eurent un ſi heureux ſuccès,

qu'ayant à peine dix ans le jeune Aſtronome calcula les phaſes de l'éclipſe totale de Soleil, qu'on attendoit pour l'année 1727. En 1735, il fut reçu à l'Académie comme adjoint ſurnuméraire à l'âge de vingt-un ans: ſon père y avoit été admis beaucoup plus jeune, à dix-ſept ans ſeulement. On peut croire que dans ces adoptions, en quelque ſorte prématurées, l'Académie avoit compté pour quelque choſe le nom de Caſſini, & que dans l'empire des ſciences, comme ailleurs, une naiſſance illuſtre peut aplanir tous les chemins; mais ſi, dans cette carrière, ce mérite étranger aide quelquefois au talent, du moins il ne peut diſpenſer d'en avoir; & il ſeroit à deſirer qu'on pût en dire autant des avantages que la naiſſance procure dans d'autres états.

Les premiers travaux de M. Caſſini eurent pour objet la vérification de la méridienne qui paſſe par l'Obſervatoire. Il y travailla d'abord avec ſon père, & enſuite avec M. l'abbé de la Caille. Cette méridienne avoit été tracée par Dominique Caſſini; ſon fils & Picard avoient eu part à ce travail, mais les valeurs qu'ils avoient trouvées pour les *degrés* du méridien en France & pour le degré de longitude pris à Paris, tendoient à faire regarder la terre comme alongée, tandis que les expériences du pendule, la meſure d'un degré de latitude, faite près du pôle, conduiſoient à ſuppoſer à notre globe une forme aplatie, la ſeule qui pût s'accorder avec la théorie Newtonienne. Il paroiſſoit donc néceſſaire de vérifier de nouveau les anciennes meſures, & ſur-tout celle de la baſe, quoiqu'exécutée par Picard, puiſque toutes les autres en dépendoient. M.rs Caſſini s'en chargèrent, y découvrirent une erreur de quelques toiſes; & Jacques Caſſini, après avoir long-temps combattu contre l'aplatiſſement de la terre, eut le mérite d'avoir contribué à détruire la ſeule objection raiſonnable qu'on pût oppoſer à cette opinion.

En même temps que les aſtronomes vérifioient, corrigeoient toutes ces meſures, ils prolongeoient à l'orient & à l'occident de Paris la perpendiculaire à la méridienne.

On avoit aussi formé le projet de faire une description géométrique de la France. Le jeune Cassini s'occupa de ces travaux avec toute l'activité de son âge. Il conçut le plan plus étendu de ne pas borner cette description à la détermination des points des grands triangles qui devoient embrasser toute la surface du royaume, mais de lever le plan topographique de la France entière, de déterminer par ce moyen la distance de tous les lieux à la méridienne de Paris & à la perpendiculaire à cette méridienne. Jamais on n'avoit formé en géographie une entreprise plus vaste & d'une utilité plus générale. C'étoit en effet un préliminaire absolument nécessaire pour parvenir à une connoissance approfondie & détaillée de la France. On ne se bornoit pas à marquer sur la carte tous les objets, même jusqu'à des chaumières isolées ; on devoit y figurer les terreins, autant qu'il étoit possible de le faire, par de simples hachures. Ces cartes, ainsi exécutées, devenoient une espèce de cadre dans lequel toutes les connoissances particulières, tous les détails sur l'élévation des terreins, la pente & la direction des eaux, sur l'histoire naturelle, sur les productions de chaque pays, sur l'étendue des phénomènes de l'atmosphère, sur la population & l'histoire naturelle de l'homme, les limites même des coûtumes, des différentes administrations, des loix de finance ou de commerce, venoient se ranger dans un ordre méthodique qui permettoit d'en mieux saisir l'ensemble, d'en tirer des conclusions plus exactes. Cette base une fois donnée, si on se proposoit d'acquérir une idée générale & exacte de la France, ou d'une de ses provinces, la partie du travail la plus pénible, la plus dispendieuse, devoit se trouver toute préparée.

Une entreprise si utile, mais en même temps si difficile, exigeoit de la part du gouvernement des secours extraordinaires, & M. de Cassini en obtint sans peine.

Le feu Roi qui avoit appris la géographie, dans son enfance, du célèbre Guillaume de l'Isle, avoit conservé pour cette science un goût assez vif : d'ailleurs il n'en est point d'une utilité

utilité plus immédiate dans la plupart des opérations du gouvernement, & dont le besoin se fasse plus sentir à presque tous les instans. Elle a même encore l'avantage, non moins grand, de rendre plus facile l'acquisition de toutes les connoissances qui peuvent être nécessaires aux princes. Mais malgré l'intérêt constant que le Roi prenoit à cette entreprise, M. de Sechelles supprima les fonds que ses prédécesseurs avoient accordés. Le Roi, qui aimoit M. Cassini, voulut se charger de lui annoncer lui-même cette nouvelle fâcheuse. *Sire*, lui dit M. Cassini, *que Votre Majesté daigne dire seulement qu'Elle voit avec peine la suspension de cette entreprise & qu'Elle en desire la continuation, je me charge du reste.* Le Roi y consentit, mais en plaisantant M. Cassini sur l'inutilité de cette marque d'intérêt; car ce prince, après plus de trente ans de règne, ne connoissoit pas encore toute la force de l'influence que l'opinion du monarque a sur les courtisans.

Cependant M. Cassini forma le plan d'une compagnie qui se chargeroit de faire les avances, & qui, devenue propriétaire de l'entreprise, retireroit ses fonds sur la vente des cartes. Le mérite de rendre l'activité à un travail dont le Roi regrettoit la suspension, & l'avantage d'acquérir le droit de lui parler d'un objet qui lui étoit agréable, déterminèrent plusieurs courtisans à entrer dans cette compagnie; quelques citoyens se joignirent à eux dans la vue de contribuer au succès d'un ouvrage utile. L'entreprise se continua sous cette nouvelle forme, avec plus de rapidité & de méthode. Bientôt le gouvernement accorda quelques encouragemens; différentes provinces contribuèrent à la dépense, & M. Cassini a eu la consolation de voir terminer presque entièrement un travail si étendu, & d'en devoir à lui-même presque tout le succès.

Les points des triangles avoient été déterminés avec toute la précision à laquelle les progrès de la physique & ceux de l'art de construire les instrumens permettoient d'atteindre. Mais on avoit été obligé de partager entre un

grand nombre de coopérateurs le travail de lever l'intérieur de ces triangles; & malgré les moyens de vérification que M. Cassini s'étoit procurés, l'exactitude de toutes les cartes ne pouvoit être la même; les coopérateurs ne pouvoient avoir ni la même intelligence, ni le même zèle. On put s'apercevoir aussi que, dans la manière de représenter la forme des terreins, on n'avoit ni formé un plan général avec assez de soin, ni exécuté avec assez d'attention celui auquel on s'étoit arrêté; mais en convenant de ces défauts, on ne peut s'empêcher d'avouer que cette entreprise, la plus vaste qui ait été tentée en géographie, est en même temps celle dont l'exécution a été la plus exacte.

M. Cassini ne vouloit pas qu'elle fût bornée à la France; il profita de la guerre de 1741, pour étendre ses cartes à la Flandre, & vérifier la mesure du degré faite par Snellius. C'étoit la première que les occidentaux eussent osé tenter; & ce travail, joint à la découverte de la loi de la réfraction, avoit immortalisé avec justice le nom du savant Hollandois. Cette mesure étoit cependant très-fautive; l'erreur paroissoit de près de deux mille toises sur un degré, & il étoit curieux de savoir quelle en avoit pu être la cause. M. Cassini trouva qu'il falloit l'attribuer presque uniquement à l'erreur qui avoit été commise dans la détermination de la différence de latitude des deux points dont Snellius avoit mesuré la distance.

Il embrassa uniquement dans sa carte de Flandre, le terrein que les armées Françoises avoient occupé; & comme il le disoit lui-même, où s'arrêtèrent les conquêtes du Roi, là s'arrêtèrent les opérations de son astronome. Quelquefois il choisissoit pour sommet d'un de ses triangles le clocher, soit d'une ville assiégée, soit d'une place dont on préparoit le siége; & cette confiance dans la certitude du succès, étoit une manière de flatter les généraux ou le prince, à laquelle peut-être ils n'étoient pas insensibles.

En 1761, M. Cassini fit un voyage en Allemagne. Il avoit pour objet de prolonger jusqu'à Vienne la perpen-

diculaire à la méridienne de Paris, d'unir les triangles de la carte de France à des points pris en Allemagne, de préparer les moyens d'étendre à ce vaste pays le plan qu'on avoit suivi pour la France, & d'établir ainsi successivement pour toute l'Europe, une uniformité utile en elle-même, & glorieuse pour la nation qui avoit donné l'exemple.

L'empereur François, l'impératrice reine, les princes de la maison de Bavière, les margraves de Bareith & de Bade, les souverains ecclésiastiques de cette partie de l'empire, sentirent tous également l'utilité du projet de M. Cassini, tous s'empressèrent d'y concourir. Il étoit à Vienne, le 6 juin 1761, jour du passage de Vénus; le temps ne lui permit d'en observer que la sortie: cependant le Soleil paroissoit par intervalle, & M. Cassini eut la facilité de faire quelques observations, d'en expliquer l'objet, & d'en développer la méthode à l'archiduc Joseph, qui étoit venu de Laxembourg pour assister à cette observation. M. Cassini se rappeloit avec plaisir, dans ses dernières années, cette circonstance de sa vie. Ce souvenir sembloit lui faire contempler avec un intérêt plus vif les efforts heureux & soutenus de ce prince pour rendre à la patrie les hommes & les biens que d'antiques abus lui avoient enlevés, détruire les obstacles que les préjugés & l'ignorance avoient opposés aux progrès de l'industrie & des lumières, à l'instruction comme au bonheur du peuple, & rétablir les habitans de ses vastes états dans ces droits naturels de l'homme, dont l'intolérance & la tyrannie féodale les avoient privés trop long-temps. Enfin, M. Cassini, toujours occupé de la perfection de son grand ouvrage, profita de la dernière paix pour proposer de joindre à quelques points pris sur la côte d'Angleterre, ceux qui avoient été déterminés sur celle de France, & lier ainsi sa carte générale de ce royaume à la carte des îles Britanniques, de même qu'il l'avoit déjà liée à celles des Pays-bas & de l'Allemagne. Le roi d'Angleterre a bien voulu approuver ce plan.

Si l'on se représente les détails immenses qu'exigeoit la

direction d'une telle entreprise, si on songe aux voyages longs & souvent pénibles, qui se multiplioient d'autant plus pour M. Cassini, qu'il ne s'étoit reposé sur personne des déterminations les plus importantes; si on observe enfin qu'un travail de ce genre, souvent presque purement mécanique & toujours minutieux, fatigue, dégoûte, & semble ne devoir laisser à l'esprit aucune activité pour d'autres travaux, on sera tenté de croire que la direction de la carte de France a dû occuper toute la vie de M. Cassini, & on jugera en même temps qu'en se bornant à ce seul ouvrage, il auroit encore assez bien rempli sa carrière, & mérité la reconnoissance de son pays comme celle des savans. Mais il fut de plus un astronome très-laborieux; & en voyant la liste de ses travaux astronomiques, on sera encore tenté de croire qu'il s'y est appliqué tout entier.

M. Cassini a publié, dans nos Mémoires, une suite presque complète de ces observations que le ciel présente chaque année, dont chacune prise en elle-même est sans doute peu utile aux progrès de la science, & n'exige, pour être bien faite, que de l'attention & l'habitude d'observer, mais dont l'ensemble est nécessaire à la perfection des théories astronomiques, ou peut servir de base à des théories nouvelles; (c'étoit un devoir que lui imposoit le titre de directeur de l'Observatoire).

Il a traité de plus, séparément, plusieurs des questions fondamentales de l'astronomie. L'on trouve dans les Mémoires qu'il a donnés, des recherches sur la parallaxe du Soleil, de la Lune, de Vénus & de Mars; un travail suivi sur les réfractions astronomiques & sur le changement que la température produit dans la quantité ou dans la loi de la réfraction; un grand nombre d'observations sur l'obliquité de l'écliptique, sur la loi des variations qu'elle éprouve; & un examen des différentes méthodes d'observer les hauteurs solsticiales, d'après lequel il préfère celle qui consiste à prendre la distance du Soleil à des étoiles fixes dans lesquelles on ne reconnoît point de mouvement propre qui

puiſſe nuire à l'exactitude des déterminations, ou pour leſquelles la loi de ces mouvemens eſt bien connue. Pendant plus de cinquante ans, il a cultivé l'aſtronomie dans un temps que la meſure des degrés du méridien, deux paſſages de Vénus ſur le Soleil, ſi importans pour nous en apprendre la diſtance, une diſparition de l'anneau de Saturne, l'application du calcul aux perturbations des planètes & aux mouvemens de l'axe terreſtre, l'introduction des méthodes analytiques dans les queſtions aſtronomiques, la découverte de plus de comètes qu'on n'en avoit obſervé depuis l'origine des ſciences, enfin celle d'une nouvelle planète, rendent une des époques les plus brillantes de l'aſtronomie, qui, par l'invention des lunettes acromatiques & de pluſieurs inſtrumens, acquéroit dans le même temps des moyens nouveaux d'étendre les obſervations & de les faire avec plus d'exactitude; & il eſt peu de ces objets ſi intéreſſans pour cette ſcience, ſur leſquels M. Caſſini n'ait été utile par ſes obſervations ou par ſes recherches.

Il étoit d'un caractère franc & ouvert; ſon ame paroiſſoit inacceſſible à la haine; mais il étoit très-ſenſible à l'amitié, & ſon penchant ſembloit le porter de préférence vers les hommes dont il ſe ſeroit éloigné s'il avoit pu connoître ce ſentiment pénible que la ſupériorité des talens ou de la réputation réveille trop ſouvent. Il jouiſſoit du ſuccès des autres, non avec cette fierté noble d'un homme qui compte ſur ceux qu'il mérite, ou qui a le courage de s'en paſſer, mais par un ſentiment naturel, par l'effet d'un premier mouvement & ſans aucun retour ſur lui-même. L'exiſtence d'un nouveau talent, une nouvelle couronne qu'un de ſes confrères ajoutoit à ſa gloire, étoit pour lui une jouiſſance nouvelle, & le plaiſir naïf & pur qu'il éprouvoit alors, ſe peignoit dans ſes regards & dans ſa contenance.

M. Caſſini eut des liaiſons dans différentes claſſes de la ſociété, & ne fut déplacé dans aucune. Eſtimé des magiſtrats ſes confrères, par ſa probité, il étoit cher à ſes confrères Académiciens par ſa ſimplicité & ſa douceur; quoiqu'admis

dans la familiarité des Grands, il sut conserver leur estime. On lui a reproché d'avoir trop cherché, peut-être, à s'approcher d'eux. En effet, l'espèce de domination qu'ils aiment à exercer sur les occupations, sur les sentimens même de ceux qu'ils nomment leurs amis, semble incompatible avec cette liberté & cette indépendance dont la perte enlève au talent la moitié de ses forces & de ses ressources. Plus la raison nous a convaincus de l'égalité primitive que la nature a mise entre les hommes, plus elle nous fait une loi d'éviter l'intimité de ceux que l'opinion a placés au-dessus de nous. Il est d'ailleurs difficile, en formant ces liaisons, d'échapper au soupçon de partager les motifs de vanité ou d'intérêt qui engagent les hommes ordinaires à en braver les inconvéniens & le danger; mais du moins elles n'ont valu à M. Cassini ni fortune, ni places, ni titres, & cette exception à l'usage est trop rare pour qu'il puisse avoir besoin d'apologie.

On doit sans doute respecter le philosophe qui sait éviter ces liaisons à la fois si séduisantes & si dangereuses; cependant, si tous ceux qui ont des lumières avoient le courage & la prudence de s'y refuser, ce seroit un malheur & pour les sciences & pour les grands eux-mêmes, & sur-tout pour ceux sur le sort desquels les grands ont de l'influence. Il ne faut donc pas blâmer les savans qui imiteroient, à cet égard, M. Cassini, pourvu toutefois qu'ils n'oublient point que pour être exempts de tout reproche, ils doivent imiter aussi son désintéressement & sa modestie.

M. Cassini étoit né avec une constitution très-forte; ses travaux pour la géographie, l'avoient obligé à des voyages pénibles; gravissant des montages escarpées où il falloit braver, dans une même saison, tantôt un soleil brûlant, tantôt le froid de leurs neiges éternelles, passant souvent des nuits en plein air ou dans quelques chaumières écartées, obligé de s'y contenter d'une nourriture grossière ou malsaine, son tempérament avoit résisté à ces fatigues, & sem-

bloit avoir acquis de nouvelles forces. Mais il fut attaqué d'une rétention d'urine dont les ſuites le condamnèrent, les douze dernières années de ſa vie, à des incommodités habituelles & douloureuſes, ſouvent même à des ſouffrances cruelles. Il ſupporta cet état avec ce courage calme d'une ame forte, unie à des organes vigoureux: ſon activité, ſa douceur, ſa gaieté, n'en étoient pas altérées.

Cette diſpoſition de l'ame eſt un des meilleurs moyens de combattre les maladies & d'y réſiſter; auſſi M. Caſſini étoit-il reſté dans un état qui laiſſoit l'eſpérance de le conſerver encore long-temps, lorſqu'au mois d'août 1784, il fut attaqué de la petite vérole, à laquelle il ſuccomba le 4 ſeptembre.

Il a laiſſé une fille & un fils, M. le comte de Caſſini, membre de cette compagnie, & directeur de l'Obſervatoire, comme ſes ancêtres, qui, en recueillant cette partie ſi noble de leur héritage, a auſſi ſuccédé à l'attachement de l'Académie pour un nom ſi cher aux ſciences.





ÉLOGE

DE M. LE COMTE DE MILLY.

NICOLAS-CHRISTIERN DE THY, comte de Milly, des académies de Madrid & de Harlem, associé-libre de celle des Sciences, naquit le 18 juin 1728.

La famille de M. le comte de Milly est établie dans le Beaujolois, depuis plus de quatre siècles, & la conformité du nom & des armes semble prouver qu'elle est une branche de l'ancienne maison de Thy, originaire de l'Auxois, connue dès le commencement du onzième siècle, & également illustrée par ses alliances & par les grandes charges qu'elle a occupées à la cour des ducs de Bourgogne de la première race.

M. le comte de Milly suivit, comme ses ancêtres, le parti des armes. N'ayant qu'une fortune médiocre & point de parens à la cour, il ne pouvoit porter ses espérances au-dessus de l'avancement tardif & borné que l'on peut attendre du temps & des services; mais il croyoit remplir un devoir. Il avoit peu d'ambition, & il trouvoit des ressources contre le dégoût & contre l'ennui, dans son penchant pour les plaisirs de la jeunesse, & dans un goût plus vif encore pour les études sérieuses.

Dans la guerre de 1741, il se trouva aux batailles de Laufeld & de Raucoux; & dans la guerre de 1756, à celles de Rosbac, de Crevelt & de Minden. L'année qui suivit cette dernière battaille, il entra au service de M. le duc de Wirtemberg, allié de la France; &, en moins d'un an, il devint colonel, adjudant-général, chambellan & chevalier de

l'ordre de l'Aigle-rouge. Mais ce qui fut plus important pour le bonheur du reste de sa vie, la fin de la guerre & le loisir dont jouissent si paisiblement dans ses cours ceux que l'intrigue n'y occupe pas, permirent à son amour pour les sciences de se développer & de s'exercer. Le goût des arts & le desir de servir l'humanité le conduisirent à l'étude de la chimie. Lorsqu'il revint dans sa patrie, en 1771, il y rapporta un ouvrage très-détaillé, sur les procédés employés dans la fabrication de la porcelaine de Saxe; & l'Académie jugea cet ouvrage digne d'entrer dans sa collection des arts.

Il obtint, à cette époque, l'agrément d'une charge de lieutenant des gardes-suisses de Monsieur, & le brevet de colonel. Depuis plus de dix ans il avoit mérité & obtenu la croix de Saint-Louis; il se crut permis alors d'abandonner la carrière militaire, pour se livrer uniquement aux sciences, & quelques années après, une place d'associé-libre dans l'Académie fut la récompense de ce dévouement.

On ne doit pas attendre d'un homme qui, depuis quatorze ans jusqu'à plus de quarante, a vécu dans les garnisons, dans les camps & dans les cours; ces grands ouvrages, qui ne peuvent être que le fruit d'un travail constant & suivi, & qui exigent qu'on soit accoutumé dès l'enfance à se rendre maître de son temps, à dominer ses passions & ses goûts, à déployer toutes ses forces. Aussi lorsque M. de Milly a donné ses recherches sur l'activité des dissolvans, auxquels on imprime un mouvement rapide & continu; sur l'application de cette idée aux effets médicinaux des bains; sur l'acidité de l'air fixe, alors peu connue & même contestée; sur la nature du fluide aériforme qui se dégage des pores du corps humain lorsqu'il est plongé dans l'eau; sur l'emploi d'une chaleur graduée &, soutenue dans l'analyse animale & végétale; sur les couleurs que les préparations de platine peuvent fournir à la peinture; enfin sur la revification des chaux métalliques par l'électricité, il eût été injuste de se plaindre qu'il se bornât à présenter de simples essais, &

on a dû applaudir aux vues ingénieuses ou utiles que ces essais renferment.

Nous devons à M. le comte de Milly l'art du poêlier. Cet art est proprement celui d'employer toute la chaleur que peut donner une certaine masse de combustible à échauffer l'air d'un appartement ou d'une maison, & d'obtenir dans toutes les parties d'une même pièce une chaleur uniforme que l'on puisse graduer facilement.

La nécessité l'a fait naître dans les pays du Nord, dans les forêts de l'Allemagne. C'est-là que M. de Milly l'avoit observé, & il avoit senti combien on devoit desirer de le voir se répandre & se perfectionner dans les climats plus tempérés, y rendre les habitations plus saines & plus commodes, & donner en même temps les moyens d'épargner une denrée qui devient d'autant plus précieuse & plus rare, que les pays sont & plus peuplés & mieux cultivés. Mais malheureusement les hommes opulens ont encore plus de vanité que de mollesse, & préfèrent l'agrément ou la magnificence à la commodité réelle; tandis que ceux qui auroient le plus besoin d'épargner sur leur dépense, ne sont pas assez riches pour songer aux moyens d'être économes.

Ce n'est pas que dans ces climats plus doux, la rareté réelle ou apparente des combustibles ne se soit fait sentir plus d'une fois; mais au lieu de chercher dans la physique des moyens, ou de ménager ces substances, ou d'en augmenter la production, on a cru, par une erreur que l'habitude doit en quelque sorte rendre excusable, pouvoir réparer, par des règlemens, un mal dont la multiplicité des règlemens inutiles étoit déjà la principale cause.

La chimie n'a été pendant long-temps qu'un recueil de procédés presque tous secrets, ou qui du moins avoient commencé par l'être. Il n'est donc pas étonnant que ceux qui cultivent cette science soient plus disposés que les autres savans à croire qu'il en existe encore; à s'occuper de pénétrer ceux qu'on annonce, à donner quelque confiance aux

hommes qui leur promettent de les initier dans ces mystères. M. le comte de Milly partagea cette foiblesse avec des chimistes très-célèbres. Mais heureusement ce goût ne lui avoit pas fait perdre celui des recherches vraiment scientifiques, c'étoit pour lui une diversion à des travaux plus sérieux, un véritable amusement beaucoup moins frivole que la plupart de ceux auxquels se livrent les hommes même qui passent pour les plus sages auprès de la multitude.

M. le Comte de Milly, avide de connoissances, & prompt à embrasser tous les moyens d'en acquérir, avoit voulu être admis dans toutes les sociétés où il pouvoit espérer de trouver quelques lumières, & sur-tout dans celles qui, faisant profession d'avoir une doctrine secrète, excitent une curiosité plus vive. Il croyoit d'ailleurs ces associations utiles en général pour réunir entr'eux les hommes qui ont secoué le joug des préjugés populaires, & qui, s'ils manquent d'un point de réunion, sont exposés à se trouver sans force contre les troupes plus ou moins nombreuses que l'erreur rassemble sous cent drapeaux différens.

Il s'étoit attaché particulièrement à cette société, dont l'origine est inconnue, ou du moins obscurcie par des fables, qui, répandue dans l'Europe depuis plusieurs siècles, tantôt ignorée & tantôt l'objet d'une curiosité inquiète, a essuyé souvent des persécutions sans avoir jamais mérité de reproches; qui, en cherchant à cacher le véritable esprit de son institution sous un langage bizarre, & sous une foule de cérémonies burlesques, a cependant toujours compté des sages parmi ses membres; qui, enfin, ne se faisant connoître au-dehors que par des actions de bienfaisance, eût mérité peut-être que la calomnie respectât ses mystères. S'il arrive un jour qu'ils soient dévoilés, on n'y trouvera sans doute que les précautions nécessaires, dans les siècles d'ignorance, à des hommes réunis par le besoin d'exercer librement leur raison. Eh! qui ponrroit encore soupçonner l'innocence de ces mystères, lorsqu'on voit parmi les

noms qu'unissoit cette confraternité, celui de ce jeune prince, le seul qui depuis les temps historiques ait sacrifié sa vie pour l'humanité, tandis que tant d'autres ne l'ont immolée qu'à l'ambition ou à la gloire *!

M. le comte de Milly vivoit dans le monde, & il y étoit aimé; doux, complaisant, facile, ayant même autant de galanterie qu'on peut en avoir sans être frivole, c'étoit seulement dans la société des savans qu'il laissoit apercevoir quelques traces d'une susceptibilité trés-délicate; mais il avoit assez d'empire sur lui même pour revenir sans peine, & soumettre à la raison les foiblesses d'un amour-propre d'autant plus sensible, mais aussi d'autant plus excusable, que, dans le peu de temps qu'il avoit consacré aux sciences, il n'avoit pu acquérir ces titres éclatans qui élèvent au-dessus de l'opinion une ame avide de renommée. Aussi dans la seule discussion qu'il ait eue avec ses confrères, lorsqu'il en vit plusieurs combattre ce qu'il avoit avancé sur la revivification des chaux métalliques par l'électricité, il parut d'abord très-sensible à cette contradiction, mais il ne fit aucun effort pour soutenir son opinion, ne répondit pas aux objections, & laissa tranquillement à d'autres phisiciens le soin de le défendre.

Né avec un tempérament robuste, & s'étant assujetti au régime pithagoricien dans toute sa rigueur, M. le comte de Milly paroissoit devoir se promettre une longue carrière; cependant nous l'avons perdu le 17 Septembre 1784, à l'âge de 56 ans seulement. Il avoit appris ou découvert plusieurs remèdes particuliers; & comme il ne se permettoit pas de les donner à d'autres sans les avoir éprouvés sur lui-même; on a prétendu que ces essais avoit altéré sa constitution. L'enthousiasme qu'il montroit pour ces remèdes, dans les premiers momens, a donné lieu à cette opinion; mais il savoit bientôt les juger de sang-froid, & cette

* Le prince Léopold de Brunswick.

première chaleur n'étoit qu'une preuve de plus de sa bonne foi & de son zèle pour la conservation des hommes.

Si ceux qui l'ont peu connu étoient tentés de lui faire quelque reproche sur cet enthousiasme, l'estime dont il jouissoit parmi nous suffiroit pour en laver sa mémoire. On sait que, depuis son institution, l'Académie n'a cessé d'opposer un zèle infatigable à toutes ces merveilles si sagement couvertes par leurs premiers inventeurs, des voiles du mystère, & qu'elle a regardé constamment le soin de s'élever contre elles & d'en détromper le public, comme un de ses premiers devoirs, comme un moyen de servir à la fois les sciences & l'humanité.



MÉMOIRES
DE
MATHÉMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE.

MÉMOIRES



MÉMOIRES
DE
MATHÉMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE,
TIRÉS DES REGISTRES
de l'Académie Royale des Sciences.
Année M. DCCLXXXIV.

MÉMOIRE
Sur les Inégalités séculaires des Planètes & des Satellites.

Par M. DE LA PLACE.

I.

LES Planètes sont assujetties, en vertu de leur action mutuelle, à des inégalités qui troublent l'ellipticité de leurs orbites. Les unes sont périodiques & dépendent de

la position de ces corps, soit entr'eux, soit à l'égard de leurs aphélies; elles sont peu considérables relativement à l'équation du centre, & se rétablissent d'elles-mêmes, après un petit nombre d'années; les autres altèrent les élémens des orbites par des nuances presque insensibles à chaque révolution des Planètes; mais ces altérations, en s'accumulant sans cesse, finissent par changer entièrement la nature & la position des orbites: comme la suite des siècles les rend très-remarquables, on les a nommées *inégalités séculaires.*

On peut considérer les inégalités périodiques, comme autant d'oscillations très-petites que fait chaque Planète autour d'un point en mouvement sur l'ellipse qu'elle décriroit par l'action seule du Soleil; & si l'on imagine que les élémens de cette ellipse subissent en même-temps des variations très-lentes, & dont les périodes embrassent un grand nombre de siècles, on aura une juste idée des inégalités séculaires.

Parmi ces inégalités, la plus interessante est celle qui peut altérer les moyens mouvemens des Planètes. La plupart des Astronomes ont admis une équation séculaire proportionnelle aux carrés des temps, dans les moyens mouvemens de Jupiter & de Saturne. Les Géomètres qui se sont occupés avec le plus de succès de la théorie de ces Planètes, M.rs Euler & de la Grange avoient cru en trouver la cause dans l'action mutuelle de ces deux corps; mais leurs résultats différoient tellement entr'eux, qu'il y avoit lieu d'y soupçonner quelque erreur; c'est ce qui me détermina à reprendre cette matière, & à la traiter avec tout le soin que mérite son importance. En portant la précision jusqu'aux troisièmes puissances inclusivement des excentricités & des inclinaisons des orbites, je trouvai que la théorie ne donne aucunes inégalités séculaires dans les moyens mouvemens & dans les moyennes distances des Planètes au Soleil; d'où je conclus que ces inégalités sont nulles ou du moins insensibles, depuis l'époque des observations les plus anciennes jusqu'à nos jours.

Ce résultat suffit aux besoins de l'Astronomie dont les

plus anciennes obſervations qui nous ſoient parvenues avec quelque vraiſemblance, ne remontent pas au-de-là de cinq mille ans. M. de la Grange l'a étendu depuis à un temps illimité, en faiſant voir par une analyſe ingénieuſe & ſimple, que les moyennes diſtances des Planètes au Soleil ſont immuables, & leurs moyens mouvemens uniformes, ce qui eſt également vrai pour les Satellites, puiſqu'ils forment autour de leurs Planètes principales, des ſyſtèmes ſemblables à celui des Planètes autour du Soleil. Ainſi les Planètes & les Satellites conſervent toujours les mêmes diſtances moyennes aux foyers des forces principales qui les animent, du moins lorſque l'on n'a égard qu'à leur action mutuelle, & lorſque l'on ſuppoſe leurs moyens mouvemens incommenſurables entr'eux, comme cela exiſte pour les Planètes de notre ſyſtème.

Il eſt cependant impoſſible de ne pas reconnoître des variations très-ſenſibles dans les révolutions de Jupiter & de Saturne. Si l'on compare entr'elles, les obſervations de ces deux Planètes, faites depuis le renouvellement de l'Aſtronomie; on trouve conſtamment le mouvement de Jupiter plus rapide, & celui de Saturne plus lent, que par la comparaiſon des obſervations modernes avec les anciennes. Halley, dans ſes Tables de Jupiter, emploie une équation ſéculaire, additive au moyen mouvement, proportionnelle au carré du temps, & de $3^d\ 49'$, en deux mille ans. Cela ſuppoſe qu'en comparant les obſervations modernes entr'elles, il a trouvé le mouvement annuel de Jupiter, plus grand de $6'',9$, que par leur comparaiſon avec les anciennes obſervations. Ce grand Aſtronome emploie pareillement dans ſes Tables de Saturne, une équation ſéculaire, ſouſtractive du moyen mouvement, & de $9^d\ 16'$, en deux mille ans; ce qui indique que la comparaiſon des obſervations modernes entr'elles, lui a donné le mouvement annuel de Saturne, moindre de $16'',7$, que celui qui réſulte de leur comparaiſon avec les anciennes. En effet, les oppoſitions de Saturne de 1594, 1595,

1596 & 1597, comparées à celles de 1713, 1714, 1715, 1716 & 1717, donnent un mouvement annuel plus petit de 16″, que les oppositions de 1714 & de 1715, comparées à celle de l'an 228 avant notre Ere.

Dans l'impossibilité d'expliquer ces variations par l'action seule des Planètes, je soupçonnai d'abord que l'action des Comètes en étoit la cause ; mais en les considérant ensuite avec attention, leur marche me parut s'accorder si bien avec le résultat de l'action des Planètes, que j'abandonnai cette hypothèse. Une propriété générale de l'action des Planètes entr'elles, est que si l'on n'a égard qu'aux quantités qui ont de très-longues périodes, la somme des masses de chaque Planète, divisées respectivement par les grands axes de leurs orbites, reste toujours à très-peu-près constante ; d'où il suit que les carrés des moyens mouvemens étant réciproques aux cubes de ces axes, si le mouvement de Saturne se rallentit par l'action de Jupiter, celui de Jupiter doit s'accélérer par l'action de Saturne, ce qui est conforme à ce que l'on observe. De plus, en supposant avec M. de la Grange, que la masse du Soleil étant l'unité, celle de Jupiter est $\frac{1}{1067,195}$, & celle de Saturne est $\frac{1}{3358,40}$; on trouve que le retardement de Saturne doit être à l'accélération de Jupiter, à très-peu-près, comme 7 est à 3 ; ainsi l'équation séculaire de Saturne étant supposée de $9^d\ 16'$, celle de Jupiter doit être de $3^d\ 58'$, ce qui ne diffère que de 9 minutes du résultat de Halley. Il est donc fort probable que les variations observées dans les mouvemens de Jupiter & de Saturne, sont un effet de leur action mutuelle ; & puisqu'il est constant que cette action ne peut y produire aucunes inégalités, soit constamment croissantes, soit périodiques, mais d'une période très-longue & indépendante de la situation de ces Planètes, & qu'elle n'y cause que des inégalités dépendantes de leur configuration entre elles ;

il eſt naturel de penſer qu'il exiſte dans leur théorie, une inégalité conſidérable de ce genre, dont la période eſt fort longue, & d'où réſultent ces variations.

En examinant les circonſtances du mouvement de Jupiter & de Saturne, on aperçoit aiſément que leurs moyens mouvemens approchent beaucoup d'être commenſurables, & que cinq fois le moyen mouvement de Saturne eſt à très-peu-près égal à deux fois celui de Jupiter; d'où j'ai conclu que les termes qui, dans les équations différentielles du mouvement de ces Planètes, ont pour argument, cinq fois la longitude moyenne de Saturne, moins deux fois celle de Jupiter, pouvoient devenir ſenſibles par les intégrations, quoique multipliés par les cubes & les produits de trois dimenſions des excentricités & des inclinaiſons des orbites. J'ai regardé conſéquemment ces inégalités, comme une cauſe très-vraiſemblable des variations obſervées dans les mouvemens de Jupiter & de Saturne. La probabilité de cette cauſe & l'importance de cet objet, m'ont déterminé à entreprendre le calcul long & pénible, néceſſaire pour m'en aſſurer. Le réſultat de ce calcul a pleinement confirmé ma conjecture, en me faiſant voir, 1.° qu'il exiſte dans la théorie de Saturne, une grande équation d'environ 47', dont la période eſt à peu-près de huit cents ſoixante-dix-ſept ans, & dépend de cinq fois le moyen mouvement de Saturne, moins deux fois celui de Jupiter; 2.° que dans la théorie de Jupiter, il exiſte une équation d'un ſigne contraire, d'environ 20', & dont la période eſt la même.

Si l'on nomme nt le moyen mouvement ſyderal de Jupiter, depuis 1700; $n't$ celui de Saturne: je trouve qu'en n'ayant égard qu'aux inégalités précédentes, la longitude comptée de l'équinoxe de 1700, eſt pour Jupiter

$$nt + \epsilon + 20'.\text{ſin.}(5n't - 2nt + 49^d\, 8'\, 40''),$$

& que pour Saturne elle eſt

$$n't + \epsilon' - 46'\, 50''.\text{ſin.}(5n't - 2nt + 49^d\, 8'\, 40'').$$

ϵ & ϵ' étant deux conſtantes qui dépendent de la longitude des deux Planètes au commencement de 1700.

J'ai déterminé ces valeurs d'après les élémens des Tables de Halley, & en adoptant les déterminations précédentes des maſſes de Jupiter & de Saturne; j'ai ſeulement augmenté le mouvement annuel de Saturne donné par ces Tables, de 16",7, & j'ai diminué celui de Jupiter de 6",9, pour ramener ces mouvemens à ceux que Halley auroit trouvés par la comparaiſon des obſervations modernes avec les anciennes. Les coéfficiens numériques de ces valeurs ceſſent d'avoir lieu après un temps conſidérable, à cauſe de la variabilité des élémens des orbites; mais ils peuvent ſervir ſans erreur ſenſible depuis Tycho juſqu'à nous, ce qui ſuffit pour la comparaiſon des obſervations modernes: il eſt facile d'ailleurs de les étendre à un temps quelconque. On peut obſerver que le coéfficient relatif au mouvement de Jupiter, a un ſigne contraire à celui du coéfficient de Saturne, & qu'il eſt à ce dernier, à très-peu-près, dans le rapport de 3 à 7.

Si l'on compare les formules précédentes aux obſervations, on trouve entre les unes & les autres un accord très-ſatisfaiſant, & qui fournit une nouvelle preuve de l'admirable théorie de la peſanteur univerſelle. Ainſi, par exemple, l'oppoſition de Saturne de l'an 228 avant notre Ere, comparée à celles de 1714 & de 1715, doit donner, à peu-près, le moyen mouvement de Saturne, parce que l'inégalité précédente eſt peu ſenſible dans le grand intervalle qui ſépare ces oppoſitions; mais en comparant l'oppoſition de 1595 avec celle de 1715, le mouvement annuel de Saturne doit, ſuivant nos formules, paroître plus petit que le véritable, de 16",8; les obſervations donnent 16"; l'imperfection des obſervations du ſeizième ſiècle ne permet pas un plus parfait accord. Le mouvement annuel de Saturne doit donc paroître maintenant ſe ralentir de 16 à 17"; & comme, par les formules précédentes, l'accélération apparente de Jupiter eſt au ralentiſſement apparent de Saturne, dans le rapport de 3 à 7;

le mouvement annuel de Jupiter doit paroître s'accélérer d'environ 7", ce qui est entièrement conforme aux déterminations de Halley. Ces deux Phénomènes ont été à leur *maximum* vers 1580; depuis cette époque, les moyens mouvemens apparens se sont rapprochés sans cesse, des véritables moyens mouvemens.

M. Lambert a publié dans les Mémoires de Berlin pour l'année 1773, un travail intéressant sur les inégalités de Jupiter & de Saturne. Il a cherché à déterminer empyriquement la loi des erreurs des Tables de Hallei, & il a trouvé qu'il falloit corriger les moyens mouvemens des Tables de Saturne, en leur ajoutant, à partir de 1640, une équation séculaire proportionnelle au carré des temps, & de 6',5 pour le premier siècle; & comme Hallei emploie pour cette Planète, une équation séculaire soustractive du moyen mouvement, & de 1',4 pour le premier siècle; il est clair que la correction de M. Lambert revient à ajouter depuis 1640, au moyen mouvement de Saturne, supposé uniforme, une équation séculaire de 5',1 pour le premier siècle. Cet illustre Géomètre applique pareillement aux mouvemens des Tables de Jupiter, une équation séculaire soustractive, & de 3',2 pour le premier siècle, à partir de 1657. Ces corrections ont été publiées dans le second volume du recueil des Tables astronomiques de l'Académie de Berlin: elles ont une marche contraire à celle des équations séculaires de Halley, & d'ailleurs elles sont incompatibles avec les observations anciennes; mais les Savans Éditeurs de ces Tables, observent « que selon toute apparence, l'équation empyrique de M. Lambert n'augmente pas toujours dans « le rapport des carrés des temps; car il semble qu'elle « varie, que ces variations sont périodiques & qu'il faudra « une longue suite d'années pour en découvrir la loi; par « conséquent cette équation ne servira pour les temps à venir, « que jusqu'à ce qu'on puisse déterminer par les observations « qu'on fera dans la suite, quelle est sa propriété ».

Si l'on transporte à l'époque de 1640, la formule

précédente relative à Saturne, & que l'on en réduise le sinus dans une suite ordonnée par rapport aux puissances du temps écoulé depuis cette époque; on trouve que le terme proportionnel au carré du temps est positif & de 5′, 0 pour le premier siècle, ce qui s'accorde quant au signe, avec le résultat de M. Lambert, & ce qui n'en diffère que de 0′,1 pour la quantité. La formule relative à Jupiter, transportée à l'époque de 1657, & réduite en série, donne pour le terme proportionnel au carré du temps, une quantité négative & de 2′,7 pour le premier siècle, ce qui s'accorde quant au signe, avec le résultat de M. Lambert, & ce qui n'en diffère que de 0′,5 pour la quantité. Il n'est donc pas douteux que la vraie loi de l'équation empyrique de cet Auteur, ne soit renfermée dans nos formules, & il est assez remarquable qu'il ait approché aussi près des résultats de la théorie, par la comparaison seule de cent douze ans d'observations. Au reste la réduction des sinus en série, en rejetant les puissances du temps supérieures au carré, ne peut être employée que dans un intervalle de soixante ans.

Les expressions de la longitude de Jupiter & de Saturne, renferment encore des termes très-sensibles, qui coincideroient avec les termes dûs au mouvement elliptique, si l'on avoit exactement $5\,n' = 2\,n$.

Ces termes sont pour Jupiter

$$2' \, 39''. \text{sin.} \,(3\,nt - 5\,n't - 41^d \, 56')$$
$$+ \, 58''. \text{sin.} \,(5\,n't - nt - 34^d \, 31' \, 33''),$$

& pour Saturne,

$$- \, 13' \, 16''. \text{sin.} \,(2\,nt - 4\,n't - 2^d \, 27' \, 4'')$$
$$- \, 2' \, 40''. \text{sin.} \,(6\,n't - 2\,nt - 60^d \, 30' \, 16'').$$

On peut les considérer comme le résultat de variations dans les excentricités des orbites & dans la position des absides, & dont la période est de huit cens soixante-dix-sept ans. Ils expliquent pourquoi dans le dernier siècle & dans celui-ci, l'accroissement de l'équation du centre de Jupiter

Jupiter, la diminution de celle de Saturne, & les mouvemens de leurs aphélies ont paru plus grands qu'ils n'ont dû l'être en vertu des seules inégalités séculaires.

Pour avoir la longitude vraie de Jupiter & de Saturne, il faut ajouter aux termes précédens, ceux qui appartiennent au mouvement elliptique, & ceux que produisent les perturbations, en ayant égard aux premières puissances des excentricités des orbites. Les Géomètres ont déjà considéré ces derniers termes; mais les différences que présentent leurs résultats, en rend la vérification indispensable. J'ai rempli cet objet dans une nouvelle théorie de ces deux Planètes, qui paroîtra dans le volume suivant de ces Mémoires. Il résulte de cette théorie, que toutes les oppositions anciennes & modernes de Jupiter & de Saturne, peuvent être représentées avec la précision dont elles sont susceptibles, au moyen des inégalités précédentes auxquelles il faut par conséquent attribuer les dérangemens singuliers observés dans le mouvement de Saturne, & dont on ignoroit les loix & la cause. Il auroit fallu plusieurs siècles d'observations suivies, pour déterminer empyriquement ces inégalités, à cause de la longueur de leur période; ainsi sur ce point, la théorie de la pesanteur a devancé l'observation.

Je reviens présentement à la Loi générale de l'uniformité des moyens mouvemens célestes. Ceux des trois premiers Satellites de Jupiter offrent un rapport remarquable, & qui peut donner lieu de craindre que cette loi ne soit pas observée à leur égard. La discussion de ce rapport, de la cause qui le produit, & de son influence sur les mouvemens des Satellites, m'a paru mériter l'attention des Géomètres & des Astronomes.

Les observations nous aprennent que le moyen mouvement du premier satellite de Jupiter, est environ deux fois plus grand que celui du second, qui lui-même est à-peu-près le double de celui du troisième satellite; & la théorie de la pesanteur universelle fait voir que ces rapports sont la source des principales inégalités de ces Astres. Il suit

de-là que la différence des moyens mouvemens du premier & du second Satellite, est égale à deux fois la différence des moyens mouvemens du second & du troisième; mais ce rapport est incomparablement plus exact que les précédens, & les moyens mouvemens des Tables en approchent tellement, qu'il faut un très-long intervalle pour que la petite quantité dont elles s'en éloignent, puisse devenir sensible. De-là naissent plusieurs phénomènes constans dans la configuration des trois premiers Satellites; tel est, entr'autres, l'impossibilité de les voir s'éclipser à la fois, d'ici à un grand nombre de siècles, & si l'on part des moyens mouvemens & des époques que M. Wargentin a employées dans ses Tables, on trouve que cela ne peut arriver qu'après 1,317,900 ans (*Mémoires d'Upsal, année 1743, page 41*). Une différence de six tierces dans le mouvement annuel du second Satellite, suffiroit pour rendre ce phénomène à jamais impossible, & M. Wargentin ne répond qu'à une ou deux secondes près, des mouvemens annuels dont il a fait usage.

Maintenant on peut établir comme une règle générale, que si le résultat d'une longue suite d'observations précises, approche d'un rapport simple, de manière que la différence soit inappréciable par les observations, & puisse être attribuée aux erreurs dont elles sont susceptibles; ce rapport est probablement celui de la Nature. Ainsi les observations n'ayant fait apercevoir aucune différence entre les moyens mouvemens de révolution de la Lune sur elle-même & autour de la Terre, on est fondé à supposer que ces deux mouvemens sont rigoureusement les mêmes. En appliquant cette règle aux mouvemens des trois premiers satellites de Jupiter, nous pouvons en conclure avec une grande probabilité, que la différence des moyens mouvemens du premier & du second, est exactement égale au double de la différence des moyens mouvemens du second & du troisième. Cette égalité n'est pas l'effet du hasard, & il est contre toute vraisemblance de supposer que ces trois corps

ont été placés primitivement aux distances qu'elle exige ; il est donc naturel de penser que leur attraction mutuelle en est la véritable cause. C'est ainsi que l'action de la Terre sur la Lune, établit entre les moyens mouvemens de rotation & de révolution de ce Satellite, une égalité rigoureuse ; quoiqu'à l'origine ces deux mouvemens aient pu différer entr'eux. Je me propose dans ce Mémoire, de discuter ce point important du système du monde, & d'examiner si le rapport que présentent les moyens mouvemens des trois premiers satellites de Jupiter, doit se maintenir sans cesse en vertu des Loix de la pesanteur universelle. Cette recherche est très-intéressante pour la théorie du second Satellite ; les principales inégalités qu'il éprouve, dépendent des actions du premier & du troisième ; mais le rapport précédent donne à ces inégalités la même période, & les fond en une seule qui, dans les Tables, forme la grande équation de ce Satellite ; si ce rapport n'étoit pas rigoureux, ces deux inégalités se sépareroient dans la suite des siècles, & les Tables du second Satellite cesseroient de représenter son mouvement. Voici maintenant ce qui résulte de mon analyse.

J'observe d'abord que les termes proportionnels aux premières puissances des masses perturbatrices, ne pouvant pas donner l'explication du rapport dont je viens de parler, il faut la chercher dans les termes qui dépendent des carrés & des produits de ces masses; je discute en conséquence les termes de cet ordre qui peuvent produire ce rapport. En nommant t le temps, $n\,t$, $n^{\prime}\,t$, $n^{\prime\prime}\,t$, les moyens mouvemens du premier, du second & du troisième Satellite ; en désignant par s, la quantité $n - 3n^{\prime} + 2n^{\prime\prime}$, & par V, la longitude moyenne du premier Satellite, comptée d'un point fixe sur l'orbite de Jupiter, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième ; je trouve que les termes multipliés par les produits deux à deux, des masses de ces Satellites, introduisent dans les valeurs de s & de V, des quantités proportionnelles au temps. En les

faiſant enſuite diſparoître par la méthode que j'ai donnée ailleurs pour cet objet, je parviens à deux équations différentielles du premier ordre entre s, V & t. Leurs intégrales comparées aux obſervations, donnent une explication complète du phénomène dont il s'agit, & préſentent en même temps pluſieurs conſéquences intéreſſantes.

La première eſt que s & V ſont des quantités périodiques, & qu'ainſi en faiſant abſtraction des quantités de cette nature, on a rigoureuſement $n + 2\,n'' = 3\,n'$. On eſt donc aſſuré par-là que la différence des moyens mouvemens du premier & du ſecond Sattellite, eſt rigoureuſement égale à deux fois la différence des moyens mouvemens du ſecond & du troiſième. C'eſt une condition à laquelle les moyens mouvemens des Tables doivent ſatisfaire, & comme ceux dont M. Wargentin a fait uſage, la rempliſſent à très-peu-près, on doit en conclure qu'ils ſont fort approchés, & qu'ils n'ont beſoin que de très-légères corrections.

La ſeconde conſéquence eſt que la condition précédente n'exige point qu'à l'origine, les trois Satellites aient été exactement placés aux diſtances reſpectives qui, par les loix de Képler, donnent l'équation $n + 2\,n'' = 3\,n'$; il ſuffit qu'ils en aient été peu éloignés, & alors leur attraction mutuelle établit entre leurs moyens mouvemens, cette égalité rigoureuſe.

Une troiſième conſéquence eſt que l'on ne doit point craindre que dans la ſuite des ſiècles, les Tables du ſecond Satellite ceſſent d'être exactes, du moins relativement à leur équation principale.

Enfin, la quatrième conſéquence que je tire de mon analyſe, eſt que ſi l'on fait abſtraction des quantités périodiques, l'angle V eſt de ſix ſignes; c'eſt-à-dire, que la longitude moyenne du premier Satellite, moins trois fois celle du ſecond, plus deux fois celle du troiſième, eſt égale à 180^d; c'eſt une nouvelle condition que les Tables doivent remplir exactement. Celles de M. Wargentin donnent au commencement de 1760, $V = 180^d + 30'$, ce qui

s'éloigne peu de 180^d; suivant les Tables de M. Bailli, la valeur moyenne de *V* ne s'en éloignoit que de 12' à la même époque; ces écarts sont une imperfection des Tables, & doivent être comptés parmi les causes des erreurs dont elles sont encore susceptibles.

L'angle *V* est soumis à une inégalité périodique analogue aux oscillations d'un pendule; elle affecte inégalement les mouvemens des trois Satellites, suivant des rapports dépendans de leurs masses & de leurs distances au centre de Jupiter; la durée de sa période dépend des mêmes quantités. La masse du second Satellite est assez bien déterminée par les inégalités qu'elle produit dans le mouvement du premier; mais les masses du premier & du troisième Satellite sont encore inconnues : il existe seulement entr'elles un rapport que donnent les inégalités du second Satellite, & c'est par son moyen que j'ai trouvé que le temps de la libration de *V* est compris entre quatre ans un huitième & onze ans un tiers. L'instant où cette libration est nulle & son étendue sont des arbitraires que l'observation peut seule déterminer. Si l'on ne considère que l'action des trois premiers satellites de Jupiter, leur mouvement dépend de neuf équations différentielles du second ordre, dont les intégrales finies renferment dix-huit constantes arbitraires. Les excentricités & les inclinaisons des orbites, les positions des nœuds & des aphélies déterminent douze de ces constantes; les moyens mouvemens & leurs époques formeroient les six autres, sans les deux conditions auxquelles ces six arbitraires sont assujetties, & qui les réduisent à quatre: c'est pour y suppléer que l'expression de *V* renferme deux arbitraires.

Puisque les Tables représentent assez bien les observations, sans avoir égard à l'inégalité précédente, elle doit être peu considérable; mais l'incertitude qui règne encore sur la plupart des élémens de la théorie des satellites de Jupiter, rend sa détermination très-difficile. C'est un point que je laisse à discuter aux Astronomes; il me suffit ici de leur indiquer cette inégalité, comme un objet digne de

leur attention, & d'établir que les moyens mouvemens & les époques des Tables doivent remplir exactement les deux conditions suivantes :

1.° Le moyen mouvement du premier Satellite, plus deux fois celui du troisième, est égal à trois fois celui du second.

2.° La longitude moyenne du premier Satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est constamment égale à 180^d.

Ces conditions subsisteroient encore, en supposant dans les moyens mouvemens des Satellites, des accélérations semblables à celle que les observations paroissent indiquer dans le moyen mouvement de la Lune. L'action mutuelle des trois premiers Satellites les maintiendroit sans cesse, en sorte que le système de ces corps, en descendant insensiblement vers Jupiter, en vertu de ces accélérations, conserveroit toujours les rapports nécessaires à l'existence des conditions précédentes. Ainsi l'action de la Terre sur la Lune maintient l'égalité rigoureuse des deux mouvemens de rotation & de révolution de ce Satellite, malgré l'accélération continuelle du second de ces deux mouvemens; parce que le premier devient en même raison plus rapide. De-là résulte cette conséquence, savoir, que si pour mieux représenter les observations, on admet une équation séculaire dans le moyen mouvement de l'un des trois premiers Satellites de Jupiter, ainsi que M. Bailli l'a fait dans ses Tables du premier Satellite; il faut en supposer de semblables dans les moyens mouvemens des deux autres, & les ordonner de manière que l'équation du premier, plus deux fois celle du troisième, soit égale à trois fois l'équation du second Satellite.

On voit, par ce que nous venons de dire, que l'action mutuelle des satellites de Jupiter ne produit dans leurs mouvemens, que des inégalités périodiques; & nous pouvons généralement en conclure que si l'on n'a égard qu'aux loix de la gravitation universelle, les moyennes distances des corps célestes aux foyers de leurs forces principales, sont immuables. Il n'en est pas ainsi des autres élémens de

leurs orbites : on ſait que leurs excentricités, leurs inclinaiſons, les poſitions de leurs nœuds & de leurs aphélies varient ſans ceſſe; & il exiſte des méthodes fort ſimples pour déterminer ces variations, en ſuppoſant les orbites peu excentriques & peu inclinées les unes aux autres. Mais les excentricités & les inclinaiſons ſont-elles renfermées conſtamment dans d'étroites limites? C'eſt un point important du Syſtème du Monde qui reſte encore à éclaircir, & dont la diſcuſſion eſt la ſeule choſe que laiſſe maintenant à deſirer, la théorie des inégalités ſéculaires. J'ai prouvé dans la ſeconde partie de nos Mémoires pour l'année 1772, que ſi l'on ne conſidère que l'action de deux Planètes, les excentricités & les inclinaiſons de leurs orbites ſont toujours très-petites; & M. de la Grange a fait voir daus les Mémoires de Berlin, pour l'année 1782, que cela eſt également vrai pour les orbites des Planètes de notre Syſtème, en partant des ſuppoſitions les plus vraiſemblables ſur leurs maſſes. Cependant l'incertitude où l'on eſt encore à l'égard de pluſieurs de ces maſſes, peut laiſſer quelques doutes ſur ce réſultat, & il eſt néceſſaire de s'aſſurer par une méthode indépendante de toute hypothèſe, qu'en vertu de l'action mutuelle des Planètes, les excentricités & les inclinaiſons de leurs orbites ſont toujours peu conſidérables. Je me propoſe encore de remplir cet objet dans ce Mémoire, en établiſſant d'une manière générale, que les inégalités ſéculaires des excentricités & des inclinaiſons des orbites des Planètes, ne renferment ni arcs-de-cercle, ni exponentielles; d'où il ſuit qu'en vertu de l'action de ces corps, leurs orbites s'aplatiſſent plus ou moins, mais en ne s'écartant que très-peu de la forme circulaire, & en conſervant toujours les mêmes grands axes; les poſitions reſpectives de leurs plans & de leurs aphélies varient ſans ceſſe, elles s'inclinent plus ou moins les unes aux autres, mais elles ſont toujours renfermées dans une zône d'un petit nombre de degrés.

I I.

Équations générales du mouvement d'un ſyſtème de Corps qui s'attirent mutuellement.

CONSIDÉRONS le mouvement d'un ſyſtème de corps m, m', m'', &c. autour d'un corps M dont nous prendrons la maſſe pour unité de maſſe. Soient x, y, z, les trois coordonnées rectangles de m, & r, ſa diſtance à M, ou ſon rayon vecteur, l'origine des coordonnées étant au centre de M. Marquons d'un trait, de deux traits, &c, les mêmes lettres relatives à m', m'', &c. & nommons λ, la fonction

$$\frac{m.m'}{\sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]}} + \frac{m.m''}{\sqrt{[(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2]}} + \frac{m'.m''}{\sqrt{[(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2]}} + \&c.$$

cette fonction étant la ſomme des produits des maſſes m, m' m'', &c. priſes deux à deux, diviſés par les diſtances mutuelles de ces maſſes; cela poſé :

Si l'on tranſporte en ſens contraire, au corps m, la force dont M eſt animé par l'action du ſyſtème; on trouvera facilement que dans ſon mouvement relatif autour de M, il ſera animé parallèlement aux axes des x, des y, & des z, par les trois forces ſuivantes

$$-\frac{(1+m).x}{r^3}-\frac{m'.x'}{r'^3}-\frac{m''.x''}{r''^3}-\&c.+\frac{1}{m}.\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right);$$

$$-\frac{(1+m).y}{r^3}-\frac{m'.y'}{r'^3}-\frac{m''.y''}{r''^3}-\&c.+\frac{1}{m}.\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right);$$

$$-\frac{(1+m).z}{r^3}-\frac{m'.z'}{r'^3}-\frac{m''.z''}{r''^3}-\&c.+\frac{1}{m}.\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right).$$

Ces trois forces tendent à augmenter les coordonnées

x,

x, y, z; en désignant donc par ∂t, l'élément du temps, supposé constant, on aura par les principes connus de Dynamique, les trois équations différentielles

$$0 = \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} + \frac{(1 + m).x}{r^3} + \frac{m^1.x^1}{r^{1\,3}} + \&c. - \frac{1}{m}.\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right); (1)$$

$$0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + \frac{(1 + m).y}{r^3} + \frac{m^1.y^1}{r^{1\,3}} + \&c. - \frac{1}{m}.\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right); (2)$$

$$0 = \frac{\partial\partial z}{\partial t^2} + \frac{(1 + m).z}{r^3} + \frac{m^1.z^1}{r^{1\,3}} + \&c. - \frac{1}{m}.\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right); (3)$$

En changeant successivement dans ces équations, m, x, y, z, r, dans m^1, x^1, y^1, z^1, r^1; $m^{11}, x^{11}, y^{11}, z^{11}, r^{11}$, &c, & réciproquement; on aura les équations différentielles relatives à m^1, m^{11}, &c.

III.

Si l'on multiplie l'équation (1) par

$$2m\partial x - \frac{2m.(m\partial x + m^1\partial x^1 + \&c.)}{1 + m + m^1 + \&c.},$$

l'équation (2) par

$$2m\partial y - \frac{2m.(m\partial y + m^1\partial y^1 + \&c.)}{1 + m + m^1 + \&c.},$$

& l'équation (3) par

$$2m\partial z - \frac{2m.(m\partial z + m^1\partial z^1 + \&c.)}{1 + m + m^1 + \&c.};$$

si l'on multiplie pareillement la première des équations différentielles relatives à m^1, par

$$2m^1\partial x^1 - \frac{2m^1.(m\partial x + m^1\partial x^1 + \&c.)}{1 + m + m^1 + \&c.},$$

la seconde par

$$2m^1\partial y^1 - \frac{2m^1.(m\partial y + m^1\partial y^1 + \&c.)}{1 + m + m^1 + \&c.},$$

& la troisième par

$$2\, m' \partial z' - \frac{2\, m'.(m\partial z + m'\partial z' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.},$$

& ainsi du reste ; si l'on ajoute ensuite toutes ces équations, & si l'on observe que

$$o = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x'}\right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x''}\right) + \&c ;$$

$$o = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y'}\right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y''}\right) + \&c ;$$

$$o = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z'}\right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z''}\right) + \&c ;$$

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} ;$$

$$r' = \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)} ;$$

&c.

on formera l'équation suivante,

$$\begin{aligned} o = {} & 2\, m . \frac{(\partial x . \partial\partial x + \partial y . \partial\partial y + \partial z . \partial\partial z)}{\partial t^2} + 2\, m' . \frac{(\partial x' . \partial\partial x' + \partial y' . \partial\partial y' + \partial z' . \partial\partial z')}{\partial t^2} + \&c. \\ & - 2 . \frac{(m\partial x + m'\partial x' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} . \frac{(m\partial\partial x + m'\partial\partial x' + \&c.)}{\partial t^2} \\ & - 2 . \frac{(m\partial y + m'\partial y' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} . \frac{(m\partial\partial y + m'\partial\partial y' + \&c.)}{\partial t^2} \\ & - 2 . \frac{(m\partial z + m'\partial z' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} . \frac{(m\partial\partial z + m'\partial\partial z' + \&c.)}{\partial t^2} \\ & + 2 . \left(\frac{m\partial r}{r^2} + \frac{m'\partial r'}{r'^2} + \&c.\right) - 2\,\partial\lambda . \end{aligned}$$

Cette équation donne, en l'intégrant,

$$\left.\begin{aligned} o = {} & f + m . \frac{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)}{\partial t^2} + m' . \frac{(\partial x'^2 + \partial y'^2 + \partial z'^2)}{\partial t^2} + \&c. \\ & - \frac{(m\partial x + m'\partial x' \&c.)^2}{(1 + m + m' + \&c.)\partial t^2} - \frac{(m\partial y + m'\partial y' + \&c.)^2}{(1 + m + m' + \&c.) . \partial t^2} \\ & - \frac{(m\partial z + m'\partial z' + \&c.)^2}{(1 + m + m' + \&c.)\partial . t^2} - 2 . \left(\frac{m}{r} + \frac{m'}{r'} + \&c.\right) - 2\,\lambda \end{aligned}\right\} ; \quad (4)$$

f étant une constante arbitraire.

On peut encore obtenir trois intégrales des équations différentielles du mouvement du système, de la maniere suivante.

Si l'on multiplie l'équation (1) par

$$-my+\frac{m.(my+m'y'+\&c.)}{1+m+m'+\&c.},$$

& l'équation (2) par

$$mx-\frac{m.(mx+m'x'+\&c.)}{1+m+m'+\&c.};$$

si l'on multiplie pareillement, la première des équations relatives à m', par

$$-m'y'+\frac{m'.(my+m'y'+\&c.)}{1+m+m'+\&c.},$$

& la seconde par

$$m'x'-\frac{m'.(mx+m'x'+\&c.)}{1+m+m'+\&c.};$$

& ainsi du reste; si l'on ajoute ensuite toutes ces équations, en observant que

$$0=x\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)-y\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)+x'\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y'}\right)-y'\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x'}\right)+\&c.$$

$$0=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x'}\right)+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y'}\right)+\&c.$$

on aura

$$0=m.\frac{(x\partial\partial y-y\partial\partial x)}{\partial t^2}+m'.\frac{(x'\partial\partial y'-y'\partial\partial x')}{\partial t^2}+\&c.$$
$$-\frac{(mx+m'x'+\&c.)}{1+m+m'+\&c.}.\frac{(m\partial\partial y+m'\partial\partial y'+\&c.)}{\partial t^2}$$
$$+\frac{(my+m'y'+\&c.)}{1+m+m'+\&c.}.\frac{(m\partial\partial x+m'\partial\partial x'+\&c.)}{\partial t^2};$$

équation dont l'intégrale eſt

$$\left.\begin{aligned} c = {} & m.\frac{(x\partial y - y\partial x)}{\partial t} + m'.\frac{(x'\partial y' - y'\partial x')}{\partial t} + \&c. \\ & - \frac{(mx + m'x' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.}.\frac{(m\partial y + m'\partial y' + \&c.)}{\partial t} \\ & + \frac{(my + m'y' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.}.\frac{(m\partial x + m'\partial x' + \&c.)}{\partial t} \end{aligned}\right\}; \quad (5)$$

c étant une conſtante arbitraire.

On parviendra de la même maniere aux deux intégrales ſuivantes,

$$\left.\begin{aligned} c' = {} & m.\frac{(x\partial z - z\partial x)}{\partial t} + m'.\frac{(x'\partial z' - z'\partial x')}{\partial t} + \&c. \\ & - \frac{(mx + m'x' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.}.\frac{(m\partial z + m'\partial z' + \&c.)}{\partial t} \\ & + \frac{(mz + m'z' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.}.\frac{(m\partial x + m'\partial x' + \&c.)}{\partial t} \end{aligned}\right\}; \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} c'' = {} & m.\frac{(y\partial z - z\partial y)}{\partial t} + m'.\frac{(y'\partial z' - z'\partial y')}{\partial t} + \&c. \\ & - \frac{(my + m'y' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.}.\frac{(m\partial z + m'\partial z' + \&c.)}{\partial t} \\ & + \frac{(mz + m'z' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.}.\frac{(m\partial y + m'\partial y' + \&c.)}{\partial t} \end{aligned}\right\}; \quad (7)$$

c' & c'' étant deux arbitraires. Ces quatre intégrales ſont les ſeules que l'on peut obtenir dans l'état actuel de l'analyſe.

I V.

Si l'on ſuppoſe les maſſes m, m', &c. extrêmement petites; chacune d'elles décrira à très-peu-près à chaque révolution, une ellipſe autour de M. En vertu des inégalités ſéculaires, les élémens de ces ellipſes varieront par des nuances imperceptibles; mais la ſuite des ſiècles rendra ces variations

très-sensibles. Les intégrales précédentes établissent entre elles, des rapports constans que nous allons déterminer.

Soit a, le demi-grand axe de l'ellipse que m décriroit autour de M, si l'on ne considéroit que l'action de ces deux corps; on aura, comme l'on sait

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} = \frac{2.(1+m)}{r} - \frac{1+m}{a}.$$

Cette équation n'aura plus lieu, si l'on a égard à l'action des autres corps m', m'', &c; cependant, si l'on observe que l'orbite de m peut toujours être considérée à chaque révolution, comme une ellipse, aux quantités périodiques près, qui troublent le mouvement de ce corps; on verra que cette équation est encore à très-peu-près exacte après un temps quelconque; mais le demi-grand axe a pourra n'être plus le même qu'à l'origine.

Il suit de-là qu'en ayant égard à l'action de tous les corps du système, on a

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} = \frac{2.(1+m)}{r} - \frac{1+m}{a} + \psi,$$

ψ étant une fonction périodique de l'ordre des masses perturbatrices.

Si l'on nomme pareillement a', a'', &c, les demi-grands axes des orbites que m', m'', &c, décriroient à chaque révolution, sans les perturbations qu'ils éprouvent, on aura

$$\frac{\partial x'^2 + \partial y'^2 + \partial z'^2}{\partial t^2} = \frac{2.(1+m')}{r'} - \frac{1+m'}{a'} + \psi',$$

$$\frac{\partial x''^2 + \partial y''^2 + \partial z''^2}{\partial t^2} = \frac{2.(1+m'')}{r''} - \frac{1+m''}{a''} + \psi'';$$

&c.

ψ', ψ'', &c, étant des quantités périodiques de l'ordre m,

En subſtituant ces valeurs dans l'équation (4) de l'*article précédent*, elle deviendra

$$f = \frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \&c.$$

$$- \frac{m^2.(m' + m'' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} . \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

$$- \frac{m'^2.(m + m'' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} . \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{a'}\right)$$

$$- \&c.$$

$$- \frac{(2\,m\,m'.\partial x.\partial x' + 2\,m\,m''.\partial x.\partial x'' + 2\,m'.m''.\partial x'.\partial x'' + \&c.)}{(1 + m + m' + \&c.).\partial t^2}$$

$$- \frac{(2\,m\,m'.\partial y.\partial y' + 2\,m\,m''.\partial y.\partial y'' + 2\,m'.m''.\partial y'.\partial y'' + \&c.)}{(1 + m + m' + \&c.).\partial t^2}$$

$$- \frac{(2\,m\,m'.\partial z.\partial z' + 2\,m\,m''.\partial z.\partial z'' + 2\,m'\,m''.\partial z'.\partial z'' + \&c.)}{(1 + m + m' + \&c.).\partial t^2}$$

$$- 2\lambda - \frac{m.(1 + m' + m'' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} . \psi - \frac{m'.(1 + m + m'' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \times \psi' - \&c.$$

Les quantités

$$\frac{m\,m'\,\partial x\,\partial x'}{\partial t^2}, \quad \frac{m\,m''.\partial x\,\partial x''}{\partial t^2}, \quad \frac{m\,m'.\partial y.\partial y'}{\partial t^2}, \quad \&c.$$

ſont périodiques, dans la ſuppoſition du mouvement elliptique, & les termes que les perturbations y introduiroient, ſeroient de l'ordre m^3; en négligeant donc les quantités de cet ordre, & celles de l'ordre m^2, qui ne ſont que périodiques ou conſtantes, l'équation précédente prendra cette forme très-ſimple,

$$f = \frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \&c; \quad (8)$$

ainſi, en ſuppoſant que la ſuite des ſiècles amène des changemens remarquables dans les demi-grands axes *a*,

a', &c. des orbites; ils doivent toujours ſatisfaire à l'équation précédente dans laquelle la conſtante f eſt invariable.

On voit par-là que pour avoir entre les élémens des orbites ſuppoſées elliptiques, les relations que donnent les intégrales précédentes des équations différentielles du mouvement du ſyſtème, il ſuffit de ſubſtituer dans ces intégrales, les valeurs des coordonnées relatives au mouvement elliptique; en négligeant enſuite les quantités conſtantes ou périodiques de l'ordre m^2, on aura entre les élémens des ellipſes, autant d'équations qu'il y a d'intégrales.

Déterminons d'après ce principe, les relations entre les élémens qui réſultent des integrales (5), (6) & (7) de l'*article précédent.* Si l'on nomme $e.a$ l'excentricité de l'orbite de m, & ſi l'on néglige m vis-à-vis de l'unité; l'aire que ſon rayon vecteur trace autour de M, durant l'inſtant ∂t, ſera par la théorie du mouvement elliptique, $\frac{1}{2}\partial t.\sqrt{[a.(1 - e^2)]}$. Cette aire projetée ſur le plan des x & des y, eſt diminuée dans le rapport du coſinus de l'inclinaiſon de l'orbite de m ſur ce plan, au rayon. Soit θ, la tangente de cette inclinaiſon; l'aire projetée ſera $\frac{1}{2}\partial t.\sqrt{\left[\frac{a.(1-e^2)}{1+\theta^2}\right]}$; ce ſera dans l'hypothèſe elliptique, la valeur de $\frac{1}{2}.(x\partial y - y\partial x)$.

Si l'on nomme pareillement, $e'.a'$, $e''.a''$, &c, les excentricités des orbites de m', m'', &c; θ, θ', θ'', &c, les tangentes des inclinaiſons de leurs orbites;

$$\frac{1}{2}\partial t.\sqrt{\left[\frac{a'(1-e'^2)}{1+\theta'^2}\right]},\ \frac{1}{2}\partial t.\sqrt{\left[\frac{a''.(1-e''^2)}{1+\theta''^2}\right]},\ \&c.$$

ſeront dans l'hypothèſe elliptique, les valeurs de

$$\frac{1}{2}.(x'\partial y' - y'\partial x'),\ \frac{1}{2}.(x''\partial y'' - y''\partial x''),\ \&c.$$

En ſubſtituant ces valeurs dans l'équation (5) de l'*article*

précédent, & en négligeant les quantités constantes ou périodiques de l'ordre m^2, on aura

$$c = m.\sqrt{\left[\frac{a.(1-e^2)}{1+\theta^2}\right]} + m'.\sqrt{\left[\frac{a'.(1-e'^2)}{1+\theta'^2}\right]} + m''.\sqrt{\left[\frac{a''.(1-e''^2)}{1+\theta''^2}\right]} + \&c. \quad (9)$$

en supposant donc qu'après un temps considérable, les excentricités & les inclinaisons des orbites subissent des changemens remarquables, elles doivent toujours satisfaire à l'équation précédente dans laquelle la constante c est invariable.

Les équations (6) & (7) de l'*article précédent* fournissent encore deux relations entre les élémens des orbites; mais il est plus facile de les tirer immédiatement de l'équation (9), en y substituant successivement, au lieu de θ, θ', &c. les tangentes des inclinaisons des orbites sur le plan des x & des z, & sur celui des y & des z. Nommons I, l'angle que forme avec l'axe des x, l'intersection du plan de l'orbite de m, & du plan des x & des y. Il est aisé de voir par la trigonométrie sphérique, que la tangente de l'inclinaison de cette orbite sur le plan des x & des z, sera $\sqrt{\left(\frac{1+\theta^2.\text{sin.}\,I^2}{\theta^2.\text{cos.}\,I^2}\right)}$, & que la tangente de l'inclinaison de la même orbite sur le plan des y & des z, sera $\sqrt{\left(\frac{1+\theta^2.\text{cos.}\,I^2}{\theta^2.\text{sin.}\,I^2}\right)}$; soit donc

$$\theta.\text{sin.}\,I = p; \quad \theta.\text{cos.}\,I = q;$$

ces tangentes seront $\frac{1}{q}.\sqrt{(1+p^2)}$, $\frac{1}{p}.\sqrt{(1+q^2)}$.

En marquant d'un trait, de deux traits, &c. les lettres I, p, q, relatives à m'. m''. &c, on aura les tangentes des inclinaisons des orbites de ces corps sur le plan des x & des z, & sur celui des y & des z. En substituant ensuite

ensuite ces tangentes, au lieu de θ, θ', &c, dans l'équation (9), on aura les deux équations suivantes,

$$\left.\begin{aligned} c' = {} & m q . \surd\left[\frac{a.(1-e^2)}{1+\theta^2}\right] + m' q' . \surd\left[\frac{a'.(1-e'^2)}{1+\theta'^2}\right] \\ & + m'' . q'' . \surd\left[\frac{a''.(1-e''^2)}{1+\theta''^2}\right] + \&c. \end{aligned}\right\} ; (10)$$

$$\left.\begin{aligned} c'' = {} & m p . \surd\left[\frac{a.(1-e^2)}{1+\theta^2}\right] + m' p' . \surd\left[\frac{a'.(1-e'^2)}{1+\theta'^2}\right] \\ & + m'' . p'' . \surd\left[\frac{a''.(1-e''^2)}{1+\theta''^2}\right] + \&c. \end{aligned}\right\} ; (11)$$

dans lesquelles les constantes c' & c'', sont invariables.

V.

Sur les moyens mouvemens des trois premiers satellites de Jupiter.

CONSIDÉRONS présentement les mouvèmens des trois premiers satellites de Jupiter. Nous observerons d'abord que le mouvement du quatrième, n'offrant aucun rapport de commensurabilité avec ceux des trois autres, on peut négliger ici son action. On peut, par la même raison, négliger l'action du Soleil; enfin, on peut faire abstraction de la figure de Jupiter, dont l'influence sur les variations des grands axes est nulle. Soient donc m, m', m'', les masses du premier, du second & du troisième satellite de Jupiter dont nous prendrons la masse M pour unité de masse. Supposons qu'après un temps considérable, les demi-grands axes a, a', a'', &c, se changent dans

$$a + \delta a, \; a' + \delta a', \; a'' + \delta a'';$$

si l'on prend pour le plan des x & des y, celui de l'orbite de Jupiter, & que l'on néglige les carrés des excentricités

& des inclinaiſons des orbites, & ceux de δa, $\delta a'$, $\delta a''$; les équations (8) & (9) de l'*article précédent*, donneront, en les différenciant par rapport à la caractériſtique δ,

$$0 = \frac{m.\delta a}{a^2} + \frac{m'.\delta a'}{a'^2} + \frac{m''.\delta a''}{a''^2};$$

$$0 = \frac{m.\delta a}{\sqrt{(a)}} + \frac{m'.\delta a'}{\sqrt{(a')}} + \frac{m''.\delta a''}{\sqrt{(a'')}};$$

d'où l'on tire

$$\delta a' = \frac{-m.\delta a}{m'} . \frac{a'^2}{a^2} . \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} - a''^{\frac{1}{2}}}{a'^{\frac{1}{2}} - a''^{\frac{1}{2}}}\right);$$

$$\delta a'' = \frac{m.\delta a}{m''} . \frac{a''^2}{a^2} . \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} - a'^{\frac{1}{2}}}{a'^{\frac{1}{2}} - a''^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Soient $n t$, $n' t$, $n'' t$, les moyens mouvemens des Satellites m, m', m''; on aura, comme l'on ſait,

$$n^2 = \frac{1}{a^3};\; n'^2 = \frac{1}{a'^3};\; n''^2 = \frac{1}{a''^3};$$

partant

$$\delta n = -\frac{3}{2} . n . \frac{\delta a}{a}$$

$$\delta n' = -\frac{m}{m'} . \delta n . \frac{n'^{\frac{4}{3}}.(n - n'')}{n^{\frac{4}{3}}.(n' - n'')}$$

$$\delta n'' = \frac{m}{m''} . \delta n . \frac{n''^{\frac{4}{3}}.(n - n')}{n^{\frac{4}{3}}.(n' - n'')};$$

ainſi pour avoir les variations ſéculaires des moyens mouvemens des trois Satellites, il ne s'agit que de déterminer δa, ou ce qui revient au même, le terme pro-

portionnel au temps, qui entre dans l'expreſſion du demi-grand axe a, du premier Satellite.

VI.

Si l'on ajoute enſemble les équations (1), (2) & (3) de l'*article II*, après avoir multiplié la premiere par ∂x, la ſeconde par ∂y, & la troiſième par ∂z; & que pour abréger, on ſuppoſe,

$$R = \frac{m'.(xx' + yy' + zz')}{r'^3} + \frac{m''.(xx'' + yy'' + zz'')}{r''^3} - \frac{K}{m}z;$$

enfin, ſi l'on déſigne par la caractériſtique d, les différences priſes en ne faiſant varier que les coordonnées relatives au Satellite m; on aura

$$0 = \frac{\partial x.\partial\partial x + \partial y.\partial\partial y + \partial z.\partial\partial z}{\partial t^2} + (1+m).\frac{\partial r}{r^2} + dR;$$

d'où l'on tire en intégrant

$$0 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} - \frac{2.(1+m)}{r} + \frac{1+m}{a} + 2\int dR.$$

Si la différentielle $2\,dR$ renferme un terme conſtant $k\,\partial t$, l'intégrale $2\int dR$ renfermera le terme $k\,t$ proportionnel au temps; on aura donc après le temps t, en négligeant les quantités périodiques de l'ordre m,

$$0 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} - \frac{2.(1+m)}{r} + \frac{1+m}{a} + k.t;$$

mais ſi l'on nomme $a + \delta a$, ce que devient le demi-grand axe a, après ce temps, on a

$$0 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} - \frac{2.(1+m)}{r} + \frac{1+m}{a + \delta a};$$

partant

$$\frac{1+m}{a+\delta a} = \frac{1+m}{a} + k\,t,$$

ce qui donne, en négligeant le carré de δa, & m vis-à-vis de l'unité,

$$\delta a = - a^2 k t:$$

la question se réduit ainsi à déterminer k.

Pour y parvenir, nous observerons que si l'on n'a égard qu'aux quantités de l'ordre des masses perturbatrices, la différentielle $d R$ ne renferme aucun terme constant; (*Voyez sur cela les Mémoires de Berlin pour l'année 1776, page 210*). Il faut conséquemment, pour y trouver des termes semblables, avoir égard aux produits de ces masses. Si l'on nomme v, v', v'', les angles formés par l'axe des x, & par les projections des rayons recteurs r, r', r'', sur le plan de l'orbite de Jupiter; si l'on nomme de plus, $n t + \varepsilon$, $n' t + \varepsilon'$, $n'' t + \varepsilon''$, les longitudes moyennes des trois Satellites, rapportées au même plan, & comptées de l'axe des x; l'angle

$$(2 n'' - 3 n' + n) . t + 2\varepsilon'' - 3\varepsilon' + \varepsilon,$$

sera à très-peu-près constant suivant les observations, en vertu du rapport qu'elles indiquent entre les moyens mouvemens des trois premiers Satellites, comme on l'a vu dans l'*article premier*. Soit V cet angle; on doit donc chercher les termes constans de $d R$, parmi ceux qui sont multipliés par les sinus de V, & de ses multiples; & il est clair que l'angle V étant composé des mouvemens des trois Satellites, il ne peut se rencontrer que parmi les termes de $d R$, affectés du produit $m' . m''$.

Nous négligerons les excentricités & les inclinaisons des orbites; nous aurons ainsi

$$x = r . \text{cos.} v; \quad y = r . \text{sin.} v; \quad z = 0;$$
$$x' = r' . \text{cos.} v'; \quad y' = r' . \text{sin.} v'; \quad z' = 0;$$
$$x'' = r'' . \text{cos.} v''; \quad y'' = r'' . \text{sin.} v''; \quad z'' = 0;$$

& par conféquent

$$R = \frac{m'.r.\text{cof.}\,(v' - v)}{r'^2} + \frac{m''.r.\text{cof.}\,(v'' - v)}{r''^2}$$

$$- \frac{m'}{\sqrt{[r^2 - 2rr'.\text{cof.}\,(v' - v) + r'^2]}} - \frac{m''}{\sqrt{[r^2 - 2rr'.\text{cof.}\,(v' - v) + r''^2]}}.$$

Suppofons qu'en réduifant R dans une fuite ordonnée par rapport aux cofinus de $v' - v$, $v'' - v$, & de leurs multiples, on ait

$$R = m'.[A^{(0)} + A^{(1)}.\text{cof.}\,(v' - v) + A^{(2)} \times \text{cof.}\,2\,(v' - v) + \&c.]$$
$$+ m''.[B^{(0)} + B^{(1)}.\text{cof.}\,(v'' - v) + B^{(2)} \times \text{cof.}\,2\,(v'' - v) + \&c.];$$

on aura dR, en différenciant R, uniquement par rapport à r & v, ce qui donne

$$dR = m'\partial v.\{A^{(1)}.\text{fin.}\,(v' - v) + 2A^{(2)}.\text{fin.}\,2\,(v' - v) + \&c.\}$$
$$+ m'\partial r.\{(\frac{\partial A^{(0)}}{\partial r}) + (\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r}).\text{cof.}\,(v' - v) + (\frac{\partial A^{(2)}}{\partial r}).\text{cof.}\,2.(v' - v) + \&c.\}$$
$$+ m''\partial v.\{B^{(1)}.\text{fin.}\,(v'' - v) + 2B^{(2)}.\text{fin.}\,2\,(v'' - v) + \&c.\}$$
$$+ m''\partial r.\{(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial r}) + (\frac{\partial B^{(1)}}{\partial r}).\text{fin.}\,(v'' - v) + (\frac{\partial B^{(2)}}{\partial r}).\text{fin.}\,2\,(v'' - v) + \&c.\}.$$

Il faut maintenant fubftituer dans cette expreffion de dR, au lieu de r, r', r'', v, v', v'', leurs valeurs approchées jufqu'aux premières puiffances inclufivement de m, m', m'', en diftinguant avec foin, les termes conftans, de ceux qui ne font que périodiques.

VII.

POUR cela, nous allons rappeler ici quelques résultats de la théorie des perturbations des satellites de Jupiter; nous les tirerons de l'excellente pièce de M. de la Grange, qui a remporté le Prix de l'Académie pour l'année 1766, & qui est imprimée dans le tome IX du recueil des Prix de l'Académie.

Si l'on désigne par l'unité, le demi-diamètre de Jupiter; on aura, en n'ayant égard qu'à l'action des trois premiers Satellites,

$$r = 5{,}67 + m' \cdot \left\{ \begin{array}{l} 4{,}19 \cdot \text{cos.}\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - 1014{,}93 \times \\ \text{cos.}\,2 \cdot (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - 3{,}87 \cdot \text{cos.} \\ 3 \cdot (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - 1{,}02 \cdot \text{cos.}\,4 \cdot (n't - nt \\ + \varepsilon' - \varepsilon) - \&\text{c.} \end{array} \right\}$$

$$+ m'' \cdot \left\{ \begin{array}{l} 0{,}75 \cdot \text{cos.}\,(n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) - 1{,}06 \times \\ \text{cos.}\,2 \cdot (n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) - 0{,}13 \cdot \text{cos.} \\ 3 \cdot (n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) - 0{,}02 \cdot \text{cos.}\,4 \cdot (n''t - nt \\ + \varepsilon'' - \varepsilon) - \&\text{c.} \end{array} \right\}$$

$$r' = 9{,}00 + m \cdot \left\{ \begin{array}{l} 518{,}78 \cdot \text{cos.}\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 5{,}73 \times \\ \text{cos.}\,2 \cdot (n't - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) + 1{,}36 \cdot \text{cos.} \\ 3 \cdot (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 0{,}49 \cdot \text{cos.}\,4 \cdot (n't - nt \\ + \varepsilon' - \varepsilon) + \&\text{c.} \end{array} \right\}$$

$$+ m'' \cdot \left\{ \begin{array}{l} 7{,}16 \cdot \text{cos.}\,(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') - 824{,}07 \times \\ \text{cos.}\,2 \cdot (n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') - 6{,}29 \cdot \text{cos.} \\ 3 \cdot (n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon') - 1{,}66 \cdot \text{cos.}\,4 \cdot (n''t - n't \\ + \varepsilon'' - \varepsilon') - \&\text{c.} \end{array} \right\}$$

$$r'' = 14{,}38 + m \cdot \left\{ \begin{array}{l} 5{,}88 \cdot \text{cos.}\,(n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) + 0{,}19 \times \\ \text{cos.}\,2 \cdot (n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) + 0{,}03 \cdot \text{cos.} \\ 3 \cdot (n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) + 0{,}00 \cdot \text{cos.}\,4 \cdot (n''t - nt \\ + \varepsilon'' - \varepsilon) + \&\text{c.} \end{array} \right\}$$

$$+ m' \cdot \left\{ \begin{array}{l} 452{,}98 \cdot \text{cos.}\,(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') + 9{,}13 \times \\ \text{cos.}\,2 \cdot (n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') + 2{,}16 \cdot \text{cos.} \\ 3 \cdot (n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') + 0{,}59 \cdot \text{cos.}\,4 \cdot (n''t - n't \\ + \varepsilon'' - \varepsilon') + \&\text{c.} \end{array} \right\}$$

$$v = nt + \epsilon + m' \cdot \left\{ \begin{array}{l} 9300' \cdot \sin.(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) - 1227214' \times \\ \sin.\ 2\cdot(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) - 3526' \cdot \sin. \\ 3\cdot(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) - 705' \cdot \sin.\ 4\cdot(n't - nt \\ + \epsilon' - \epsilon) - \&c. \end{array} \right\}$$

$$+ m'' \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1158' \cdot \sin.(n''t - nt + \epsilon'' - \epsilon) - 1007' \times \\ \sin.\ 2\cdot(n''t - nt + \epsilon'' - \epsilon) - 101' \cdot \sin. \\ 3\cdot(n''t - nt + \epsilon'' - \epsilon) - 18' \cdot \sin.\ 4\cdot(n''t - nt \\ + \epsilon'' - \epsilon) - \&c. \end{array} \right\}$$

$$v' = n't + \epsilon' + m \cdot \left\{ \begin{array}{l} 387482' \cdot \sin.(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2727' \times \\ \sin.\ 2\cdot(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 509' \cdot \sin. \\ 3\cdot(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 12' \cdot \sin.\ 4\cdot(n't - nt \\ + \epsilon' - \epsilon) + \&c. \end{array} \right\}$$

$$+ m'' \cdot \left\{ \begin{array}{l} 10067' \cdot \sin.(n''t - n't + \epsilon'' - \epsilon') - 626246' \times \\ \sin.\ 2\cdot(n''t - n't + \epsilon'' - \epsilon') - 3717' \cdot \sin. \\ 3\cdot(n''t - n't + \epsilon'' - \epsilon') - 825' \cdot \sin.\ 4\cdot(n''t - n't \\ + \epsilon'' - \epsilon') - \&c. \end{array} \right\}$$

$$v'' = n''t + \epsilon'' + m \cdot \left\{ \begin{array}{l} -1306' \cdot \sin.(n''t - nt + \epsilon'' - \epsilon) + 38' \cdot \sin.\ 2\times \\ (n''t - nt + \epsilon'' - \epsilon) + 8' \cdot \sin.\ 3\cdot(n''t - n't \\ + \epsilon'' - \epsilon) + 1' \cdot \sin.\ 4\cdot(n''t - nt + \epsilon'' - \epsilon) \\ + \&c. \end{array} \right\}$$

$$+ m' \cdot \left\{ \begin{array}{l} 207375' \cdot \sin.(n''t - n't + \epsilon'' - \epsilon') + 2760' \times \\ \sin.\ 2\cdot(n''t - n't + \epsilon'' - \epsilon') + 559' \cdot \sin. \\ 3\cdot(n''t - n't + \epsilon'' - \epsilon') + 142' \cdot \sin.\ 4\cdot(n''t - nt \\ + \epsilon'' - \epsilon') + \&c. \end{array} \right\}$$

(*Voyez la pièce citée*, pages 63 & suivantes); cela posé.

Considérons d'abord le terme $m' \partial v. A^{(1)} . \sin. (v' - v)$, de l'expression de dR. Si l'on y substitue au lieu de v, sa valeur précédente; il est aisé de voir qu'il n'en peut résulter aucun terme constant ou proportionnel à $\sin. V$. Il n'en est pas ainsi de la substitution de la valeur de v', & l'on voit facilement que le terme

$$- m'' . 626246' . \sin.\ 2.(n''t - n't + \epsilon'' - \epsilon),$$

de cette valeur, produira dans $m' \partial v . A^{(1)} . \text{fin.} (v' - v)$, le ſuivant

$$- m' m'' . 626246' . A^{(1)} . n \partial t . \text{cof.} (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon) \times$$
$$\text{fin. } 2 . (n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon'),$$

& par conſéquent celui-ci,

$$- \frac{m' m''}{2} . 626246' A^{(1)} . n dt. \text{ fin. } V.$$

pour réduire en parties du rayon le coéfficient 626246', il faut le diviſer par 57d 17' 44''; en déſignant donc par h, le quotient de cette diviſion, le terme précédent deviendra

$$- \frac{m' m''}{2} . h A^{(1)} . n \partial t . \text{fin. } V;$$

& il produira dans $2 d R$, le terme conſtant

$$- m' m'' . h A^{(1)} . n \partial t . \text{fin. } V.$$

$A^{(1)}$ étant une fonction de r & de r', la ſubſtitution de leurs valeurs peut produire encore des termes conſtans dans $m' . \partial v . A^{(1)} \text{ fin. } (v' - v)$; or il eſt facile de s'aſſurer que la valeur de r ne produira aucun terme ſemblable, & que la valeur de r' produira le terme

$$- m' . m'' . n \partial t . \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) . 824,07 . \text{cof. } 2 (n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon') \times$$
$$\text{fin. } (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon),$$

ce qui donne le terme conſtant

$$\frac{m' m''}{2} . n \partial t . \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) . 824,07 . \text{fin. } V;$$

en déſignant donc par l, le coéfficient numérique 824,07, il en réſultera dans $2 dR$, le terme conſtant

$$m' m'' . n \partial t . \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) . l . \text{fin. } V.$$

On voit ainſi que le terme $m' \partial v . A^{(1)} . \text{fin.} (v' - v)$, de

de l'expreſſion de dR, produit dans $2\,dR$, la quantité conſtante

$$m' \,.\, m'' \,.\, n\, \partial\, t \,.\, \text{ſin.}\, V \,.\, [\, l\, (\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}) - h\, A^{(1)}\,].$$

Si l'on analyſe de la même manière, les autres termes de l'expreſſion de dR; on verra que les termes conſtans qui en réſultent, ſont inſenſibles par rapport à la quantité précédente, à cauſe de la grandeur des coéfficiens numériques h & l, qui multiplient ſes deux termes. On peut donc ſuppoſer que la partie conſtante de $2\,dR$, ſe réduit à cette quantité, & qu'ainſi l'on a

$$k = m'\, m'' \,.\, n \,.\, \text{ſin.}\, V \,.\, [\, l\, (\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}) - h\, A^{(1)}\,];$$

d'où l'on tire par l'*article précédent*,

$$\delta a = -\, m'\, m'' \,.\, a^2\, n\, t \,.\, \text{ſin.}\, V \,.\, [\, l\, (\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}) - h\, A^{(1)}\,];$$

& par conſéquent

$$\delta n = \tfrac{3}{2} \,.\, m'\, m'' \,.\, a \,.\, n^2\, t \,.\, \text{ſin.}\, V \,.\, [\, l\, (\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}) - h\, A^{(1)}\,].$$

De-là il eſt aiſé de conclure par l'*article V*,

$$2\,\delta n'' - 3\,\delta n' + \delta n$$

$$= \tfrac{1}{2} \,.\, a n^2\, t \,.\, \text{ſin.}\, V \,.\, [\, l (\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}) - h\, A^{(1)}\,] \,.\, \left\{ \begin{array}{l} m'\, m'' \\ + 3\, m\, m'' \,.\, \dfrac{n'^{\frac{4}{3}} \,.\, (n - n'')}{n^{\frac{4}{3}} \,.\, (n' - n'')} \\ + 2\, m\, m' \,.\, \dfrac{n''^{\frac{4}{3}} \,.\, (n - n')}{n^{\frac{4}{3}} \,.\, (n' - n'')} \end{array} \right\}$$

Soit α, la fonction qui, dans le ſecond membre de cette équation, multiplie $n^2\, t \,.\, \text{ſin.}\, V$; & que l'on déſigne par s, la quantité $2\, n'' - 3\, n' + n$; on aura

$$\delta s = \alpha\, n^2\, t \,.\, \text{ſin.}\, V.$$

VIII.

L'ÉQUATION précédente donne la variation δs, correſpondante au temps t; mais elle ne peut ſervir que pour un intervalle dans lequel $\alpha n^2 t . \text{ſin.} V$ eſt peu conſidérable; on peut cependant en tirer la valeur de s, pour un temps illimité, au moyen de la méthode que j'ai donnée dans la ſeconde partie de nos Mémoires pour l'année 1772. Suivant cette méthode, on doit conſidérer s, comme une fonction de αt, qui réduite dans une ſérie ordonnée par rapport aux puiſſances de αt, eſt de cette forme

$$s + \alpha t . \frac{\partial s}{\alpha \partial t} + \frac{\alpha^2 t^2}{1.2} . \frac{\partial^2 s}{\alpha^2 \partial t^2} + \&c.$$

les quantités s, $\frac{\partial s}{\alpha \partial t}$, $\frac{\partial^2 s}{\alpha^2 \partial t^2}$, &c. étant relatives à l'inſtant que l'on choiſit pour époque. Le ſecond terme de cette ſérie exprime la variation δs, lorſque αt eſt très-petit; en comparant donc cette variation à celle-ci, $\alpha n^2 t . \text{ſin.} V$, on aura

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \alpha n^2 . \text{ſin.} V,$$

& comme l'inſtant de l'époque eſt arbitraire, cette équation différentielle a lieu pour un inſtant quelconque.

Maintenant, V étant par l'*article VI*, égal à

$$2 n'' t - 3 n' t + n t + 2 \epsilon'' - 3 \epsilon' + \epsilon,$$

on a

$$\partial V = \partial t . (2 n'' - 3 n' + n) = s \partial t;$$

on aura ainſi entre s, V & t, deux équations différentielles du premier ordre, dont les intégrales donneront les valeurs de s & V, pour un temps quelconque.

De ces équations, on tire la suivante,

$$\frac{\partial \partial V}{\partial t^2} = \alpha\, n^2 . \text{fin.}\, V;$$

en la multipliant par ∂V, & en l'intégrant, on aura

$$\frac{\pm \partial V}{\sqrt{(\lambda - 2\, \alpha\, n^2 . \text{cof.}\, V)}} = \partial t; \quad (a)$$

λ étant une constante arbitraire. Les différentes valeurs que l'on peut supposer à cette constante, donnent lieu aux trois cas suivans.

Premier cas.

Si λ est positif & plus grand que $\pm 2\, \alpha\, n^2$; il est visible que l'angle $\pm V$ croîtra sans cesse, & cela doit arriver, si à l'origine du mouvement, $2\, n'' - 3\, n' + n$, est positif ou négatif, & d'un ordre supérieur à $n \sqrt{(\pm \alpha)}$.

Second cas.

Si α est positif, & λ moindre que $2\, \alpha\, n^2$; le radical

$$\sqrt{(\lambda - 2\, \alpha\, n^2 . \text{cof.}\, V)}$$

devient imaginaire, dans la supposition de $V = 0$; l'angle V sera donc alors périodique, & ne pourra jamais être *nul*; il ne fera qu'osciller de part & d'autre de 180^d, en sorte que sa valeur moyenne sera de six signes.

Troisième cas.

Si α est négatif, & λ moindre que $-2\, \alpha\, n^2$; le radical

$$\sqrt{(\lambda - 2\, \alpha\, n^2 . \text{cof.}\, V)}$$

devient imaginaire, dans la supposition de $V = 180^d$; l'angle V ne peut donc jamais dans ce cas atteindre 180^d; il ne fera qu'osciller de part & d'autre de zéro, en devenant alternativement positif & négatif, & sa valeur moyenne sera nulle.

Voyons lequel de ces trois cas a lieu dans la Nature.

IX.

En prenant pour unité, le demi-diamètre de Jupiter, les observations donnent

$$a = 5{,}67;\ a' = 9{,}00;\ a'' = 14{,}38.$$

De-là j'ai conclu

$$A^{(1)} = -\frac{0{,}0952}{a'};\ \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) = \frac{0{,}594}{a'^2};$$

Mais on a par l'*article VII*,

$$h = \frac{626246''}{57^d\ 17'\ 44''};\ l = 824{,}07;$$

on aura par conséquent

$$l.\left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) - h\ A^{(1)} = \frac{71{,}731}{a'},$$

ce qui donne

$$\alpha = 67{,}786.\left\{\begin{array}{l} m'\ m'' + 3\ m\ m''.\dfrac{n'^{\frac{4}{3}}.(n - n'')}{n^{\frac{4}{3}}.(n' - n'')} \\ \qquad + 2\ m\ m'.\dfrac{n''^{\frac{4}{3}}.(n - n')}{n^{\frac{4}{3}}.(n' - n'')} \end{array}\right\}$$

Nous sommes ainsi assurés que α est positif; d'où il suit que le dernier des trois cas précédens, ne peut pas exister. Il faut donc, ou que l'angle $\pm V$ croisse sans cesse, ou si sa valeur est périodique, qu'il ne puisse qu'osciller de part & d'autre de 180^d.

X.

Si l'angle $\pm V$ croît indéfiniment, λ est positif & plus grand que $2\ \alpha\ n^2$; or, si l'on suppose $V = 180^d \pm \varpi$,

le signe de ϖ étant le même que celui de ∂V, dans l'équation différentielle *(a)* de l'*article VIII*, cette équation donnera

$$\partial \varpi = \partial t . \sqrt{(\lambda + 2 \alpha n^2 . \text{cof.} \varpi)};$$

on aura donc dans l'intervalle compris depuis $\varpi = 0$, jusqu'à $\varpi = 90^d$, $\varpi > t . \sqrt{(\lambda)}$, & par conséquent $\varpi > n t . \sqrt{(2 \alpha)}$; ainsi le temps t que ϖ emploîra à parvenir de 0^d à 90^d, sera moindre que $\frac{90^d}{n \sqrt{(2 \alpha)}}$. Si l'on nomme T le temps de la révolution du premier Satellite, on aura $n T = 360^d$; ce qui donne $n = \frac{360^d}{T}$; donc le temps t que ϖ emploîra à parvenir de 0^d à 90^d, sera moindre que $\frac{T}{4 . \sqrt{(2 \alpha)}}$.

La valeur de α dépend des masses des trois premiers Satellites de Jupiter; la masse m' du second paroît assez bien déterminée par l'inégalité du premier Satellite, & si l'on prend pour unité, la masse de Jupiter, on a

$$m' = 0{,}00002417.$$

Quant aux masses m & m'' du premier & du troisième *Satellite*, la théorie des inégalités du second est insuffisante pour les déterminer; mais elle donne entr'elles, la relation suivante

$$91810 . m + 148383 . m'' = 16{,}5.$$

(Voyez la pièce citée de M. de la Grange, pages 74 & 78). En supposant donc $m = \mu m'$, on aura

$$m'' = 0{,}000111199 - 0{,}000014955 . \mu.$$

Les temps des révolutions des trois premiers Satellites sont

$$1^j\, 18^h\, 28'\, 36''; \; 3^j\, 13^h\, 17'\, 54''; \; 7^j\, 3^h\, 59'\, 36'';$$

& il est clair que les valeurs de n, n', n'', sont réciproques

à ces temps; d'où il ſuit que ces valeurs ſont entr'elles comme les nombres

$$1 ; 0,497978 ; 0,246967 ;$$

on aura ainſi

$$\frac{3\, n'^{\frac{4}{3}} . (n - n'')}{n^{\frac{4}{3}} . (n' - n'')} = 3,55242 ;$$

$$\frac{2\, n''^{\frac{4}{3}} . (n - n')}{n^{\frac{4}{3}} . (n' - n'')} = 0,619791 ;$$

d'où l'on tire

$$\alpha = 0,000000182187 . \left\{ \begin{array}{l} 1 + 3,55263 . \mu \\ \quad - 0,477756 . \mu^2 \end{array} \right\}$$

La valeur de μ eſt compriſe entre les deux limites $\mu = 0$ & $\mu = \frac{111199}{14955}$, dont la première répond à $m = 0$, & dont la ſeconde répond à $m'' = 0$; or il eſt aiſé de voir que la plus petite valeur dont α eſt ſuſceptible, répond à $\mu = 0$; ainſi le temps t que l'angle ϖ doit employer dans le cas que nous diſcutons ici, à parvenir de 0^d à 90^d, eſt néceſſairement moindre que

$$\frac{T}{4 . \sqrt{(0,000000364374)}} ;$$

& comme T réduit en décimales de jours, eſt égal à $1^j,76986$, il en réſulte que t eſt moindre que $733^j,002$, ou au-deſſous de deux ans.

Maintenant, ſi l'on compare ce réſultat aux obſervations, on verra qu'il leur eſt entièrement contraire; car les Tables des trois premiers Satellites, qui ſatisfont aſſez bien aux obſervations depuis plus d'un ſiècle, donnent à toutes les époques, V peu différent de 180 degrés, & par conſéquent ϖ peu conſidérable. Suivnat celles que M. Bailli a inſérées à la fin de ſon Ouvrage ſur les Satellites de Jupiter, les

quantités dont V surpassoit 180 degrés, aux époques de 1671 & 1763, étoient de 9′ 31″, & de 12′ 23″; dans toutes les époques intermédiaires, elles étoient comprises entre ces limites. Il est donc certain que depuis la découverte des Satellites de Jupiter, ϖ ne s'est jamais élevé à 90 degrés; ainsi la supposition de l'angle ϖ croissant sans cesse, est entièrement contraire aux observations. Le second des trois cas de l'*article VIII*, est donc le seul qui puisse avoir lieu dans la Nature; c'est-à-dire que l'angle V est nécessairement périodique, & ne fait qu'osciller de part & d'autre de 180 degrés, en sorte que sa valeur moyenne est de six signes.

XI.

REPRENONS l'équation différentielle de l'*article précédent.*

$$\frac{\partial \varpi}{\sqrt{(\lambda + 2\alpha n^2 . \text{cos.} \varpi)}} = \partial t.$$

Si l'on nomme g, l'espace que la pesanteur terrestre fait parcourir dans la première seconde; si l'on imagine ensuite un pendule dont la longueur soit $\frac{2g}{\alpha i^2}$, i étant le nombre de secondes que renferme le temps de la révolution du premier Satellite; enfin si l'on suppose à l'origine du mouvement, ce pendule éloigné de la verticale, d'un angle dont le cosinus soit $\frac{-\lambda}{2\alpha i^2}$; ses oscillations représenteront les variations de l'angle ϖ.

Puisque les Tables des Satellites satisfont assez bien aux observations, sans avoir égard aux variations de cet angle, il doit être peu considérable: on peut donc supposer cos. $\varpi = 1 - \frac{\varpi^2}{2}$; ainsi en faisant $\frac{\lambda + 2\alpha n^2}{\alpha n^2} = C$, on aura

$$\frac{\partial \varpi}{\sqrt{(C^2 - \varpi^2)}} = n \partial t . \sqrt{(\alpha)}.$$

Cette équation donne, en l'intégrant,

$$\varpi = \zeta . \text{fin.} \{ n t \sqrt{(\alpha)} + \gamma \},$$

ζ & γ étant deux conſtantes arbitraires que l'obſervation peut ſeule déterminer. L'équation $\frac{\partial V}{\partial t} = \partial s$, donne

$$s = \pm n \zeta . \sqrt{(\alpha)} . \text{cof.} \{ n t \sqrt{(\alpha)} + \gamma \},$$

d'où l'on voit que s eſt, ainſi que ϖ, une quantité périodique: en faiſant donc abſtraction de ces quantités, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant que nt, $n't$, $n''t$, repréſentent les vrais moyens mouvemens des Satellites, on a rigoureuſement $s = 0$, ou

$$n + 2n'' = 3n'.$$

On voit encore que cette équation n'exige point qu'à l'origine du mouvement, s ou $n + 2n'' - 3n'$, ait été rigoureuſement nul; il ſuffit qu'il ait été compris dans les limites $- n\zeta . \sqrt{(\alpha)}$, & $+ n\zeta . \sqrt{(\alpha)}$.

On aura le temps t de la période des variations de s & de ϖ, au moyen de l'équation $nt . \sqrt{(\alpha)} = 360^d$, ce qui donne $t = \frac{360^d}{n . \sqrt{(\alpha)}}$; mais T étant le temps de la révolution du premier Satellite, on a $nT = 360^d$; on aura donc

$$t = \frac{T}{\sqrt{(\alpha)}};$$

les deux limites de t, répondent conſéquemment aux deux limites de α; or la plus petite valeur de α eſt

$$\alpha = 0{,}0000001821\,87,$$

& ſa plus grande valeur eſt

$$\alpha = 0{,}0000013\,8542;$$

ainſi

ainſi les deux limites de t, ſont

$$1503^{\text{jours}},5\,;\ \&\ 4146^{\text{jours}},5\,;$$

c'eſt-à-dire, que le temps de la période des valeurs de s & de θ, eſt compris entre 4 ans $\frac{1}{8}$, & 11 ans $\frac{1}{3}$.

Les mouvemens des trois Satellites ont des variations analogues à celles de l'angle ϖ; ces variations ſont dans le rapport des quantités δn, δn, δn, qui par l'*article V*, ſont entr'elles comme les quantités

$$1\,;\ -\frac{m}{m'}\cdot\frac{n'^{\frac{4}{3}}.(n-n'')}{n^{\frac{4}{3}}.(n'-n'')}\,;\ \frac{m}{m''}\cdot\frac{n''^{\frac{4}{3}}.(n-n')}{n^{\frac{4}{3}}.(n'-n'')}.$$

En nommant donc, k ſin. $\{nt\sqrt{(\alpha)}+\gamma\}$, l'équation qui en réſulte dans le mouvement du premier Satellite; les équations correſpondantes du ſecond & du troiſième Satellite, ſeront

$$-\ 1,18414\,.\frac{m}{m'}\,.k.\text{ſin.}\,\{nt\sqrt{(\alpha)}+\gamma\};$$

$$0,309895\,.\frac{m}{m''}\,.k.\text{ſin.}\,\{nt\sqrt{(\alpha)}+\gamma\};$$

& l'on aura

$$\zeta=(1+3,55242\,.\frac{m}{m'}+0,619791\,.\frac{m}{m''}).k.$$

Il eſt impoſſible dans l'état actuel de la théorie des Satellites de Jupiter, de prononcer ſur la véritable valeur de ζ; on voit ſeulement par l'inſpection des erreurs des meilleures Tables, qu'il n'eſt pas impoſſible que cette valeur excède 40′; mais c'eſt un point que je laiſſe à diſcuter aux Aſtronomes qui cherchent à perfectionner cette théorie.

XII.

Il ſuit de ce qui précède, que ſi l'on néglige les quantités périodiques, & que l'on n'ait égard qu'aux moyens

mouvemens & à leurs époques; on a les deux équations suivantes,

$$\epsilon - 3\epsilon' + 2\epsilon'' = 0;\; n - 3n' + 2n'' = 0.$$

Ces équations subsisteroient encore dans le cas où par des causes inconnues, telles que la résistance d'un milieu, les moyens mouvemens des Satellites de Jupiter seroient assujettis à des équations séculaires. En vertu de ces causes, les expressions des grands axes des orbites, & par conséquent les valeurs de n, n', n'', renfermeroient des termes proportionnels au temps; soient it, $i't$, $i''t$, ces termes; i, i', i'', étant des coéfficiens constans, ou du moins que l'on peut traiter comme tels, pendant un très-long intervalle. Si l'on nomme, pour abréger, q la quantité

$$\tfrac{3}{2}.m'm''.a.\left[l\left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) - l\,A^{(1)}\right];$$

on aura par les *art. V* & *VI.*

$$\delta n = q n^2 t.\text{sin.}\, V + i t;$$

$$\delta n' = -\frac{m}{m'}.\frac{n'^{\frac{4}{3}}.(n - n'')}{n^{\frac{4}{3}}.(n' - n'')}.q.n^2 t.\text{sin.}\, V + i' t,$$

$$\delta n'' = \frac{m}{m''}.\frac{n''^{\frac{4}{3}}.(n - n')}{n^{\frac{4}{3}}.(n' - n'')}.q n^2 t.\text{sin.}\, V + i'' t;$$

d'où l'on tire par l'*art. VIII*, les équations

$$\frac{\partial n}{\partial t} = q n^2.\text{sin.}\, V + i;$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = -\frac{m}{m'}.\frac{n'^{\frac{4}{3}}.(n - n'')}{n^{\frac{4}{3}}.(n' - n'')}.q n^2.\text{sin.}\, V + i';$$

$$\frac{\partial n''}{\partial t} = \frac{m}{m''}.\frac{n''^{\frac{4}{3}}.(n - n')}{n^{\frac{4}{3}}.(n' - n'')}.q n^2.\text{sin.}\, V + i''.$$

En supposant donc, comme dans l'*article VII*,

$$s = n - 3\,n' + 2\,n'';$$

$$a = q.\left[1 + \frac{3\,m}{m'} . \frac{n'^{\frac{4}{3}}.(n - n'')}{n^{\frac{4}{3}}.(n' - n'')} + \frac{2\,m}{m''} . \frac{n''^{\frac{4}{3}}.(n - n')}{n^{\frac{4}{3}}.(n' - n'')}\right];$$

on aura

$$\frac{\partial s}{\partial t} = a\,n^2.\text{sin.}\,V + i - 3\,i' + 2\,i''.$$

on a ensuite $\frac{\partial V}{\partial t} = s$; partant

$$\frac{\partial\partial V}{\partial t^2} = a\,n^2.\text{sin.}\,V + i - 3\,i' + 2\,i''.$$

Supposons $V = 180^d + \varpi$, ϖ étant peu considérable; l'équation précédente donnera

$$\frac{\partial\partial\varpi}{\partial t^2} + a\,n^2\,\varpi = i - 3\,i' + 2\,i'';$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$\varpi = \mathsf{C}.\text{sin.}\,[n\,t\,\sqrt{(a)} + \gamma] + \frac{i - 3\,i' + 2\,i''}{a\,n^2},$$

C & γ étant deux constantes arbitraires; & comme on a $s = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial\varpi}{\partial t}$; on aura

$$n - 3\,n' + 2\,n'' = n\,\mathsf{C}.\text{cos.}\,[n\,t\,\sqrt{(a)} + \gamma];$$

ainsi en négligeant les quantités périodiques, on aura

$$n - 3\,n' + 2\,n'' = 0.$$

On voit par-là que les causes qui peuvent altérer les moyens mouvemens des trois premiers satellites de Jupiter, ne troublent point le rapport précédent entre ces mouvemens; d'où il suit que si ces corps sont assujettis à des équations séculaires, celle du premier plus deux fois celle du troisième doit être égale à trois fois l'équation séculaire du second.

Pour déterminer ces équations, nous obſerverons que l'on a par ce qui précède,

$$q\,n^2 . \text{ſin.}\, V = \frac{q\,\partial s}{\alpha\,\partial t} - \frac{q}{\alpha} . (i - 3\,i' + 2\,i'');$$

on aura donc en rejetant la quantité périodique $\frac{\partial s}{\partial t}$,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = i - \frac{q}{\alpha} . (i - 3\,i' + 2\,i''),$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = i' + \frac{q\,m}{\alpha\,m'} . (i - 3\,i' + 2\,i'') . \frac{n'^{\frac{4}{3}} . (n - n'')}{n^{\frac{4}{3}} . (n' - n'')},$$

$$\frac{\partial n''}{\partial t} = i'' - \frac{q\,m}{\alpha\,m''} . (i - 3\,i' + 2\,i'') . \frac{n''^{\frac{4}{3}} . (n - n')}{n^{\frac{4}{3}} . (n' - n'')}.$$

Si l'on intègre deux fois de ſuite, ces valeurs de ∂n, $\partial n'$, $\partial n''$; les termes proportionnels au carré du temps t, feront les équations ſéculaires des Satellites; les valeurs de ces équations feront par conſéquent

$$\tfrac{1}{2} . t^2 . \left[i - \frac{q}{\alpha} . (i - 3\,i' + 2\,i'')\right],$$

$$\tfrac{1}{2} . t^2 . \left[i' + \frac{q\,m}{\alpha\,m'} . (i - 3\,i' + 2\,i'') . \frac{n'^{\frac{4}{3}} . (n - n'')}{n^{\frac{4}{3}} . (n' - n'')}\right],$$

$$\tfrac{1}{2} . t^2 . \left[i'' - \frac{q\,m}{\alpha\,m''} . (i - 3\,i' + 2\,i'') . \frac{n''^{\frac{4}{3}} . (n - n')}{n^{\frac{4}{3}} . (n' - n'')}\right].$$

La valeur moyenne de V, eſt $180^d + \frac{i - 3i' + 2i''}{\alpha\,n^2}$;

ainſi en ſuppoſant $i - 3\,i' + 2\,i''$ poſitif, V feroit plus grand que 180 degrés, & l'on pourroit expliquer par-là, pourquoi toutes les Tables des ſatellites de Jupiter donnent $V > 180$ degrés: mais on doit obſerver que les quantités i, i', i'', doivent être inſenſibles relativement à $\alpha\,n^2$, puiſqu'autrement elles produiroient dans les moyens mouvemens des Satellites, des équations ſéculaires que

l'intervalle de temps écoulé depuis leur découverte jusqu'à nos jours, auroit rendues très-sensibles. On pourroit à la vérité diminuer ces équations par différentes suppositions sur les valeurs de m, m', m'', i. i', i''; supposons, par exemple, le Satellite m extrêmement petit relativement à m' & à m'', & qu'il se meuve dans un milieu résistant qui ne s'étende pas jusqu'à l'orbite du second Satellite; on aura $q = \alpha$, $i' = 0$, $i'' = 0$; les équations séculaires des trois Satellites seront nulles, & V sera égal à $180^d + \frac{i}{\alpha n^2}$. On pourra donc supposer $\frac{i}{\alpha n^2}$ égal à plusieurs minutes, sans qu'il en résulte aucune équation séculaire sensible dans les mouvemens des Satellites; car si d'un côté, le milieu dans lequel se meut le premier Satellite, tend à accélérer son mouvement, en l'approchant de Jupiter; d'un autre côté, l'action des deux autres Satellites, détruit l'effet de ce milieu, & conserve au premier Satellite son moyen mouvement & sa moyenne distance. Mais ces hypothèses & toutes celles du même genre, sont trop peu vraisemblables pour être admises; on doit donc regarder l'équation

$$\epsilon - 3\epsilon' + 2\epsilon'' = 0,$$

comme une condition à laquelle les époques des Tables doivent nécessairement satisfaire.

XIII.

Sur les Excentricités & les Inclinaisons des orbites des Planètes.

CONSIDÉRONS présentement le second objet que nous nous sommes proposés de traiter dans ce Mémoire, & cherchons à établir d'une manière générale, que les excentricités & les inclinaisons des orbites des Planètes, sont constamment renfermées dans d'étroites limites; pour cela

nous allons rappeler ici les principaux résultats de la théorie connue des inégalités séculaires.

Si l'on prend pour plan fixe, celui de l'Écliptique à une époque donnée, & que l'on compte les longitudes, de l'équinoxe correspondant supposé invariable; si l'on nomme ensuite m, m', m'', &c. les masses des Planètes, celle du Soleil étant prise pour l'unité; a, a', a'', les demi-grands axes de leurs orbites; $ea, e'a', e''a''$, &c. leurs excentricités; V, V', V''. &c. les longitudes de leurs aphélies; $\theta, \theta', \theta''$, &c. les tangentes des inclinaisons de leurs orbites sur le plan fixe; enfin I, I', I'', les longitudes de leurs nœuds ascendans; les quantités $e.\sin. V$, $e.\cos. V$; $e'.\sin. V'$, $e'.\cos. V'$, &c; $\theta.\sin. I$, $\theta.\cos. I$; $\theta'.\sin. I'$, $\theta'.\cos. I'$, &c. seront données par des équations différentielles linéaires du premier ordre, dont les coéfficiens sont constans. Les excentricités & les inclinaisons étant fort petites, le système des équations relatives aux excentricités, est indépendant du système des équations relatives aux inclinaisons; en sorte que le premier système est le même que si les orbites étoient dans le même plan, & le second est le même que si les orbites étoient circulaires.

En intégrant le premier système, chacune des quantités $e.\sin. V$, $e.\cos. V$, $e'.\sin. V'$, $e'.\cos. V'$, &c. est exprimée par la somme d'un nombre fini de sinus & de cosinus d'angles proportionnels au temps t; les nombres par lesquels il faut multiplier ce temps, pour former ces angles, étant les racines d'une équation algébrique, d'un degré égal au nombre des Planètes; nous représenterons cette équation par (k). La même chose a lieu relativement aux équations du second système; mais l'équation dont dépend la formation des angles, n'est pas la même que pour le premier système; nous la représenterons par (k'). On peut consulter sur cet objet, les Mémoires de cette Académie, pour l'année 1772, *IIe Partie, page 361*; & les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1782, *pages 243 & 262*.

Si toutes les racines des équations *(k)* & *(k')* ſont réelles & inégales, les valeurs des quantités précédentes, ne renfermeront ni arcs-de-cercle ni exponentielles, & par conſéquent elles reſteront toujours fort petites; il n'en ſera pas de même ſi quelques-unes de ces racines ſont égales ou imaginaires, car on ſait qu'alors les ſinus & les coſinus ſe changent en arcs-de-cercle ou en exponentielles: mais quelle que ſoit la nature des racines de ces équations, les valeurs de e.ſin. V, e. coſ. V, e'. ſin, V', e'.coſ. V', &c. ſeront toujours compriſes dans les formes ſuivantes:

$$e.\,\text{ſin.}\,V = \alpha f^{it} + \beta.f^{i't} + \&c. + \gamma t^{r} + \lambda.t^{r-1} + \&c. + h;$$

$$e.\,\text{coſ.}\,V = \mu.f^{it} + \epsilon.f^{i't} + \&c. + \Phi t^{r} + \psi.t^{r-1} + \&c. + l;$$

$$e'.\,\text{ſin.}\,V' = \alpha' f^{it} + \beta'.f^{i't} + \&c. + \gamma' t^{r} + \lambda'.t^{r-1} + \&c. + h';$$

$$e'.\,\text{coſ.}\,V' = \mu'.f^{it} + \epsilon'.f + \&c. + \Phi'.t^{r} + \psi'.t^{r-1} + \&c. + l';$$

&c.

f étant le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt l'unité. Les coéfficiens $\alpha, \beta, \mu, \epsilon$, &c, $\alpha', \beta', \mu', \epsilon'$, &c. des exponentielles, ſont des quantités réelles ſans exponentielles, mais qui peuvent être fonctions de l'arc t, & de ſinus & de coſinus d'angles proportionnels à cet arc: les quantités $\gamma, \lambda, \Phi, \psi$, &c, $h, l, \gamma', \lambda', \Phi', \psi'$, &c, h', l', &c. ſont réelles, ſans arcs-de-cercle ni exponentielles, & par conſéquent conſtantes ou périodiques.

Suppoſons qu'abſtraction faite du ſigne, on ait $i > i'$, $i' > i''$, &c. e étant égal a $(e.\,\text{ſin.}\,V)^2 + (e.\,\text{coſ.}\,V)^2$, on aura

$$e^2 = (\alpha^2 + \mu^2).f^{2it} + \&c. + (\gamma^2 + \Phi^2).t^{2r} + \&c. + h^2 + l^2.$$

On aura pareillement

$$e'^2 = (\alpha'^2 + \mu'^2).f^{2l'} + \&c.$$
$$+ (\gamma'^2 + \Phi'^2).t^{2r} + \&c. + h'^2 + l'^2.$$

& ainſi de ſuite; on aura donc ainſi les valeurs des excentricités des orbites.

Ces valeurs ne peuvent ſervir que pour un temps limité, après lequel les excentricités devenant fort grandes, la ſuppoſition qu'elles ſont peu conſidérables, & d'après laquelle elles ont été trouvées, ceſſe d'être exacte: on ne peut donc étendre à un temps quelconque, les réſultats obtenus dans cette ſuppoſition, qu'autant que l'on eſt aſſuré que les racines de l'équation (k), ſont toutes réelles & inégales; mais il ſeroit très-difficile d'y parvenir par la conſidération directe de cette équation. Voici un moyen fort ſimple de prouver que ni les exponentielles f^{it}, $f^{i't}$, &c, ni l'arc t & ſes puiſſances ne ſe rencontrent point dans les valeurs de e.ſin. V, e.coſ. V; e'.ſin. V', e'.coſ. V', &c.

XIV.

REPRENONS l'équation (9) de l'*article IV:* ſi l'on ſuppoſe e & θ très-petits, & que l'on néglige les quantités des ordres e^4, $e^2\theta^2$, & θ^4, elle donnera

$$c = m\sqrt{(a)} + m'\sqrt{(a')} + \&c.$$
$$- \tfrac{1}{2}.m.(e^2 + \theta^2).\sqrt{(a)} - \tfrac{1}{2}m'.(e'^2 + \theta'^2).\sqrt{(a')} - \&c.$$

mais les moyennes diſtances des Planètes au Soleil ne ſont point troublées par leur action mutuelle; on aura donc

$$m.(e^2 + \theta^2).\sqrt{(a)} + m'.(e'^2 + \theta'^2).\sqrt{(a')} + \&c. = \text{conſtante}.$$

Nous avons obſervé dans l'*article précédent*, que les valeurs de e, e', e'', ſont données par des équations indépendantes de celles qui donnent les valeurs de θ, θ', θ'', &c. en ſorte qu'elles

qu'elles ſont les mêmes que ſi θ, θ', θ'', &c. étoient nuls; mais l'équation précédente devient dans cette hypothèſe,

$$\text{Conſt.} = m \cdot e^2 \cdot \sqrt{(a)} + m' \cdot e'^2 \cdot \sqrt{(a')} + \&c.$$

les valeurs de e, e', &c. doivent donc ſatisfaire à cette équation, après un temps quelconque.

Si l'on y ſubſtitue les expreſſions générales de ces quantités, que nous avons données dans l'*article précédent ;* on aura

$$\left.\begin{aligned} \text{Conſt.} = & [m \cdot \sqrt{(a)} \cdot (\alpha^2 + \mu^2) + m' \cdot \sqrt{(a')} \cdot (\alpha'^2 + \mu'^2) + \&c.] \cdot f^{2it} + \&c. \\ & + [m \cdot \sqrt{(a)} \cdot (\gamma^2 + \varphi^2) + m' \cdot \sqrt{(a')} \cdot (\gamma'^2 + \varphi'^2) + \&c.] \cdot t^{2r} + \&c. \\ & + m \cdot \sqrt{(a)} \cdot (h^2 + l^2) + m' \cdot \sqrt{(a')} \cdot (h'^2 + l'^2) + \&c. \end{aligned}\right\} ; (b)$$

cette équation devant avoir lieu quel que ſoit t, il eſt néceſſaire que les coéfficiens des exponentielles & des puiſſances ſemblables de t, diſparoiſſent d'eux-mêmes; en égalant donc à zéro, le coéfficient de f^{2it}, on aura

$$o = m \cdot \sqrt{(a)} \cdot (\alpha^2 + \mu^2) + m' \cdot \sqrt{(a')} \cdot (\alpha'^2 + \mu'^2) + \&c.$$

mais $m \cdot \sqrt{(a)}$, $m' \cdot \sqrt{(a')}$, &c. ſont des quantités poſitives, & α, μ, α', μ', &c. ſont des quantités réelles; l'équation précédente ne peut conſéquemment ſubſiſter, qu'en ſuppoſant $\alpha = o$, $\mu = o$, $\alpha' = o$, $\mu' = o$, &c. d'où il ſuit que les exponentielles ne ſe rencontrent point dans les valeurs de e, e', &c.

L'équation *(b)* donne encore, en égalant à zéro, le coéfficient de t^{2r},

$$o = m \cdot \sqrt{(a)} \cdot (\gamma^2 + \varphi^2) + m' \cdot \sqrt{(a')} \cdot (\gamma'^2 + \varphi'^2) + \&c.$$

d'où l'on tire

$$\gamma = o, \ \varphi = o, \ \gamma' = o, \ \varphi' = o; \ \&c.$$

Ainſi les valeurs de e, e', &c. ne renferment point d'arcs

de-cercle ; elles se réduisent par conséquent aux quantités périodiques,

$$\sqrt{(h^2 + l^2)},\ \sqrt{(h'^2 + l'^2)},\ \&c.$$

& ces quantités ont entr'elles, en vertu de l'équation *(b)*, la relation suivante

$$\text{Const.} = m.\sqrt{(a)}.(h^2 + l^2) + m'.\sqrt{(a')}.(h'^2 + l'^2) + \&c.$$

de manière que dans le développement du second membre de cette équation, en sinus & en cosinus, les coéfficiens de chaque sinus & de chaque cosinus doivent disparoître d'eux-mêmes.

Si l'on applique les mêmes raisonnemens aux expressions de θ, θ', θ'', &c. on s'assurera qu'elles ne renferment ni exponentielles ni arcs-de-cercle, & qu'elles se réduisent à des quantités périodiques. En supposant comme dans l'*art. IV*,

$$\theta.\text{sin.}\ I = p;\ \theta.\text{cos.}\ I = q;$$
$$\theta'.\text{sin.}\ I' = p';\ \theta'.\text{cos.}\ I' = q';\ \&c.$$

on trouvera que les quantités p, q, p', q', &c. ont entre elles la relation,

$$\text{Const.} = m.\sqrt{(a)}.(p^2 + q^2) + m'.\sqrt{(a')}.(p'^2 + q'^2) + \&c.$$

les équations (10) & (11) de l'*art. IV*, donnent encore dans la supposition de p, q, p', q', &c. très-petits, les relations suivantes entre ces quantités,

$$\text{Const.} = m\,q.\sqrt{(a)} + m'.q'.\sqrt{(a')} + \&c.$$
$$\text{Const.} = m\,p.\sqrt{(a)} + m'.p'.\sqrt{(a')} + \&c.$$

De-là nous pouvons généralement conclure que les expressions des excentricités & des inclinaisons des orbites des Planètes, ne renferment ni arcs-de-cercle, ni exponentielles; & qu'ainsi le système des Planètes est renfermé dans des limites invariables, du moins lorsque l'on n'a égard qu'à leur action mutuelle.



OBSERVATIONS
SUR DES MORTS SUBITES
Occasionnées par la rupture du ventricule gauche du Cœur.

Par M. PORTAL.

ON ne pourroit croire, si les observations ne l'avoient appris, que le cœur, cet organe musculeux, dont les parois sont si épaisses, pût se rompre, & occasionner ainsi la mort la plus prompte : Harvée en a rapporté un exemple, dans son immortel Ouvrage sur la circulation du sang ; & les Anatomistes en ont depuis recueilli d'autres dont ils ont fait mention dans leurs Écrits.

Il suffit de lire les Ouvrages de M.rs Morgagni, Senac & Lieutaud, pour se convaincre que les oreillettes & les ventricules du cœur ont donné lieu, par leur rupture, à un épanchement de sang dans le péricarde. Ce qui doit le plus surprendre, c'est qu'il est prouvé par les observations de ces grands Médecins, que ce ne sont pas les oreillettes, dont les parois sont très-minces, qui s'ouvrent toujours, mais que c'est dans les ventricules, dont les parois sont prodigieusement épaisses & fortes, que ces sortes de ruptures sont les plus fréquentes; encore peut-on conclure qu'elles sont plus communes dans le ventricule gauche que dans le ventricule droit, quoique les parois de celui-ci soient très-souples si on les compare avec celles du ventricule gauche. Ce point de doctrine est du moins confirmé par mes observations & par celles des Anatomistes qui les ont recueillies, & que j'ai eu soin de consulter; ce qui est bien différent des simples dilatations qui sont plus communes dans les oreillettes que dans les

ventricules, de même qu'il eſt plus ordinaire de voir les oreillettes dilatées au-delà de leur calibre, que les artères, leſquelles s'ouvrent au contraire plus ſouvent que les veines.

Les Anatomiſtes ont rendu compte de toutes ces différences; mais comme ils n'ont pas également fixé leur opinion ſur les ruptures du ventricule gauche, & ſur les cauſes qui les produiſent, j'ai cru devoir communiquer à l'Académie mes obſervations & mes remarques ſur cette matière; ſi elles ne ſont pas entièrement nouvelles, elles concourront du moins à confirmer celles que divers Auteurs ont rapportées, entr'autres M.rs Morgagni, Senac, Haller & Lieutaud.

Ce fut en 1768, que j'eus occaſion de faire la première ouverture de ce genre, madame de Chabanes, qui demeuroit dans la rue des Jeûneurs, avoit joui juſqu'à l'âge de ſoixante ans, d'une aſſez bonne ſanté; elle commença alors de reſſentir de la difficulté de reſpirer; cette incommodité augmenta de plus en plus, elle étoit extrême, lorſqu'elle montoit un eſcalier ou dans ſa voiture; ſon pouls devenoit très-irrégulier, même intermittent, & ce n'étoit qu'après un certain temps qu'elle ſe remettoit dans ſon état naturel; ce qu'il y a de ſingulier, c'eſt que cette Dame étoit moins fatiguée par les voitures rudes, que par celles qui étoient le mieux ſuſpendues: elle vécut avec cette incommodité juſqu'à l'âge d'environ ſoixante-cinq ans. Elle avoit obſervé que la ſaignée étoit ſon meilleur remède, auſſi ſe faiſoit-elle ſaigner ordinairement deux ou trois fois l'année, & quelquefois davantage. Les plus légères inquiétudes lui occaſionnoient des palpitations; elle ſe mit un jour dans une violente colère pour une petite contrariété; les palpitations furent plus fortes que jamais, elle ne put plus reſpirer qu'avec une peine extrême, ſon viſage pâlit, ſes extrémités devinrent auſſi froides que de la glace, & elle périt.

J'aſſiſtai à l'ouverture du cadavre, avec M.rs de Vernage

& Malouin, qui avoient été ſes Médecins; voici ce que l'on trouva.

Il y avoit dans le bas-ventre un médiocre épanchement d'une ſérosité rougeâtre; le foie étoit engorgé & très-dur, la véſicule du fiel étoit remplie par quatre pierres; elle s'étoit rétrécie & avoit la forme d'un canal, d'un diamètre preſque égal dans toute ſa longueur: il n'y avoit dans le bas-ventre aucune autre altération remarquable.

Ce fut dans la poitrine qu'on vit les cauſes de la mort; le péricarde étoit prodigieuſement diſtendu, & plein de ſang qui s'écoula en grande partie lorſqu'on l'ouvrit; les oreillettes du cœur étoient d'une grandeur énorme, le ventricule droit étoit au moins deux fois plus ample que le gauche, & leurs parois que cette diſtenſion avoit ſemblé devoir rendre plus minces, étoient au contraire plus épaiſſes, mais mollaſſes, elles étoient percées de pluſieurs déchirures; le ventricule gauche même, malgré la grande épaiſſeur de ſes parois, l'étoit en trois endroits; l'une de ces ouvertures étoit à la partie antérieure du cœur, proche la baſe, à côté du cordon tendineux qui lie l'aorte au cœur; les deux autres étoient dans le corps du même ventricule gauche, preſque parallèles à l'autre, & à un travers de doigt de diſtance; le ventricule droit étoit percé près la pointe, vers le bord ſupérieur de la cloiſon du cœur,

Les valvules ſigmoïdes de l'aorte, étoient endurcies & hériſſées de concrétions oſſeuſes; un amas de même nature, placé derrière elles, ne leur permettoit de donner au ſang qu'une iſſue très-étroite, & ce paſſage étoit encore gêné par des oſſifications dont l'aorte étoit incruſtée.

L'artère pulmonaire étoit oſſifiée en divers endroits proche de ſon orifice dans le ventricule droit; le corps annulaire ligamenteux qui l'attache avec ce ventricule, & qui ſoutient les valvules, étoit très-dur, inégal, & ſi gonflé que l'ouverture étoit ſingulièrement rétrécie; les valvules avoient la conſiſtance d'un cartilage, & les corpuſcules de Vidusvidius, ou ſi l'on veut, d'Arantius, qui les termi-

noient, étoient auſſi gros qu'un petit pois, au moins ſept ou huit fois plus qu'ils ne le ſont naturellement.

Vidusvidius a connu ces tubercules avant Arantius, auquel M. Morgagni fait honneur de la découverte : on peut voir, ſi l'on veut, à ce ſujet, notre hiſtoire de l'Anatomie.

Ce ſont ſans doute ces obſtacles qui ont empêché le cœur de ſe vider dans la ſiſtole; la réſiſtance que le ſang a oppoſée aux contractions de ſes ventricules, a déterminé peu-à-peu leur dilatation, la circulation du ſang dans les vaiſſeaux coronaires a été ralentie, le ſang qu'ils contenoient s'eſt extravaſé entre les fibres du cœur qui s'en ſont abreuvées, leur tiſſu a été relâché, gonflé, & elles ſe ſont déchirées par leurs propres contractions.

On a trouvé dans quelques ſujets morts ſubitement par la rupture du cœur, & dont M. Morgagni nous a tranſmis l'hiſtoire, des altérations dans le cœur, à peu-près ſemblables à celles dont nous venons de parler; mais je ne connois aucun exemple de rupture des deux ventricules dans la même perſonne. Je n'ai pas non plus connoiſſance qu'on ait trouvé les tubercules des valvules auſſi gonflés qu'ils l'étoient dans celle qui a été l'objet de cette obſervation : ſans doute que le ramolliſſement extrême des parois du cœur, aura facilité leurs déchirures, dont la dernière cauſe aura été l'effort que le ſang aura fait ſur elles, ne pouvant ſortir librement.

Madame la Comteſſe de Nevron étoit d'un embonpoint extrême; elle éprouvoit depuis long-temps de la difficulté de reſpirer lorſqu'elle ſe livroit à quelques exercices un peu fatigans. Elle vint de Nanci à Paris ſans s'arrêter; le ſoir de ſon arrivée, elle éprouva une grande difficulté de reſpirer, avec des douleurs de coliques aſſez vives. Un Médecin qui fut appelé trouva ſon pouls extrêmement plein & d'une inégalité ſingulière; cet état lui parut indiquer un vomiſſement prochain : il s'étoit propoſé de la purger le lendemain matin avec un ou deux grains d'émétique, ſi la Nature ne produiſoit d'elle-même auparavant quelqu'heureux changement.

Cet état se termina d'une manière plus tragique : Mme la Comtesse de Nevron sentit vers le milieu de la nuit que sa respiration devenoit plus difficile ; elle appelle du secours, on l'entend, on vole vers elle, & on la trouve expirante ; son visage étoit pâle, ses mains & ses pieds étoient froids ; elle étoit sans pouls, & l'on ne put entendre quelques foibles sons qu'elle proféroit : on ne la vit que pour être témoin de sa mort, qui fut très-précipitée.

Son corps conserva long-temps la chaleur, sur-tout la partie de la poitrine qui correspond au cœur, ce qui fut cause qu'on en retarda l'ouverture au-delà du temps qu'on a coutume d'attendre pour une pareille opération. Ce corps étoit tellement surchargé de graisse, qu'il étoit d'un volume énorme ; il y en avoit sous la peau plus de quatre travers de doigt, les muscles en étoient comme pénétrés ; leur texture avoit cependant la solidité ordinaire ; l'épiploon contenoit une quantité de graisse si prodigieuse, qu'il occupoit la plus grande partie de la cavité abdominale ; il y en avoit aussi beaucoup entre les lames du mésentère, autour des reins ; le foie étoit un peu plus volumineux, & renitent qu'il ne l'est ordinairement, & il y avoit cinq calculs biliaires dans la vésicule du fiel.

Il y avoit une si grande quantité de graisse entre les lames du médiastin, qu'elles étoient considérablement écartées, ce qui rétrécissoit la capacité de la poitrine, & donnoit lieu à la compression. Le cœur, qui étoit couvert d'une couche de graisse de plus de deux travers de doigt d'épaisseur, baignoit dans le sang, dont le péricarde étoit plein ; ce sang s'étoit épanché dans le sac membraneux par une ouverture qu'on découvrit à la base du cœur, près de l'artère-aorte ; le rebord ligamenteux qui fixe cette artère avec le cœur, en étoit détaché dans la partie antérieure de sa circonférence, au point qu'il en résultoit un trou dans lequel je pus facilement introduire le petit doigt ; du reste, la substance du cœur étoit solide & compacte, comme elle l'est ordinairement. Les ventricules, même celui qui s'étoit

déchiré, n'étoient pas plus grands que de coutume, & il n'y avoit aucune marque d'érosion en aucun endroit de sa texture; les vaisseaux qui portent ou qui reçoivent le sang de ce viscère, n'étoient point altérés, de sorte qu'on ne pouvoit attribuer cet accident à aucun vice qui leur fût propre, ni à aucune affection contre nature des fibres musculeuses du cœur.

Malgré la grande quantité de sang épanché dans le péricarde, il y en avoit encore beaucoup dans les vaisseaux, soit dans les artères, soit dans les veines; & n'est-ce pas à un excès de ce liquide, ou à l'énorme quantité de graisse, qu'on doit attribuer la cause de cette rupture du cœur?

L'endroit où cette crevasse s'est faite, mérite d'être considéré; ce n'est pas à la pointe du cœur, qui est la partie la plus mince, & où ces sortes de ruptures se font le plus souvent, au rapport de M.rs Morgagni & Senac, mais à la base, dans l'endroit où le cœur paroît le plus fort par sa structure tendineuse.

Le ventricule du cœur, dans lequel cette ouverture contre nature, s'est faite, n'étoit pas plus dilaté qu'il ne l'est ordinairement, & ses parois n'étoient point ramollies, comme M.rs Senac & Morgagni l'ont trouvé dans des cœurs couverts de graisse, & qui s'étoient rompus, ce qui fait même une exception à ce qu'ils ont avancé; car ces célèbres Anatomistes ont cherché à attribuer à quelque altération dans la texture du cœur, la cause disposante de sa rupture. Ils croyoient que la graisse ramassée sur le cœur, en ramollissoit considérablement les fibres, ce qui faisoit que le sang, en le distendant pendant la diastole, terminoit par le rompre; ils ont aussi attribué quelquefois la première cause de cette rupture à un ulcère qui avoit rongé le cœur, lequel, tellement aminci, n'avoit enfin pu résister à l'impulsion du sang, ou même que l'ulcère avoit terminé par faire une ouverture complète au cœur, ce qui avoit donné lieu à une irruption du sang dans le péricarde.

Toutes

Toutes ces causes ont eu lieu, & leur existence a été confirmée par les observations que les Médecins que nous avons cités, ont rapportées & savamment discutées; mais dans le cœur dont il s'agit, il n'y avoit ni ramollissement, ni aucune trace d'ulcère, il paroît au contraire qu'il jouissoit de toute sa force, & que c'est moins par un défaut de solidité dans ses parois, que par un surcroît de résistance qu'elles n'ont pu vaincre, qu'elles ont crevé, ce qui aura eu lieu lors de la contraction, ou pendant la systole du cœur.

On ne peut raisonnablement admettre que la rupture du cœur se fasse pendant la diastole, comme M.rs Senac & Morgagni le croyoient, sans admettre, comme ils l'ont fait, une extension plus ou moins grande des fibres du ventricule, avant la rupture qui en augmente plus ou moins la capacité; mais comme dans ce cas, & dans quelques autres que je pourrois citer, le ventricule où l'on a trouvé la déchirure n'étoit pas plus ample, on doit conclure que ce n'est pas par une forte extension qu'elle s'est faite.

Si cette opinion étoit fondée, le cœur s'ouvriroit toujours à la *poitrine* des ventricules, où la paroi est aussi mince entre quelques trousseaux du réseau musculeux, que la plus fine membrane; or, ces observations démontrent le contraire.

Tous les trousseaux musculeux se rapprochent fortement pendant la contraction de cet organe; les vides qu'ils laissent pendant la dilatation du cœur, disparoissent, & ils forment une paroi infiniment plus solide que celle qu'on voit dans le cadavre; aussi arrive-t-il rarement que ce soit dans cet endroit que le cœur se déchire, ainsi qu'on peut le voir en lisant mes Observations & celles qui ont été recueillies par les Anatomistes. Les ruptures qui surviennent aux autres muscles, peuvent donner un surcroît de preuves à mon opinion; on en a vu plusieurs se rompre à la suite de violentes convulsions, ou de leurs excessives contractions; M. de Haller en cite des exemples mémorables.

D'ailleurs, quelles seroient les puissances qui pourroient pousser le sang dans les ventricules, avec assez de force

pour en faire crever les parois? ce ne pourroit être que les veines-caves & les oreillettes; mais leur tissu étant encore infiniment plus foible que celui des ventricules, on ne peut leur attribuer un pareil effet, à moins qu'on ne supposat que le tissu des ventricules fut extrêmement relâché, ce qui n'avoit point lieu dans la circonstance présente.

Une Dame, âgée de soixante-cinq ans, maigre, & d'une sensibilité extrême, éprouvant depuis long-temps des palpitations de cœur, qu'on croyoit spasmodiques, faisoit un grand usage des bains tièdes; on lui conseilla de les prendre froids, & bientôt on lui dit d'y joindre de la glace, & même d'en mettre sur la tête, dans une grande vessie, ce qu'elle exécuta fidèlement. Cependant la saison étant devenue très-froide, cette Dame crut devoir continuer de pareils bains, mais ils lui furent si funestes qu'elle y tomba en syncope. On la retira promptement de l'eau pour la mettre dans son lit, on tâcha de l'échauffer par divers cordiaux: vains secours, cette Dame ne put être rappelée à la vie. J'assistai à l'ouverture du corps, qui fut faite par M. Leduc mon Prévôt; & voici ce qu'elle nous apprit d'intéressant: le péricarde étoit tellement dilaté qu'il comprimoit le poumon gauche qui étoit refoulé vers la partie supérieure de la poitrine; il étoit plein de sang, en partie liquide, & en partie grumelé; on découvrit un caillot considérable qui adhéroit à la partie postérieure & supérieure du cœur. Ce caillot ôté, on vit une ouverture d'environ huit lignes de longueur, laquelle aboutissoit dans le ventricule gauche qui étoit plein de sang; l'ouverture de l'aorte étoit très-rétrécie, les valvules étoient aussi dures qu'un cartilage, renversées vers le cœur; deux colonnes charnues longitudinales avoient été déchirées, quelques-unes de leurs extrémités tendineuses étoient adhérentes aux bords de la crevasse; ces bords étoient frangés, inégaux, comme seroient ceux d'un morceau de drap qu'on auroit déchiré par une forte extension. Il n'y

avoit aucune trace d'ulcère; les parois du cœur avoient aussi leur solidité à peu-près naturelle; & ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'auprès de cette ouverture, contre nature, il y avoit une fossette bouchée par une membrane très-mince, qui n'étoit point percée. L'oreillette gauche, les vaisseaux pulmonaires & le ventricule droit étoient très-dilatés, & les parois de celui-ci étoient extrêmement minces; il n'y avoit d'ailleurs aucune altération dans les valvules de l'artère pulmonaire, ni dans le reste de l'étendue de ce canal.

Les ossifications qui se sont formées à l'embouchure de l'aorte dans le ventricule gauche, ont été sans doute la première cause de la rupture du cœur. En rétrécissant le canal de l'aorte, elles ont opposé un obstacle à l'issue du sang, l'oreillette gauche n'a pu se vider avec la même facilité; les veines pulmonaires ont été si fort engorgées, que l'artère pulmonaire n'a pu verser en elles le sang qu'elle avoit reçu du ventricule droit: ainsi de proche en proche il s'est fait un engorgement qui a donné lieu à la dilatation des vaisseaux pulmonaires, à celle des cavités du cœur; & comme le ventricule droit a ses parois beaucoup plus foibles que le ventricule gauche, il est arrivé qu'elles se sont dilatées davantage que celles-ci, lesquelles au contraire se sont déchirées les premières.

Les bains d'eau à la glace auront occasionné un reflux de sang dans l'intérieur du corps; le cœur en aura été surchargé, & le ventricule gauche ne pouvant s'en délivrer par ses contractions, se sera enfin ouvert. Nous avons vu d'autres dilatations du ventricule droit, occasionnées par des ossifications des valvules de l'aorte, ou par d'autres obstacles qui s'opposoient à l'issue du sang du ventricule gauche par l'aorte; ce qui fait voir qu'il faut quelquefois chercher du côté gauche du cœur, les causes des altérations qu'on trouve du côté droit.

Il n'en est pas de même à l'égard des dilatations du ventricule gauche du cœur; les causes qui les produisent

existent toujours en lui, & celles qui ont leur siége dans le ventricule droit, ne peuvent les occasionner. J'ai vu plusieurs fois des dilatations du ventricule droit dans des sujets chez lesquels, non-seulement le ventricule gauche n'étoit pas plus ample que de coutume, mais même étoit plus rétréci: j'en ai cherché la cause, & j'ai constamment trouvé un obstacle qui s'opposoit à la circulation du sang dans l'artère pulmonaire. Je puis citer, entr'autres, une observation de ce genre, que j'ai faite il y a une quinzaine d'années, dans la rue Mazarine: le sieur Masson aimoit passionnément à donner du cor de chasse; il passoit à cet exercice les matinées, & souvent une bonne partie des après-dînées. Il éprouva de la difficulté de respirer & des crachemens de sang; on lui prescrivit divers remèdes, & on lui conseilla sur-tout d'abandonner l'usage du cor de chasse. Ces conseils furent inutiles; à peine fut-il un peu mieux, qu'il reprit le même instrument; il sentit des palpitations de cœur, d'abord légères & passagères, mais elles devinrent en peu de temps très-vives & constantes. Il éprouvoit une suffocation continuelle, & se plaignoit surtout d'une douleur vers le sternum; la respiration devint difficile de plus en plus, son pouls d'une inégalité extrême, les jambes s'enflèrent: la situation la plus commode pour lui, étoit d'être debout ou assis sur un siége très-haut. On remarqua que lorsqu'il étoit couché, il sentoit quelque soulagement lorsqu'on lui comprimoit la poitrine légèrement à diverses reprises; malgré cela il ne pouvoit rester long-temps dans cette situation; il eut des foiblesses, ou plutôt des syncopes fréquentes; ses extrémités restèrent, les deux derniers jours de sa vie, froides comme du marbre: ce malheureux périt dans une espèce de suffocation.

Je me suis convaincu, par l'ouverture du corps, que cette mort avoit été occasionnée par la dilatation du ventricule droit du cœur, qui étoit énorme & plein de sang concret; le sang n'a pu sortir du ventricule droit aussi facilement & en égale quantité qu'il y entroit par l'oreillette

qui lui correſpond, ce qui a donné lieu peu-à-peu à la dilatation de ſes parois; le ventricule gauche s'eſt trouvé rétréci, ce qui arrive toutes les fois que les dilatations du ventricule droit proviennent de quelque embarras dans l'ouverture ou dans le trajet des vaiſſeaux pulmonaires.

Telles ſont les obſervations que je m'étois propoſé de donner à l'Académie, elles prouvent:

1.° Que les ruptures du ventricule gauche du cœur ſont plus fréquentes qu'on ne croit généralement:

2.° Qu'elles peuvent ſurvenir ſans aucune altération, qui ait préalablement affoibli le tiſſu de ce viſcère:

3.° Qu'elles ſont ſouvent l'effet de la contraction, & non de la dilatation du cœur, produite par l'influx du ſang:

4.° Qu'ordinairement, lorſque le ventricule gauche eſt dilaté, le ventricule droit l'eſt auſſi; tandis au contraire que le ventricule droit eſt ſouvent dilaté ſans que le ventricule gauche le ſoit, lequel même eſt alors ſouvent rétréci.

La plupart de ces conſidérations m'ont paru intéreſſantes, ce qui m'a déterminé de les préſenter dans ce Mémoire; perſuadé d'ailleurs que, s'il eſt utile de connoître les moyens induſtrieux que la Nature emploie pour ſa conſervation, il ne l'eſt pas moins de ſavoir comment elle tend à ſa ruine, tant pour lui oppoſer les remèdes convenables lorſqu'il eſt poſſible, que pour s'en abſtenir lorſqu'ils ſont dangereux, ou même inutiles.

Je joindrai à ce Mémoire quelques obſervations ſur la rupture du ventricule & de l'oreillette gauches du cœur, qui m'ont été communiquées par M. Chauſſier, habile Chirurgien de Dijon; elles m'ont paru intéreſſantes & dignes d'être connues de l'Académie.

Le 14 Novembre 1769, M. Chauſſier fut chargé de faire la viſite juridique du cadavre du nommé Étienne Grappin, Laboureur de Saulon. Ce jeune homme, fort & vigoureux, conduiſoit une voiture chargée de pierres; ayant voulu s'aſſeoir ſur un des chevaux, le pied lui gliſſa,

il tomba, & la roue lui passa lentement sur la clavicule gauche près du sternum, & continua son trajet obliquement sur le côté gauche de la poitrine : ce malheureux resta sur la place, sans donner aucun signe de vie.

Après avoir enlevé les tégumens & les muscles, M. Chaussier trouva l'articulation sternale de la clavicule relâchée, & sur tout le côté gauche du thorax une suite de fractures qui s'étendoit obliquement de la partie antérieure à la partie postérieure.

La première côte étoit fracturée près le sternum ; mais cette fracture étoit incomplète, car il y avoit encore à la face externe quelques lames osseuses qui maintenoient la continuité de cette côte ; de sorte que l'on voyoit aisément qu'elle avoit souffert une pression graduée & très-forte. La seconde côte étoit fracturée plus obliquement en dehors ; & il y avoit au corps de cet os deux fractures distantes l'une de l'autre de près de trois pouces, ce qui étoit à peu près la largeur des jantes de la roue. Les autres vraies côtes & la première des fausses étoient également fracturées en deux endroits ; la seconde des fausses l'étoit seulement en un.

Les tégumens ne présentoient aucun vestige de contusion ; il n'y avoit pas une goutte de sang infiltrée dans le tissu cellulaire ; la plèvre étoit entière, le poumon sans altération ; mais le péricarde étoit fort distendu, plein de sang coagulé, l'oreillette gauche étoit déchirée à sa base près le ventricule ; & le déchirement étoit si considérable, que l'on pouvoit facilement porter par cette ouverture deux doigts dans le ventricule gauche.

Il paroît évident à M. Chaussier que la rupture de l'oreillette gauche a été déterminée par la pression exercée sur la crosse de l'aorte ; on ne pourra en douter, si l'on se rappelle la direction & le trajet de la roue ; si l'on considère la situation de la clavicule, le relâchement de son articulation sternale, le poids énorme de la voiture, la lenteur de sa marche. Tandis que la roue cheminoit lentement sur la poitrine, la crosse de l'aorte comprimée

refusoit le passage au sang ; l'oreillette gauche devoit en regorger ; & la force contractive du cœur augmentant par la résistance qu'il éprouvoit, a déterminé la rupture dans l'endroit le plus foible de l'oreillette. C'est ainsi, ajoute ce célèbre Chirurgien, que nous voyons la matrice souffrir une rupture à son fond, par la force de sa propre contraction, toutes les fois qu'il y aura à son col ou au bassin un obstacle assez puissant pour résister à la sortie de l'enfant, &c.

Dans une suite d'expériences que M. Chaussier a faites sur l'irritabilité & la sensibilité des animaux, il a vu les cavités du cœur se dilater, se rompre presque dans l'instant, toutes les fois qu'il arrêtoit la circulation dans les grosses artères.

Si sur un animal vivant on serre par une ligature (ou ce qui est encore plus simple & plus commode) avec une pince le tronc de l'aorte, le ventricule & l'oreillette gauches se déchirent ; mais si on exerce cette pression sur le tronc de l'artère pulmonaire, le ventricule, l'oreillette droite, se distendent, se dilatent considérablement ; les contractions du cœur redoublent, chaque fibre frémit & palpite ; mais M. Chaussier n'a point vu les cavités droites souffrir une rupture.

Deux autres observations, fournies par l'ouverture des cadavres, confirmeront que tout ce qui diminue le diamètre de l'aorte, détermine la dilatation & la rupture des cavités gauches du cœur ; elles appartiennent encore à M. Chaussier.

En Janvier 1771, un homme enfermé à la maison de force, périt subitement dans une violente dispute qu'il eut avec un de ses camarades : son cadavre servit aux démonstrations publiques d'Anatomie que M. Chaussier fait chaque année. Les parois du ventricule étoient amincies, étendues, & il y avoit à sa pointe une rupture oblongue d'environ un pouce.

Dans la dissection de la poitrine, ce Chirurgien trouva près la crosse de l'aorte une tumeur de la grosseur du poing, d'une nature presque cartilagineuse, qui enveloppoit le tronc de l'aorte, un peu au-dessous de la naissance des artères souclavières & carotides.

Cette tumeur avoit dans cet endroit tellement rétréci le diamètre de l'aorte, qu'à peine pouvoit-on y passer l'extrémité du petit doigt.

Depuis la répercussion d'une humeur dartreuse, une jeune fille avoit été sujette à une infinité de maux très-différens. Tantôt elle éprouvoit des douleurs vagues dans les membres, tantôt des douleurs de tête très-vives, des vertiges, des éblouissemens, mais toujours une pesanteur à la région du cœur, un état de langueur habituel, une gêne dans la respiration, souvent des oppressions, quelquefois des palpitations très-fatigantes : la suspension des règles fut regardée comme la cause de ces maux; tous les remèdes furent inutiles. Enfin, le 4 Juillet 1774, après trois ans de douleurs, cette fille périt tout-à-coup dans l'effort d'une toux, & en rendant quelques crachats sanglans : elle étoit alors âgée de vingt-un ans.

M. Chaussier fit l'ouverture du cadavre, & il trouva la cavité gauche de la poitrine pleine de sang, le cœur d'un volume extraordinaire ; le péricarde tellement adhérent à ce viscère, qu'il ne put l'en détacher; l'oreillette & le ventricule gauches étoient tellement dilatés, qu'on pouvoit aisément y mettre les deux poings; leurs parois tellement amincies, qu'à peine pouvoit-on les distinguer de la substance même du péricarde; mais la dilatation anévrismale ne se bornoit pas aux cavités du cœur : les veines pulmonaires étoient également distendues, & il y avoit une rupture à la veine pulmonaire qui revient du lobe gauche. Cette rupture avoit près de neuf lignes, & étoit près l'entrée de la veine dans le poumon : l'aorte avoit son diamètre naturel; mais les valvules sigmoïdes étoient dures, épaisses, avoient la grosseur d'une petite amande, & renfermoient dans leur tissu une substance blanche & épaisse comme du plâtre, ce qui empêchoit la liberté du passage du sang, & avoit produit par degrés le vice d'organisation que M. Chaussier observa aux cavités gauches du cœur.



OBSERVATIONS

OBSERVATION

SUR LA NATURE ET SUR LE TRAITEMENT D'UNE MALADIE SINGULIÈRE.

Par M. PORTAL.

S'IL n'y a qu'une ſeule manière de ſe bien porter & de vivre, il y en a une multitude d'être malade & de mourir *. Depuis long-temps les Grands Anatomiſtes ſe ſont occupés à les connoître; mais il s'en faut de beaucoup que cette importante partie de la Médecine ſoit portée à ſon dernier degré de perfection.

A proportion qu'on ſe livre à l'étude des cauſes de nos maux, il ſemble qu'on en voit augmenter le nombre; cependant comme on ne parviendra jamais à les traiter avec ſuccès, que lorſqu'on ſera parvenu à les connoître, on comprend combien il importe pour les progrès de la Médecine, que ceux qui l'exercent, rendent publiques les obſervations particulières que la pratique leur fournit.

C'eſt ce qui m'engage de faire connoître l'hiſtoire d'une maladie ſingulière qu'a éprouvée le fils de M. le Prince Giuſtiniani, Romain. Il étoit d'une foible conſtitution, cependant il étoit parvenu juſqu'à l'âge de onze ans ſans éprouver de grandes maladies. C'eſt à cette époque qu'il commença à reſſentir quelques dérangemens dans les fonctions de l'eſtomac; il n'eut d'abord que de légères envies de vomir, quelques heures après le repas; mais bientôt il éprouva, après avoir mangé, de violentes douleurs dans la région de l'eſtomac; ces douleurs étoient ſuivies de

* *Multas rerum Natura mortis vias aperuit, & multis itineribus fata decurrunt. Et hæc conditio miſerrima humani generis, quòd naſcimur uno modo, multis morimur.* Annæi Senecæ controverſ. lib. VII, contr. I.

mouvemens convulsifs: il maigrit & dépérit de jour en jour.

On consulta les Médecins les plus célèbres de Rome, & plusieurs autres Médecins étrangers qui avoient de la réputation; on fit divers remèdes, mais sans succès; ce qui détermina les parens du jeune Prince, de le conduire à Paris pour l'y faire traiter.

Je fus appelé pour lui donner mes soins: voici quel étoit son état.

Environ deux heures après qu'il avoit pris quelque nourriture, il commençoit à éprouver une douleur obscure dans le bas-ventre vers la région de l'estomac; cette douleur se prolongeoit du côté gauche sous les fausses côtes; sa respiration devenoit gênée de plus en plus; ses forces diminuoient, & dans peu il étoit obligé de s'asseoir accablé de fatigue. Après quelques instans il sentoit sa respiration devenir plus difficile, son visage rougissoit, ses yeux se gonfloient, devenoient saillans & très-fixes; il éprouvoit un violent resserrement au gosier, ce qui le forçoit à sortir la langue hors de la bouche, à diverses reprises, plus ou moins vîte, suivant le degré d'étouffement qu'il éprouvoit: sa langue étoit alors d'un rouge violet & d'une épaisseur singulière; chaque expiration étoit accompagnée d'un cri plaintif, & qu'on entendoit de très-loin.

Le malade logeoit alors sur le Jardin du Palais-Royal, d'où l'on entendoit ses cris, qui attiroient tous les jours sous ses fenêtres une multitude de personnes.

Dans cet état, il faisoit des efforts continuels pour se relever de son siége; mais à peine s'en étoit-il un peu éloigné, qu'il étoit forcé de se laisser tomber dans son fauteuil. Deux personnes l'aidoient dans ce cruel exercice pour l'empêcher de se blesser; il se relevoit & s'abaissoit environ vingt fois par minute; ce qui duroit depuis trois quarts-d'heure, jusqu'à une heure & demie.

M. le Prince Giustiniani avoit alors environ vingt ans, & il y en avoit neuf qu'il étoit dans un état à peu-près

pareil, & toujours environ deux heures après qu'il avoit mangé.

Cet état se terminoit par deux ou trois violentes expirations; le malade quittoit alors son siége & pouvoit rejoindre la compagnie; mais on juge bien qu'il étoit d'une foiblesse extrême, soit pour le moral, soit pour le physique. Il étoit d'une maigreur singulière; son teint étoit couperosé, il dormoit beaucoup, & sa foiblesse l'obligeoit de rester long-temps au lit; il ne pouvoit soutenir que de très-petites promenades, quoiqu'il aimât mieux se mouvoir, que de rester très-peu de temps debout sans marcher.

Les fonctions de son esprit étoient très-retardées pour son âge, mais on voyoit que cet état de foiblesse dans l'esprit tenoit à la foiblesse du physique: les facultés de l'ame peuvent-elles se développer quand le corps souffre un dépérissement continuel?

J'ai vu M. le Prince Giustiniani dans l'état que je viens d'exposer, & comme il étoit très-ancien, & que le malade avoit d'ailleurs été traité par des Médecins d'un grand nom, j'ai hésité d'entreprendre une pareille cure; cependant la singularité de cette maladie, & la triste situation du malade, m'ont inspiré le plus vif intérêt.

Je me suis fait rendre un compte exact des divers traitemens qui avoient été faits, & l'on pense bien que dans l'espace de neuf ans, ce malade qui avoit consulté beaucoup de Médecins, avoit fait un grand nombre de remèdes; il étoit important que je les connusse: souvent rien ne conduit mieux un Médecin à la découverte d'un bon remède, que la connoissance de ceux qui n'ont pas réussi, ou même qui ont été contraires.

Quelques Médecins, persuadés que l'estomac du jeune malade manquoit de ressorts, lui avoient fait prendre divers remèdes chauds. D'autres, qui avoient attribué la cause de la maladie à un excès d'irritation & de sensibilité dans cet organe, avoient donné des remèdes contraires aux premiers. Enfin il y avoit eu des Médecins qui avoient

cru pouvoir attribuer à des vers dans les voies alimentaires, la cause de la maladie, & qui avoient prescrit les remèdes qu'ils croyoient utiles d'après cette indication. Les erreurs de ces Médecins me conduisirent à de nouvelles recherches.

Je ne pouvois croire qu'un estomac trop relâché pût donner lieu à des vomissemens qui ne s'opèrent que par de fortes contractions de ce viscère. Je ne pouvois non plus admettre pour unique cause de cette étrange maladie, un excès de sensibilité & d'irritabilité d'estomac, quand je savois que le malade gardoit les alimens deux heures, quelquefois davantage, sans éprouver la plus petite douleur. Enfin étoit-il croyable que des vers pussent régulièrement, depuis plusieurs années, exciter les mêmes symptômes, à une heure fixe, après le repas, & que le malade n'en ressentît plus ensuite aucune atteinte?

Je crus devoir attribuer à une autre cause la maladie du jeune Prince, mais la difficulté étoit de la découvrir. Je craignois de me liver à des conjectures; le peu de succès des Médecins qui avoient été déjà consultés, devoient me les faire craindre : je crus pouvoir trouver dans le tact des viscères abdominaux, un moyen plus assuré. En effet, je reconnus que la région épigastrique étoit dure & gonflée, qu'il y avoit aussi de la résistance dans les hypocondres, sur-tout dans le gauche. On sentoit, en portant les doigts autour des fausses côtes gauches, une tumeur qui les débordoit d'un travers de doigt; on la sentoit principalement vers l'extrémité antérieure & inférieure de la dernière fausse côte gauche.

Cette tumeur n'étoit point dure au tact, elle obéissoit au doigt, comme si elle eût été formée par une pâte molle; elle étoit plus apparente pendant l'inspiration, & lorsque le malade avoit pris quelques alimens. Je présumai qu'elle avoit son siége dans la rate, dont le sang ramassé en trop grande quantité, augmentoit la capacité de ses diverses cellules.

J'avois déjà trouvé plusieurs rates gonflées de cette sorte, sans aucune autre altération apparente de sa structure, dans des sujets qui avoient éprouvé pendant long-temps des vomissemens, & qui avoient terminé par mourir dans le marasme. Je savois, d'après M. Lieutaud, que l'estomac étoit ordinairement d'autant plus ample que la rate étoit petite, ou d'autant plus rétréci que la rate étoit volumineuse: je savois, par des expériences faites sur des animaux vivans, que lorsque leur estomac est plein d'alimens, leur rate est rétrécie & presque vide de sang ; & je ne doutois pas que la même chose n'eût lieu dans le corps humain, soit d'après la position de la rate entre les fausses côtes gauche, & la grosse tubérosité de l'estomac, soit d'après les observations de M. Lieutaud, déjà citées. J'avois encore vu plus d'une fois (après le grand Baillou) dans des sujets pléthoriques, sur-tout chez les hommes hémorroïdaires & chez les filles qui vont être dans l'âge de puberté, qu'il y avoit un gonflement dans le côté gauche , qui étoit plus apparent après le repas , souvent suivi de vomissemens. J'avois attribué cette tumeur à l'excès de sang dans la rate, occasionné par la compression de ses vaisseaux veineux: Morgagni a trouvé la rate d'un volume monstrueux, dans des sujets , dont la veine splénique étoit comprimée par des tumeurs, par le pancréas lui-même, devenu squirreux.

Ces observations, qu'un examen réfléchi du malade rappela à ma mémoire, me portèrent à croire que dans le jeune malade, l'estomac, pressé & comprimé par la rate, étoit rétréci ; que les alimens ne pouvoient le gonfler, même le distendre suffisamment, qu'ils ne pouvoient aussi en sortir qu'avec peine , ce qui en rendoit le passage douloureux & difficile dans le duodenum , & produisoit les accidens ci-dessus énoncés. J'étois d'autant plus en droit de le croire , que le Prince étoit soulagé lorsqu'il avoit passé le temps de la première digestion; d'ailleurs, il étoit d'une si grande sensibilité, que je pensai que celle de l'estomac devoit être extrême, & que peut-être même

cette ſenſibilité donnoit lieu à une criſpation des parties internes, capable de rétrécir les veines deſtinées à rapporter le ſang de la rate, d'où provenoit ſon gonflement; je dirigeai mon traitement ſur ces indications.

Je conſeillai au malade de faire un grand uſage des remèdes relâchans, pour parvenir à celui des fondans. Il prit en conſéquence une vingtaine de bains tièdes, de ſuite, chaque jour un de deux heures; il but pendant deux ou trois ſemaines beaucoup d'eau de veau, d'eau de poulet, des émulſions.

On ajouta enſuite à ces boiſſons des ſucs dépurés des plantes chicoracées, à petites doſes; mais comme le malade les vomiſſoit ſouvent, ſoit parce qu'ils fatiguoient l'eſtomac par leur poids, ſoit parce qu'ils ne pouvoient pas facilement paſſer par le pylore, je fus obligé d'en faire ſuſpendre l'uſage, & je me bornai enſuite à preſcrire au malade, dans de l'eau commune, trois ou quatre fois par jour, un demi-gros, & même un gros de terre foliée, de tartre criſtalliſé. Ce fut le fondant qu'il ſupporta le mieux; cependant, comme il fut quelquefois ſuivi du vomiſſement, lors même qu'on l'avoit donné à des doſes très-inférieures à d'autres, qui avoient fort bien paſſé, je penſai qu'il falloit attribuer cette variation dans les vomiſſemens, à celle de l'irritation de l'eſtomac, & que ſi on parvenoit à l'émouſſer, on diminueroit les vomiſſemens. Je crus alors qu'il falloit aſſocier les calmans aux fondans, & je preſcrivis des pilules faites avec cinq grains d'*aſſa fœtida*, quatre grains de camphre & un grain de muſc.

Le malade prenoit trois fois par jour ces pilules, après qu'il avoit pris un demi-gros de terre foliée de tartre dans trois onces d'eau de menthe ſimple. On ajoutoit aux pilules du ſoir un ou deux grains de celle de cynogloſſe.

En énervant ainſi la ſenſibilité de l'eſtomac, la terre foliée du tartre n'étoit point rejetée par le vomiſſement, & jouiſſoit, comme fondant, de toute ſon énergie. De

cette manière, le malade parvint, pour la première fois, à prendre des remèdes ſans les vomir; & comme il importoit de lui donner l'aliment que ſon eſtomac ſupportoit le mieux, je le mis à l'uſage du chocolat, qu'il prenoit deux ou trois fois par jour, ce qui fut continué environ ſix ſemaines. Alors le chocolat paſſant parfaitement bien, & le malade n'éprouvant plus aucune eſpèce d'accident, il fut queſtion de le mettre peu-à-peu à l'uſage des alimens ordinaires.

Je crus devoir changer & augmenter ſa nourriture; par degrés; d'abord, on joignit les œufs au chocolat pour en faire une crême; enſuite je permis au malade quelques légumes herbacés, tels que les épinards & la chicorée: enfin, on paſſa ſucceſſivement à l'uſage des viandes hachées, bouillies & enfin rôties. M. le Prince Giuſtiniani parvint ainſi à prendre des alimens ſolides, dont il n'avoit point fait uſage depuis tant d'années.

Je ne puis dépeindre quelle fut la joie qu'il reſſentit le premier jour qu'il put digérer, ſans accident, les alimens qu'il avoit pris pour ſa ſubſiſtance; il ſe défioit de ſon bonheur: tous les jours les mêmes craintes ſe renouveloient, & ce ne fut qu'après un aſſez long eſpace de temps, que ſes digeſtions ne furent plus troublées par de cruelles inquiétudes.

Je ne puis m'empêcher d'obſerver ici, que les alimens les plus doux lui parurent d'abord très-forts au goût, & que ſon palais ne pouvoit ſupporter l'impreſſion de ceux qui avoient un peu plus de ſaveur. Cette ſenſation s'eſt émouſſée par des degrés bien dignes de remarque; ſemblable en cela à ceux qui voient le jour pour la première fois, après une opération de la cataracte, d'abord la plus foible lumière les bleſſe; peu-à-peu ils en ſouffrent une plus vive; enfin, ils la ſupportent, & elle leur devient néceſſaire comme à tous les autres hommes.

La région épigaſtrique, & les hypocondres, ſur-tout le

gauche, qui étoient engorgés depuis si long-temps, devinrent plus souples : la rate avoit perdu de son volume contre nature, & étoit, pour ainsi dire, rentrée dans ses bornes: l'estomac pouvoit plus aisément se dilater, & garder des alimens, ce qui s'est maintenu à peu-près dans le même état.

Cependant, on a remarqué deux ou trois fois, que les régions supérieures de l'abdomen commençoient à s'engorger de nouveau, ce qui a obligé de reprendre l'usage des remèdes que je viens d'indiquer. J'ai conseillé au malade les eaux de Vichy, à la dose de deux verres tous les matins, pendant une vingtaine de jours, & lorsque j'ai cru nécessaire de le purger, ce qui a eu lieu deux ou trois fois, j'ai préféré l'huile de *palma christi* aux autres purgatifs qu'il ne pouvoit supporter.

C'est par ce traitement heureux que M. le Prince Giustiniani est parvenu à digérer, avec facilité, tous les alimens dont on use ordinairement; aussi s'est-il remis à vue-d'œil. Dans l'espace de quelques mois il a repris de l'embonpoint & des forces; son esprit s'est singulièrement développé; & il étoit si content de l'heureux changement qu'il éprouvoit, qu'il ne vouloit plus abandonner l'usage des remèdes que je lui avois prescrits. Cependant je les lui fis diminuer par degrés, & lorsque je me fus bien assuré qu'ils lui étoient inutiles, je les lui fis cesser, en lui recommandant d'y recourir à l'automne & au printemps, pendant l'espace de quelques années; ce qu'il a fait avec succès.

M. le Prince Giustiniani jouit aujourd'hui de la meilleure santé, & fait le bonheur & l'ornement d'une illustre famille.

Depuis cette époque, j'ai eu occasion de me convaincre que diverses maladies, qu'on avoit attribuées à l'estomac, venoient de la dilatation, contre nature, de la rate ou des veines qui en rapportent le sang dans le tronc de la veine-porte, soit que ces causes existassent séparément ou à la fois.

Cette dilatation variqueuse de la rate ou de ses veines, arrive après la cessation de quelques hémorragies critiques, ou lorsque la Nature ne peut les opérer. Elle est plus commune

commune qu'on ne croit, dans les jeunes perſonnes, ſurtout dans celles du ſexe.

Chez elles, le tiſſu ſpongieux de la rate eſt ſi mou qu'elle ſe gonfle facilement par la ſeule ſtagnation du ſang: dans les adultes, rarement c'eſt la rate elle-même qui ſe dilate par cette cauſe; mais cet état alors a lieu dans les veines qui ſont plus ſouples, ce qui eſt ordinairement d'autant plus fâcheux qu'on le méconnoît; & comme pluſieurs de ſes rameaux veineux entourent en quelque manière le pylore, ils ne peuvent ſe gonfler ſans le rétrécir, ce qui donne lieu aux accidens les plus graves, & dont on ne connoît ſouvent la cauſe que par l'ouverture du corps.

Les tuméfactions de la rate ſont d'autant plus dangereuſes, qu'elles ſe forment lentement, & qu'il y a de la dureté dans la partie gonflée; alors la ſtagnation du ſang en eſt plutôt l'effet que la cauſe, & les remèdes différens qu'on eſt obligé de preſcrire, n'ont jamais un effet auſſi prompt, & rarement auſſi efficace.

Cette queſtion mérite d'être approfondie; je me propoſe de la traiter d'une manière plus étendue, dans un autre Mémoire.



OBSERVATIONS
DE MERCURE,
Faites à l'École Royale-militaire.

Par M. D'AGELET. *(a)*

LE quart-de-cercle mural de 7 pieds ½ de rayon, fait par M. Bird, en 1775, pour le compte de M. Bergeret, par les soins de M. de la Lande, m'ayant été confié en 1778, je n'ai cessé d'en faire usage pour le bien de l'Astronomie. Un nouveau catalogue des Étoiles boréales a été le principal objet de mon travail, & j'ai déjà plusieurs milliers d'observations; mais je n'ai pas négligé celles des Planètes, & j'en avois déjà huit cents, lorsqu'au mois de Mars 1782, j'eus l'honneur de présenter à l'Académie mon Journal d'observations. M. de la Lande en a rapporté beaucoup dans le quatrième volume de son Astronomie, en 1781, & dans le huitième volume de ses Éphémérides, en 1783; en voici quelques-unes de Mercure, elles sont rares, c'est ce qui me détermine à les publier dès-à-présent: M. de Lambre, habile Astronome, déjà très-connu de l'Académie, a bien voulu en faire les réductions, ainsi que de celles qui ont déjà paru dans les Éphémérides.

La latitude de mon observatoire *(b)* est $48^d\ 51'\ 5''$, il est à 7,"6 de temps à l'occident de l'Observatoire royal.

(a) M. d'Agelet étant parti pour faire le tour du Monde, au mois de Juillet 1785, il a laissé ses Registres d'observations à M. de la Lande, avec qui il observoit depuis 1768, c'est-à-dire dès l'âge de quinze ans, & cet Académicien s'est chargé de les publier.

(b) Cet observatoire a été démoli en 1786, mais on l'a reconstruit un peu plus près du grand corps de bâtiment de l'École Militaire.

ANNÉES, MOIS & JOURS.	TEMPS MOYEN réduit à l'Obſervatoire.	LONGITUDE OBSERVÉE.	LATITUDE OBSERVÉE.
	H. M. S.	S. D. M. S.	D. M. S.
1779.			
Juin 3	22. 26. 26	1. 20. 40. 9	3. 49. 6 A.
1780.			
Janv. 14	22. 31. 32	9. 1. 14. 59	2. 26. 37 A.
21	22. 27. 10	9. 7. 31. 30	1. 7. 35 A.
Mai 27	22. 26. 6	1. 14. 21. 59	2. 53. 48 A.
28	22. 26. 32	1. 15. 46. 11	2. 47. 8 A.
29	22. 28. 11	1. 17. 13. 15	2. 39. 56 A.
Juin 2	22. 36. 45	1. 23. 27. 54	2. 5. 59 A.
8	22. 56. 0	2. 4. 8. 36	1. 3. 49 A.
9	23. 0. 0	2. 6. 4. 11	0. 52. 43 A.
Juillet 29	1. 51. 20	5. 4. 5. 6	1. 1. 54 A.
30	1. 51. 0	5. 5. 6. 55	1. 13. 7 A.
Sept. 12	22. 49. 53	5. 3. 18. 5	0. 33. 45 B.
Oct. 8	0. 49. 55	8. 3. 11. 42	2. 0. 50 A.
1781.			
Mars 7	1. 3. 46	0. 1. 46. 14	0. 17. 36 B.
10	1. 9. 28	0. 6. 49. 9	0. 55. 48 B.
13	1. 12. 49	0. 11. 13. 3	1. 35. 12 B.
14	1. 13. 19	0. 12. 30. 31	1. 47. 49 B.
15	1. 13. 24	0. 13. 41. 11	2. 0. 31 B.
16	1. 13. 9	0. 14. 45. 49	2. 12. 24 B.
17	1. 12. 28	0. 15. 43. 9	2. 23. 53 B.
18	1. 11. 21	0. 16. 33. 19	2. 34. 30 B.
Juillet 5	1. 50. 35	4. 8. 51. 13	0. 48. 4 B.
Août 25	22. 51. 0	4. 15. 28. 47	0. 40. 50 A.



MÉMOIRE

Sur le premier Drap de Laine superfine du crû de la France.

Par M. DAUBENTON.

Relû le 9 Juin 1784.

JUSQU'À PRÉSENT on n'a pu faire des Draps fins qu'avec la laine achetée chez les Eſpagnols; mais cette Nation qui a déjà établi aſſez de Manufactures pour employer toutes ſes Soies, ne manquera pas de garder toutes ſes Laines, dès que ſes Fabriques de draps pourront les conſommer en entier: alors il ne ſe feroit plus de draps fins en France, & nous ſerions obligés de les tirer de l'Eſpagne.

M.rs de Trudaine ayant prévu ce grand inconvénient pour le Commerce, me firent l'honneur de me conſulter en 1766, afin de ſavoir s'il ſeroit poſſible d'améliorer les laines de France, au point de ſuppléer aux laines étrangères, dans nos Manufactures de draps fins. Les obſervations que j'avois faites depuis long-temps ſur les races métiſſes des animaux domeſtiques, me firent penſer que par un bon choix des béliers & des brebis pour leurs alliances, on pourroit rendre leurs laines plus fines ou plus longues. D'après cette conſidération, M.rs de Trudaine me proposèrent de faire les expériences néceſſaires pour cet objet; je m'en chargeai avec d'autant plus d'eſpérance de ſuccès, que le climat de la France me paroiſſoit plus favorable aux bêtes à laine, que celui de l'Eſpagne ou de l'Angleterre, parce qu'il y a moins de chaleurs en France qu'en Eſpagne, & moins de brouillards qu'en Angleterre.

M.rs de Trudaine obtinrent de M. de l'Averdy, alors Contrôleur général des finances, tout ce qui étoit néceſſaire pour mes expériences. Le Gouvernement fit venir

ſucceſſivement des béliers & des brebis de Rouſſillon, de Flandre, d'Angleterre, de Maroc, du Tibet & d'Eſpagne. Je mis toutes ces races de bêtes à laine dans la bergerie que j'ai établie près de la ville de Montbard, dans un canton un peu montueux, & par conſéquent favorable à la production des laines ſuperfines qui étoient mon principal objet. Je ne conſtruiſis point d'étables, je tins tous ces animaux en plein air nuit & jour pendant toute l'année, ſans aucun abri: cette expérience eut un entier ſuccès, dont je rendis compte à l'Académie, en 1769, dans une Aſſemblée publique.

J'alliai les béliers dont la laine étoit la plus fine, avec des brebis à laine jarreuſe, qui avoient autant de poil que de laine, pour juger par ces extrêmes, de l'effet de la laine du bélier ſur celle de la brebis: je fus très-ſurpris de voir ſortir de ce mélange un bélier à laine ſuperfine. Cette grande amélioration me donna d'autant plus d'eſpérance pour le ſuccès de mon entrepriſe, qu'elle avoit été produite par un bélier de Rouſſillon; car je n'avois point alors de béliers d'Eſpagne.

En 1776, il me vint des béliers & des brebis d'Eſpagne; alors j'eus ſept races de bêtes à laine très-diſtinctes, y compris la race de l'Auxois, qui eſt le pays où ma bergerie eſt ſituée. J'ai perpétué juſqu'à préſent toutes ces races ſans mélange, pour ſavoir ce qu'elles deviendroient dans ma bergerie: j'ai auſſi allié ces ſept races entr'elles, pour avoir d'autres races métiſſes, & pour connoître à quel degré elles influeroient les unes ſur les autres, relativement à l'amélioration des laines.

Par ces expériences, ſuivies avec les plus grandes précautions pour qu'il n'y eût point d'équivoque, j'ai amené toutes les races de ma bergerie au degré de fineſſe de la laine d'Eſpagne, ſans tirer de nouveaux béliers de ce pays ni de Rouſſillon. On peut voir les preuves réelles de ces faits, ſur les troupeaux de ma bergerie, & ſur un petit

troupeau que j'ai fait venir à la ménagerie de l'École vétérinaire d'Alfort près de Charenton.

J'ai trouvé de la difficulté à me convaincre moi-même de cette belle amélioration : il y a des degrés de fineſſe dans les laines, qu'il eſt impoſſible de diſtinguer au doigt ni à l'œil; lorſque j'y fus parvenu, je ne pouvois plus ſavoir ſi j'améliorois ou ſi je détériorois les laines par de nouveaux mélanges de races. Alors j'apportai des échantillons de ces laines à Paris, & après avoir conſulté les meilleurs connoiſſeurs en ce genre, je les trouvai auſſi incertains que moi, & j'en conclus que ni les gens qui vendent la laine d'Eſpagne, ni ceux qui l'achettent, ni les Manufacturiers qui l'emploient, n'en peuvent pas diſtinguer les différens degrés de fineſſe avant d'en avoir fait du drap.

Cependant il falloit néceſſairement que je miſſe de la préciſion dans les réſultats de mes expériences : pour y parvenir, j'imaginai de meſurer le diamètre des filamens de la laine, par un micromètre appliqué au microſcope. Ce moyen me réuſſit parfaitement, il me fit voir clairement les progrès de l'amélioration des laines : ce moyen eſt auſſi le ſeul qui puiſſe éclairer, à l'inſpection de la laine, le Manufacturier, ſur le degré de fineſſe que doit avoir le drap qu'il va fabriquer : mais le microſcope n'étant pas entre les mains de tout le monde, j'ai indiqué aux propriétaires de troupeaux & aux bergers, une manière fort aiſée de reconnoître les différens degrés de la fineſſe des laines : le détail de ces procédés eſt dans les Mémoires de l'Académie de 1777, & dans l'Inſtruction des Bergers, que j'ai publiée en 1782.

Après m'être aſſuré que mes laines étoient parvenues au degré de ſuperfin, il falloit encore les éprouver dans la fabrication du drap, & comparer celui qui en feroit fait, avec le drap de laine d'Eſpagne. L'année dernière, j'ai envoyé à M. l'Entrepreneur de la Manufacture royale de draps de Château-du-parc près de Châteauroux en

Berri, huit cents vingt-huit livres de mes laines lavées à dos : avant d'en faire le prix, il en a fait des draps de différentes couleurs; après ces épreuves, il s'est engagé à les payer au plus haut prix des laines d'Espagne transportées en France, & à un moindre terme pour l'échéance, parce qu'il a reconnu dans les laines que j'ai améliorées, plus de force & de nerf, avec la même finesse à l'œil, la même douceur au toucher; parce que non-seulement elles se sont tirées aussi fin à la filature, mais qu'elles ont souffert un tors beaucoup plus considérable sans se casser; & parce que les Ouvriers ont trouvé que la chaîne des draps fabriqués avec ces laines, étoit plus nerveuse & plus forte qu'avec les laines d'Espagne. Quoique les miennes aient été filées & tissues dans le fort de l'hiver dernier, les draps ont pris un foulage très-ferme, & sont devenus plus forts que les draps de laine d'Espagne, faits en France: ils ont plus de rapport avec ceux que les Anglois fabriquent. Le Manufacturier s'est empressé de faire de ces draps forts avec les laines que je lui ai envoyées, parce qu'il croit qu'ils seront plus durables, qu'ils résisteront mieux à la pluie, & qu'ils auront un meilleur débit dans le commerce du Nord. À présent il va travailler à faire avec ces laines, des draps souples & moelleux comme ceux que nous faisons avec les laines d'Espagne.

La fabrique du premier drap de laine superfine, du crû de la France, est un évènement important pour les Manufactures & pour le Commerce. Les moyens que j'ai donnés pour faire croître des laines superfines, d'après de longues expériences, dans plusieurs Mémoires & dans l'Instruction pour les Bergers, sont faciles & peu dispendieux; si nous les mettons en exécution, nous pourrons faire des draps fins avec nos laines. La durée de cette amélioration est déjà prouvée par seize ans d'expériences sur les laines de Roussillon, & par huit ans sur les laines d'Espagne.

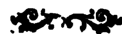
Il y a en France plusieurs exemples de l'amélioration des laines à un grand degré de finesse: les propriétaires

de troupeaux, qui ont acquis des béliers dont la laine étoit plus fine que celle des brebis du pays, ont eu la satisfaction de voir leurs laines se perfectionner & augmenter de prix: des béliers & des brebis d'Espagne se sont déjà perpétués pendant nombre d'années dans plusieurs de nos provinces, sans avoir dégénéré. Je suis très-convaincu par ma propre expérience & par beaucoup d'autres, que tous les pays montueux de la France peuvent produire des laines superfines, & que nous aurons des laines très-longues dans les pâturages abondans de nos plaines.

J'ai vu avec plaisir les sages règlemens que l'Administration provinciale de Berri a faits pour l'établissement d'une école de Bergerie & de Parcage, & je me suis empressé de donner un de mes bergers pour en être le maître; j'enverrai aussi des béliers de ma bergerie, qui m'ont été demandés pour cette province.

Les bêtes à laine étrangères ne sont pas nécessaires pour multiplier en France les laines superfines & les laines longues: des béliers choisis dans le Roussillon & dans la Flandre en produiront bientôt, si nous prenons de l'émulation, comme les Anglois, pour faire valoir nos troupeaux, & si le Gouvernement la favorise. Peut-être le besoin nous rendroit-il encore plus actifs: si l'Étranger refusoit de nous vendre des laines superfines, nous ferions promptement des efforts pour faire croître ces laines en France, plutôt que de renoncer à la fabrication & au commerce des draps fins.

L'heureux succès des épreuves que j'ai faites avec soin sur les troupeaux & sur les pâturages, pendant dix-huit ans, m'encourage à les continuer avec la même exactitude dans tout ce qui peut contribuer à l'amélioration des bêtes à laine. Je publierai incessamment une Instruction sur la culture & l'emploi des Pâturages.



ADDITION

ADDITION AU MÉMOIRE
SUR LE
PREMIER DRAP DE LAINE SUPERFINE DU CRÛ DE LA FRANCE.

Par M. DAUBENTON.

LORSQUE j'ai lû à l'Académie un Mémoire ſur le premier Drap de laine ſuperfine du crû de la France, on n'avoit encore fabriqué que du drap fort avec les laines que j'ai améliorées : la mauvaiſe ſaiſon de l'hiver n'avoit pas permis de les filer aſſez fin, & de les fouler aſſez pour avoir des draps ſouples. On vient de faire de ces draps avec mes laines, à la Manufacture royale du Château-du-Parc ; le Manufacturier a jugé qu'ils étoient auſſi doux que ceux qui ſont faits avec la plus belle laine d'Eſpagne, & il a remarqué dans chacune des opérations ſucceſſives de la fabrique, que la laine améliorée avoit un nerf particulier, c'eſt-à-dire, plus fort & plus ſenſible que celui de la laine d'Eſpagne. On avoit déjà obſervé la même qualité de laine, en fabriquant le drap fort dont il s'agit dans le Mémoire précédent. Lû le 28 Août 1784.

Ces obſervations donnent lieu de préſumer que les laines qui ſeront améliorées dans l'intérieur de la France, pourront être, non-ſeulement auſſi fines, mais encore plus fortes & plus nerveuſes que les laines ſuperfines d'Eſpagne, & que cette force ſera d'autant moindre avec la même fineſſe, que les troupeaux ſe trouveront dans les provinces de France les plus méridionales : cette préſomption eſt fondée ſur mes propres expériences, & de plus, ſur le produit de la grande importation de bêtes à laine, qui fut faite, dans le quinzième ſiècle, d'Eſpagne en Angleterre.

Les Anglois diſtribuèrent mille béliers & deux mille

brebis de Castille, dans leurs provinces, chez différens particuliers; c'est-là l'époque principale de l'amélioration des laines angloises. Quel a été le produit de cette importation? qu'est devenue la laine superfine de Castille, dans les provinces d'Angleterre? elle a dégénéré de sa qualité de superfine, mais elle a acquis une autre qualité; elle s'est accrue en longueur, sur un sol frais & fertile, dont les pâturages abondans sont entretenus par l'humidité des brouillards.

En considérant l'état actuel des laines de France, nous voyons que les plus fines se trouvent naturellement dans des lieux élevés, tels que le Roussillon, qui est au pied des Pyrénées, la Bourgogne près de la source de la Seine, le Berri près des sources de l'Indre & du Théols: au contraire, les plus longues laines sont dans les plaines des provinces les plus basses, sur-tout dans la Flandre. Ce fut dans ce pays & dans le Brabant, qu'il y eut, au quatorzième siècle, une récolte de laine si abondante & si avantageuse aux habitans, que leur Souverain, Philippe-le-Bon, Duc de Bourgogne, voulut, dit-on, en perpétuer la mémoire, par l'institution de l'ordre de la Toison d'or.

On dit que dans le dernier siècle, on introduisit en Flandre une nouvelle race de bêtes à laine, que les Hollandois avoient tirée des grandes Indes, & établie sur les bords du Texel. Cette race est encore aujourd'hui fort abondante en laine longue; à en juger par les individus que j'ai disséqués, elle m'a paru différer des autres races, par la conformation, car j'y ai trouvé sept vertèbres dans les lombes, tandis que je n'en ai vu que six dans les individus des autres races. Cette conformation annonce que la race des bêtes à laine de Flandre, est susceptible d'une grande amélioration pour la taille de l'animal, & pour la quantité & la longueur de sa laine; il est à croire qu'elle surpasseroit les meilleures races angloises, quoiqu'il y ait déjà quelques-uns de leurs individus, dont la laine a jusqu'à vingt-deux pouces de longueur.

La Nature se modifie de mille manières dans les animaux domestiques, par les alliances; nous en voyons tous les jours des exemples aussi incontestables qu'évidens. Les Naturalistes conviennent que tous les chiens sont de même race, on en a de bonnes preuves; cependant le grand danois est de très-haute taille, en comparaison des chiens les plus petits; le poil du lévrier est court, tandis que celui du chien-loup est beaucoup plus long; le mâtin a un poil gros & fort, au contraire celui du chien-bouffe est fin & souple: toutes ces différentes races d'une même espèce, viennent principalement des alliances de différens individus. L'espèce des moutons doit être sujette aux mêmes variétés; nous avons déjà beaucoup de races de ces animaux, nous en ferons autant que nous le voudrons, comme il s'en est fait & comme il s'en fait tous les jours parmi les bœufs, les chèvres, les cochons, les lapins, les chats, &c. c'est une loi générale dans la Nature; tous les caractères des animaux qui ne sont pas essentiels à leur espèce, peuvent changer, & former, pour ainsi dire, une infinité de races.

Ces races se maintiennent aisément si l'on a soin d'allier leurs individus bien caractérisés, sans aucun mélange d'autres races: nous avons des exemples toujours subsistans de cette succession, dans les races soignées des chiens de chasse, & même dans des races peu soignées, telles que les cochons de Siam, les chiens de bergers, les chats d'Espagne, &c. une preuve encore plus convaincante, c'est mon expérience sur les races de moutons de Roussillon & d'Espagne, que j'ai maintenues pendant plusieurs années à une grande distance des pays dont elles sont originaires, & dans un climat différent.

L'intérêt que M. de Calonne, Contrôleur général des finances, a pris à mon Mémoire *sur le premier drap de laine superfine, du crû de la France;* & son empressement à le mettre sous les yeux du Roi, & à le faire imprimer pour le répandre promptement dans le Public, prouvent que

ce Miniſtre projette de favoriſer l'amélioration des laines. Sur ce qu'il m'a fait l'honneur de me dire à ce ſujet; je ſuis perſuadé qu'il diſcutera avec autant de diſcernement que d'attention, les meilleurs moyens de faire cette amélioration, & qu'ils ſeront exécutés avec cette ſageſſe & cette prudence d'adminiſtration, ſi néceſſaires pour faire réuſſir, dans un grand royaume, des pratiques d'agriculture nouvelles & importantes.

M. le Comte de Vergennes eſt auſſi convaincu de la néceſſité preſſante d'améliorer les laines de France, pour le bien du Commerce; ce Miniſtre veut y contribuer lui-même, en faiſant améliorer dans ſes terres, des troupeaux qui ſeront ſoignés par un berger formé dans ma bergerie.



MÉMOIRE
SUR L'EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA GÉNÉRATION DES SURFACES COURBES.

Par M. MONGE.

D'APRÈS les premières notions de l'application de l'Analyse à la Géométrie, l'on sait qu'une équation algébrique quelconque à deux variables, exprime la relation qu'ont entr'elles les coordonnées d'une certaine courbe; que les constantes qui entrent dans cette équation, sont des fonctions des paramètres de la courbe, c'est-à-dire, des droites qui doivent servir à sa construction; & que lorsqu'on assigne à ces constantes des valeurs particulières, la courbe à laquelle appartient l'équation, est absolument déterminée. Mais si l'on donne à ces constantes successivement différentes valeurs, la courbe, sans changer de caractère, change de forme & de position, en sorte que si l'on regarde les paramètres comme susceptibles de toutes les valeurs possibles, l'équation dans laquelle les constantes ont alors des valeurs arbitraires, n'appartient plus à une courbe particulière; elle exprime le caractère dont on vient de parler, c'est-à-dire, une propriété commune à toutes les courbes d'une même famille, & pour lesquelles ces paramètres sont indifférens: il en est de même des équations à trois variables pour les surfaces courbes.

On peut exprimer de deux manières, que des paramètres sont arbitraires, 1.° en les représentant par des caractères d'un genre particulier, comme on représente les quantités constantes par les premières lettres de l'alphabet, & les variables par les dernières; 2.° en différenciant l'équation algébrique successivement autant de fois qu'il y a

de paramètres, & éliminant enſuite ces paramètres à l'aide des équations différentielles : l'équation aux différences ordinaires, à laquelle on arrive par ce moyen, exprime la propriété dont jouiſſent toutes les courbes ou toutes les ſurfaces de la même famille, indépendamment des paramètres qui ont diſparu par la différentiation, & qui par conſéquent ſont indifférens.

Pareillement, ſi l'on conçoit qu'une ſurface courbe ſoit engendrée par le mouvement déterminé d'une certaine courbe, & que cette courbe ſoit donnée, c'eſt-à-dire, que l'on connoiſſe comment deux de ſes coordonnées ſont fonctions de la troiſième, l'équation de cette ſurface ſera parfaitement déterminée; mais elle contiendra les fonctions dont on vient de parler, puiſque par-tout, à la place des deux coordonnées de la courbe génératrice, on aura dû mettre leurs expreſſions par le moyen de la troiſième. Si l'on ſuppoſe donc que ces fonctions viennent à varier de forme, c'eſt-à-dire, que la courbe génératrice change de nature, la ſurface, ſans changer de caractère, variera de forme & de poſition dans l'eſpace; en ſorte que ſi l'on regarde les fonctions comme ſuſceptibles de toutes les formes poſſibles, l'équation ne ſera plus celle d'une ſurface particulière, elle exprimera une propriété commune à toutes les ſurfaces engendrées de la même manière, & pour leſquelles la courbe génératrice eſt indifférente.

On peut de même exprimer de deux manières, qu'une fonction eſt arbitraire, 1.° en la repréſentant par un caractère particulier; 2.° en différenciant l'équation algébrique par rapport à chacune des variables principales, & éliminant enſuite les fonctions par le moyen des équations différentielles: l'équation aux différences partielles, à laquelle on eſt alors conduit, énonce la manière dont la ſurface eſt engendrée, ſans rien ſtatuer ſur la nature de la courbe qui a ſervi à cette génération, & dont il ne reſte aucune trace dans l'équation.

J'ai déjà donné, dans différens Mémoires, les expressions des générations de plusieurs surfaces courbes; par exemple, 1.° l'équation

$$b\frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy} = \frac{ab}{\beta},$$

dont l'intégrale est

$$ax - \beta z = \varphi(ax - by),$$

exprime que la surface est cylindrique, c'est-à-dire, qu'elle est engendrée par le mouvement d'une base quelconque, & qui est indifférente, le long d'une droite, dont les équations sont

$$ax - by = 0,$$
$$ax - \beta z = 0.$$

2.° L'équation

$$y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

exprime qu'une surface est engendrée par la révolution d'une courbe quelconque autour de l'axe des z, sans rien statuer sur la nature de la courbe génératrice, qui est indifférente.

3.° L'équation

$$\frac{ddz}{dx^2} \cdot \frac{ddz}{dy^2} = \left(\frac{ddz}{dxdy}\right)^2,$$

dont l'intégrale est le résultat de l'élimination de V des deux équations suivantes,

$$y - \varphi V = (x - V)\varphi' V,$$
$$z - \psi V = (x - V)\psi' V,$$

ou de ces deux-ci,

$$z = x\varphi V + y\psi V + V,$$
$$x\varphi' V + y\psi' V + 1 = 0,$$

énonce qu'une ſurface eſt développable, c'eſt-à-dire qu'elle eſt engendrée par le mouvement d'une droite qui ne ceſſe pas d'être tangente à une même courbe à double courbure quelconque, courbe qui peut être tout ce qu'on voudra, puiſqu'il n'en eſt pas queſtion.

4.° L'équation qui exprime qu'une ſurface eſt engendrée par le mouvement d'une droite quelconque, ſans rien dire de particulier ſur les trois courbes qui ont dirigé ſon mouvement, eſt

$$m^3 \frac{d^3 z}{dx^3} - 3m^2 \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + 3m \frac{d^3 z}{dx dy^2} - \frac{d^3 z}{dy^3} = 0;$$

en faiſant pour abréger,

$$m^2 \frac{ddz}{dx^2} - 2m \frac{ddz}{dx dy} + \frac{ddz}{dy^2} = 0,$$

& ſon intégrale eſt le réſultat de l'élimination de l'arbitraire z' des deux équations

$$z = x\varphi z' + z',$$
$$y = x\psi z' + \pi z'.$$

Dans les deux premiers exemples, la ligne génératrice eſt indifférente, & c'eſt la loi de ſon mouvement qui eſt énoncée par l'équation aux différences partielles; dans les deux autres, au contraire, les lignes génératrices ſont conſtamment des droites, ce ſont les courbes qui dirigent leurs mouvemens, qui ſont arbitraires, & l'équation différentielle énonce comment le mouvement eſt dirigé.

Je me propoſe dans ce Mémoire, de trouver l'équation qui exprime qu'une ſurface eſt engendrée d'une manière quelconque, par une courbe conſtante de forme & variable de poſition dans l'eſpace, ſans dire rien de particulier ni ſur la nature de la courbe génératrice, ni ſur celles qui dirigent ſon mouvement; mais avant que d'entrer dans cette généralité, je vais commencer par quelques cas particuliers, plus faciles à ſuivre.

I.

I.

Exprimer qu'une ſurface courbe eſt engendrée par la circonférence d'un cercle dont le rayon eſt conſtant, & dont le plan eſt toujours normal à la courbe parcourue par ſon centre

Tout étant rapporté à trois plans rectangulaires, ſoient x, y, z les trois coordonnées de la ſurface demandée, a le rayon du cercle générateur; & x', y', z', les trois coordonnées du centre. Si les équations de la courbe parcourue par le centre, ſont repréſentées par $y = \varphi z$ & $x = \psi z$, on aura $y' = \varphi z'$ & $x' = \psi z'$. Cela poſé, puiſque le rayon du cercle eſt $= a$, on aura

$$(A) \quad (z - z')^2 + (y - \varphi z')^2 + (x - \psi z')^2 = a^2,$$

équation dans laquelle z' doit être déterminé par la conſidération que le plan du cercle eſt normal à la courbe parcourue par le centre. Or cette conſidération comporte que la diſtance du point de la ſurface au point de la courbe, ne varie pas lorſque z' varie; il faut donc que la différentielle de la valeur de a, priſe en ne faiſant varier que z', ſoit nulle; donc on aura pour déterminer z',

$$(B) \quad z - z' + (y - \varphi z')\varphi' z' + (x - \psi z')\psi' z' = 0.$$

Les deux équations (A) & (B) comprennent la ſolution de la queſtion, en ſorte que ſi la courbe parcourue par le centre, étoit donnée, c'eſt-à-dire, que l'on connût les formes des fonctions φ & ψ, en éliminant z' de ces deux équations, on auroit en x, y, z, celle de la ſurface demandée. Mais ſi l'on veut avoir l'équation de la ſurface, indépendamment de la courbe parcourue par le centre du cercle générateur, il faut regarder les fonctions φ & ψ comme arbitraires, & les faire diſparoître par la différenciation.

Dans le cas préſent, cette opération eſt très-facile, car en vertu de l'équation (B), la différentielle de la première,

prise en ne faisant varier que z', étant nulle, il faut différencier l'équation *(A)* par rapport à x, puis par rapport à y, & regarder z' comme constant dans les deux cas; donc si l'on fait, pour abréger, $dz = pdx + qdy$, $ddz = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2$, & $1 + p^2 + q^2 = k^2$, les deux différentielles de l'équation *(A)*, seront

$$(C) \quad (z - z')p + x - \psi z' = 0,$$
$$(D) \quad (z - z')q + y - \varphi z' = 0,$$

qui donnent immédiatement

$$(E) \; (z - z')p + x = \pi\{(z - z')q + y\},$$

π étant une nouvelle fonction arbitraire. Si l'on substitue dans *(A)* les valeurs de $x - \psi z'$ & de $y - \varphi z'$ que donnent les équations *(C)* & *(D)*, on aura

$$z - z' = \frac{a}{k},$$

& l'équation E devient

$$(F) \; \frac{ap}{k} + x = \pi\left\{\frac{aq}{k} + y\right\},$$

qui est délivrée de l'indéterminée z', & qui ne contient plus qu'une fonction arbitraire.

Si l'on fait évanouir cette fonction à la manière ordinaire, c'est-à-dire, en différenciant par rapport à x, puis par rapport à y, on trouve pour équation aux différences partielles secondes,

$$(G) \quad a^2(rt - s^2) + ak[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t] + k^4 = 0.$$

C'est cette équation qui exprime qu'une surface est engendrée par la circonférence d'un cercle constant de rayon, & dont le plan est toujours normal à la courbe parcourue par le centre, sans statuer rien de particulier sur la nature de cette courbe.

II.

On pourroit arriver directement à l'équation *(E)* par les considérations géométriques; en effet, la surface dont il s'agit, jouit de cette propriété, que pour tous les points placés sur la circonférence d'un même cercle générateur, les normales passent par un même point qui est le centre de ce cercle, ce qui n'a pas lieu pour des points placés sur des circonférences différentes; donc la surface est telle, que si sur la normale on prend un point distant de la surface d'une quantité égale au rayon, ce point sera constant ou variable: constant si le point de la surface par lequel on mène la normale, se meut sur la circonférence d'un même cercle: & variable si le point de la surface passe d'un cercle à un autre; donc les coordonnées du point de la normale, varient ensemble & sont constantes ensemble; donc elles sont fonctions l'une de l'autre: il ne s'agit donc plus que de trouver les expressions de ces coordonnées.

Or, les coordonnées rectangulaires d'une surface courbe, étant x, y, z; & celles de la normale, rapportées aux mêmes plans, étant x', y', z', les équations des projections de la normale sur les trois plans rectangulaires, sont

$$(z - z')p + x - x' = 0,$$
$$(z - z')q + y - y' = 0,$$
$$(y - y')p - (x - x')q = 0;$$

donc si l'on prend sur cette normale une quantité $= a$, l'amplitude de cette quantité sera

dans le sens des x $\qquad \frac{ap}{k}$,

dans le sens des y $\qquad \frac{aq}{k}$,

dans le sens des z $\qquad -\frac{a}{k}$;

& parce que les coordonnées du centre sont égales à celles du point de la surface, augmentées respectivement des

amplitudes que l'on vient de trouver, il s'enſuit que les coordonnées ſeront

dans le ſens des x $\quad x + \frac{ap}{k}$,

dans le ſens des y $\quad y + \frac{aq}{k}$,

dans le ſens des z $\quad z - \frac{a}{k}$;

poſant donc que deux de ces coordonnées ſont fonctions l'une de l'autre, on aura trois équations, dont l'une ſera l'équation *(F)*, & qui ſeront chacune indifféremment l'intégrale complète de l'équation *(G)*, qu'elles produiront également par la différenciation.

III.

Enfin on pourroit encore obtenir immédiatement l'équation *(G)*; car pour peu que l'on ſoit accoutumé aux conſidérations géométriques, on voit évidemment que dans la ſurface dont il s'agit, le rayon du cercle générateur eſt un des deux rayons de courbure de la ſurface, & que ce rayon eſt conſtant. Or, l'expreſſion des rayons de courbures d'une ſurface courbe donnée par M. Euler (*Mémoires de Berlin, 1760*), eſt, en nommant R le rayon,

$$R^2(rt - s^2) + Rk[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 - p^2)t] + k^4 = 0;$$

donc pour énoncer la propriété de la ſurface, il faut faire dans cette équation, $R = a$, ce qui donne l'équation *(G)*.

IV.

La manière ordinaire de faire évanouir une fonction arbitraire, eſt, comme nous venons de le pratiquer, de différencier ſucceſſivement l'équation, en regardant x, puis y, comme ſeule variable, ce qui donne deux nouvelles équations, dans leſquelles entrent la fonction arbitraire, & ſa différentielle qui eſt une autre fonction ſur laquelle on ne doit

pareillement rien ſtatuer ; d'éliminer ces deux fonctions des deux équations différentielles & de la propoſée, & le réſultat eſt l'équation aux différences partielles qui énonce la même choſe que l'équation intégrale : cette méthode a l'inconvénient d'introduire, par la différenciation, une fonction de plus à éliminer, ce qui augmente le nombre des équations & le travail de l'élimination. Si au lieu de différencier l'équation, & par rapport à x, & par rapport à y, on la différencie une ſeule fois, en regardant comme conſtante la quantité qui eſt ſous la fonction, 1.° la différenciation devient plus facile, parce que la fonction devient elle-même une conſtante arbitraire ; 2.° l'on n'a qu'une ſeule fonction à éliminer de la propoſée, par le moyen de la différentielle ; mais lorſqu'on regarde comme conſtante la quantité qui eſt ſous la fonction, c'eſt-à-dire, lorſqu'on regarde ſa différentielle comme nulle, les quantités dx & dy ceſſent d'être arbitraires, & l'on établit entr'elles un rapport qu'il faut introduire dans le calcul, & ſubſtituer par-tout dans la différentielle à la place de $\frac{dx}{dy}$.

Par exemple, ſi l'on a une équation en $x, y, z,$ & $\varphi\,\omega$, ω étant donnée en $x, y, z,$ & qu'on différencie cette équation, en regardant ω comme conſtante, ſa différentielle ſera

$$M dx + N dy + P dz = 0,$$

ou à cauſe de

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$M dx + N dy + P(p\,dx + q\,dy) = 0;$$

mais regarder ω comme conſtante, c'eſt ſuppoſer

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\omega}{dy}\right) dy = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{d\omega}{dy} : \frac{d\omega}{dx};$$

donc il faut ſubſtituer cette valeur de $\frac{dx}{dy}$, ce qui donne

$$(M + Pp)\frac{d\omega}{dy} - (N + Pq)\frac{d\omega}{dx} = 0,$$

que l'on trouve également par l'autre méthode, & de laquelle on éliminera la fonction $\varphi\,\omega$, par le moyen de la propoſée.

On voit donc que ſi l'on repréſente par m la valeur de $\frac{dx}{dy}$, qu'on obtient en égalant à zéro la différentielle de la quantité qui eſt ſous la fonction, la différenciation dont il s'agit s'exécute préciſément comme une différenciation ordinaire, avec cela ſeulement de particulier, que par-tout, à la place d'une différentielle ſimple dV, il faut mettre $m\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}$; ainſi, la différentielle de x ſera m, celle de y ſera 1, celle de z ſera $mp + q$; enfin, celle de V^a ſera $aV^{a-1}(m\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy})$, & ainſi des autres.

Il ſuit de-là, que pour faire évanouir une fonction arbitraire d'une équation, il faut 1.° différencier cette équation, en regardant comme conſtante la quantité qui eſt ſous la fonction, & effectuer cette différenciation comme pour les différences ordinaires, avec cette condition, que par-tout, à la place d'une différentielle ſimple quelconque dV, il faut mettre $m\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}$; 2.° éliminer la fonction de la propoſée, par le moyen de la différentielle.

V.

Si, comme dans les recherches de la nature de celles dont il s'agit dans ce Mémoire, la quantité qui eſt ſous la fonction n'eſt pas connue immédiatement, & qu'elle ſoit donnée par une ſeconde équation, dans laquelle elle

ſoit encore ſous des fonctions arbitraires; la quantité m ſera regardée comme une autre indéterminée, dont on aura la valeur, en différenciant la ſeconde équation, d'une manière analogue, ce qui produira l'équation néceſſaire pour l'éliminer.

Si les équations propoſées contiennent pluſieurs fonctions arbitraires de la même quantité, il faudra différencier chaque équation autant de fois qu'il y a de fonctions, en repréſentant par m' la différentielle de m, par m'' celle de m', . . . & ainſi de ſuite, & éliminer les fonctions, ainſi que les indéterminées m, m', m'', ... &c.

Enfin, ſi les équations, outre les fonctions arbitraires φ, ψ. . . contiennent encore leurs différentielles φ', ψ'. . . on opérera, comme l'on vient de dire, & on éliminera autant de fonctions arbitraires & d'indéterminées que le comportera le nombre des équations qu'on aura obtenues; puis on différenciera l'équation réſultante, en regardant comme ſeule variable chacune des indéterminées qui reſteront, ce qui produira des équations nouvelles, en nombre ſuffiſant pour les éliminer.

Avant que de faire uſage de ce procédé, je vais l'éclaircir par des applications à quelques cas connus.

V I.

Soit propoſé de faire évanouir les trois fonctions arbitraires, & l'indéterminée z' des deux équations

$$z = x \varphi z' + z',$$
$$y = x \psi z' + \pi z',$$

qui expriment une ſurface engendrée d'une manière quelconque, par le mouvement d'une droite.

La première, différenciée trois fois de ſuite, donne immédiatement

$$(1) \qquad mp + q = m \varphi z';$$

$$(2) \qquad m' p + m^2 r + 2 m s + t = m' \varphi z';$$

$$(3) \quad m'' p + 3 m' (m r + s) + m^3 \frac{d^3 z}{d x^3} + 3 m^2 \frac{d z^3}{d x^2 d y} + 3 m \frac{d^3 z}{d x d y^2} + \frac{d^3 z}{d y^3} = m'' \varphi z';$$

mais la seconde, par de semblables différenciations, donne aussi directement

$$(4) \qquad 1 = m \psi z';$$

$$(5) \qquad 0 = m' \psi z';$$

$$(6) \qquad 0 = m'' \psi z';$$

introduisant les valeurs $m' = 0$, $m'' = 0$, que donnent les équations (5) & (6) dans les équations (3) & (4), on a

$$m^2 r + 2 m s + t = 0,$$

$$m^3 \frac{d^3 z}{d x^3} + 3 m^2 \frac{d^3 z}{d x^2 d y} + 3 m \frac{d^3 z}{d x d y^2} + \frac{d^3 z}{d y^3} = 0,$$

qui, par l'élimination de m, produisent l'équation aux différences partielles des surfaces généralement engendrées par le mouvement d'une ligne droite, & dont l'intégrale finie & complète est représentée par les deux proposées.

VII.

Soit proposé de faire évanouir les deux fonctions arbitraires & la quantité V des deux équations

$$z - \psi V = (x - V) \psi' V,$$

$$y - \varphi V = (x - V) \varphi' V,$$

qui expriment qu'une surface est développable, d'après la considération qu'elle est engendrée par le mouvement d'une droite qui est toujours tangente à une même courbe à double courbure.

La

La première, différenciée deux fois de suite, donne

(1) $$mp + q = m\psi'V;$$

(2) $$m'p + m^2r + 2ms + t = m'\psi'V.$$

Mais la seconde, différenciée de la même manière, donne

(3) $$1 = m\phi'V;$$

(4) $$0 = m'\phi'V.$$

Substituant dans la seconde, la valeur $m' = 0$, que donne la quatrième, on a

$$m^2r + 2ms + t = 0;$$

équation délivrée des quantités V, ϕV, $\phi'V$, ψV, $\psi'V$ & m', & de laquelle il est impossible d'éliminer un plus grand nombre d'indéterminées, par le moyen des six équations qu'on a employées. Actuellement pour en éliminer m, je le différencie en regardant m comme seule variable, ce qui donne la nouvelle équation

$$mr + s = 0,$$

& par conséquent $ms + t = 0$,

d'où l'on conclut, en chassant m,

$$rt = s^2,$$

équation des surfaces développables, que j'ai déjà donnée.

Ces deux équations suffisent pour faire entendre la méthode que j'emploîrai dans les recherches suivantes; & il est facile d'apercevoir qu'en la retournant, on peut l'appliquer utilement à l'intégration des équations aux différences partielles: nous aurons occasion d'en donner quelques exemples.

VII.

Exprimer qu'une surface courbe est engendrée par le mouvement de la circonférence d'un cercle dont le rayon

est variable d'une manière quelconque, & dont le plan est toujours normal à la courbe parcourue par son centre.

Cette question ne diffère de celle de l'*article I*, que parce que le rayon du cercle générateur, au lieu d'être constant, est une certaine fonction de l'ordonnée du centre; si donc on représente cette fonction par π, & que l'on mette $\pi z'$, au lieu de a, dans les équations (*A*) & (*B*) de l'*article I*, les équations

$$(A) \quad (z - z')^2 + (y - \varphi z')^2 + (x - \psi z')^2 = (\pi z')^2.$$

$$(B) \quad z - z' + (y - \varphi z')\,\varphi' z' + (x - \psi z')\,\psi' z' = 0,$$

qu'on obtiendra, contiendront l'expression demandée; en sorte que si l'on connoissoit la courbe parcourue par le centre, & la grandeur du rayon d'après la position du centre, ce qui détermineroit les formes des fonctions φ, ψ & π, on élimineroit z' de ces deux équations, & on auroit en x, y & z, celle de la surface engendrée. Mais si l'on veut simplement exprimer la génération, indépendamment de la courbe parcourue par le centre, & de la loi du rayon du cercle générateur, il faut regarder ces trois fonctions comme arbitraires, & les éliminer par la différenciation.

Pour cela, je différencie la première, en regardant z' comme constant, ce qui donne

$$(1) \quad (z - z')(mp + q) + (y - \varphi z') + m(x - \psi z') = 0,$$

dans laquelle la fonction π est évanouie. Je la différencie une seconde fois, & faisant, pour abreger,

$$m^2 r + 2ms + t = M, \;\&\; 1 + m^2 + (mp + q)^2 = V;$$

j'obtiens

$$(2) \quad m'\{(z - z')p + x - \psi z'\} + (z - z')M + V = 0,$$

dans laquelle la fonction φ est évanouie. Enfin je la diffé-

renciе une troisième fois, & faisant, pour abréger,

$$m^3 \frac{d^3z}{dx^3} + 3m^2 \frac{d^3z}{dx^2dy} + 3m \frac{d^3z}{dxdy^2} + \frac{d^3z}{dy^3} = N,$$

je trouve

$$m''\{(z - z')p + x - \psi z'\} + 3m'\{(mp + q)p + m + (z - z')(mr + s)\} + 3(mp + q)M + (z - z')N = 0;$$

de laquelle éliminant $x - \psi z'$, par le moyen de la précédente, je tire

$$(3)\ \left.\begin{array}{l}(z - z')\{-m''M + 3m'^2(mr + s) + m'N\} \\ -m''V + 3m'^2\{(mp + q)p + m\} + 3m'(mp + q)M\end{array}\right\} = 0;$$

& parce que chaque différenciation a fait disparoître une arbitraire, cette équation comporte l'équation (A), ainsi que ses différentielles.

Je passe actuellement à l'équation (B) qui donne par la première différenciation

$$(4)\ mp + q + \varphi' z' + m\psi' z' = 0;$$

par la seconde,

$$(5)\ m'(p + \psi' z') + M = 0;$$

& par la troisième,

$$m''(p + \psi' z') + 3m'(mr + s) + N = 0,$$

de laquelle & de la précédente, éliminant $p + \psi' z'$, on obtient

$$(6)\ m''M + 3m'^2(mr + s) - m'N = 0;$$

ces trois différenciations n'ont fait disparoître que deux nouvelles arbitraires, c'est-à-dire, $\varphi' z'$ & $\psi' z'$; mais l'équation (6) faisant évanouir z' dans l'équation (3) qui devient alors

$$(7)\ \left.\begin{array}{l}-m''V + 3m'^2[(mp + q)p + m] \\ + 3m'(mp + q)M\end{array}\right\} = 0;$$

il s'ensuit que toute la solution de la question est contenue dans les équations (6) & (7), desquelles, éliminant m'', on tire

$$3m' \left.\begin{matrix}\{M[(mp + q)p + m] - V(mr + s)\} \\ + 3. M^2(mp + q)\end{matrix}\right\} = NV,$$

équation dans laquelle la quantité m' est absolument arbitraire, & ne peut être déterminée par rien. Pour la faire évanouir, je différencie l'équation, en regardant m' comme seule variable, ce qui donne

$$M[(mp + q)p + m] - V(mr + s) = 0,$$

& par conséquent

$$3M^2(mp + q) = NV,$$

& en éliminant m de ces deux équations, on aura l'équation aux troisièmes différences partielles, demandée.

Donc, en substituant pour M, N & V, les quantités qu'elles représentent, l'équation demandée est le résultat de l'élimination de m des deux équations suivantes:

$$k^2\left\{m^3 \frac{d^3z}{dx^3} + 3m^2 \frac{d^3z}{dx^2dy} + 3m \frac{d^3z}{dxdy^2} + \frac{d^3z}{dy^3}\right\} = 3(m^2r + 2ms + t)\{p(mr + s) + q(ms + t)\},$$

$$\left.\begin{matrix} m^2\{s(1 + p^2) - pqr\} + m[t(1 + p^2) \\ - r(1 + q^2)] - s(1 + q^2) + pqt\end{matrix}\right\} = 0.$$

VIII.

On peut encore résoudre la même question par une autre considération: il est en effet évident que sur la surface dont il s'agit, la courbe génératrice est une ligne de moindre ou plus grande courbure; cette surface est donc telle que pour une même ligne de plus grande ou de moindre courbure, le rayon de cette courbure est constant, & qu'il est variable quand on passe d'une de ces lignes à une autre. Il faut donc exprimer que le rayon de courbure est fonction du paramètre par lequel les lignes de cette

courbure diffèrent les unes des autres; ainsi en représentant ce paramètre par a, & le rayon de courbure par R, le caractère de la surface demandée, est exprimé par l'équation $R = Fa$, F étant une fonction arbitraire.

Or j'ai fait voir dans le Mémoire sur les Déblais & les Remblais, en 1781, que les équations des deux lignes de moindre ou de plus grande courbure d'une surface courbe, sont les racines de l'équation

$$\frac{dx^2}{dy^2}\{s(1+p^2) - pqr\} + \frac{dx}{dy}\left\{\begin{matrix} t(1+p^2) \\ - r(1+q^2)\end{matrix}\right\} - \{s(1+q^2) - pqt\} = 0,$$

& que les valeurs des deux rayons de courbure, sont celles de la suivante,

$$R^2\{rt - s^2\} + Rk\left\{\begin{matrix} r(1+q^2) - 2pqs \\ + t(1+p^2)\end{matrix}\right\} + k^4 = 0.$$

Soit fait, pour abréger,

$$r(1+q^2) - pqs = \alpha,$$
$$t(1+p^2) - pqs = \beta,$$
$$s(1+p^2) - pqr = \gamma,$$
$$s(1+q^2) - pqt = \delta,$$

ces deux équations deviennent

$$(A) \quad \gamma\frac{dx^2}{d\zeta^2} - (\alpha - \beta)\frac{dx}{dy} - \delta = 0;$$

$$(B) \quad R^2(\alpha\beta - \gamma\delta) + Rk^3(\alpha + \beta) + k^6 = 0;$$

dont les racines sont

$$(C) \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\alpha - \beta \pm \sqrt{[(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta]}}{2\gamma};$$

$$(D) \quad R = k^3\left\{\frac{-\alpha - \beta \pm \sqrt{[(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta]}}{2(\alpha\beta - \gamma\delta)}\right\};$$

ſur quoi il faut remarquer que pour une certaine ligne de moindre ou de plus grande courbure, & pour le rayon de cette courbure, les ſignes ſont les mêmes, tandis que ces ſignes ſeroient différens, ſi pour la ligne d'une de ces courbures, on conſidéroit le rayon de l'autre.

Cela poſé, ſi l'on intégroit l'équation *(C)*, la conſtante arbitraire que l'on introduiroit pour compléter cette intégrale, ſeroit conſtante pour toute l'étendue d'une même ligne de courbure, & elle changeroit de valeur en paſſant d'une de ces lignes à une autre: cette conſtante arbitraire eſt donc le paramètre a, par lequel diffèrent les lignes conſécutives de moindre ou de plus grande courbure, & dont le rayon de courbure doit être fonction arbitraire. On doit donc avoir $R = Fa$, ou

$$\frac{da}{dx} \cdot \frac{dR}{dy} = \frac{da}{dy} \cdot \frac{dR}{dx},$$

& parce que l'équation *(C)* donne

$$\frac{da}{dx} = 2\gamma,$$

&

$$\frac{da}{dy} = -\alpha + \beta - \sqrt{[(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta]};$$

l'équation de la ſurface demandée ſera

$$(E) \quad 2\gamma \frac{dR}{dy} = \{-\alpha + \beta - \sqrt{[(\alpha-\beta)^2 + 4\gamma\delta]}\} \frac{dR}{dx},$$

qui, ſi l'on ſubſtitue pour R ſa valeur, priſe dans l'équation *(D)*, & ſi l'on exécute les différenciations indiquées, donnera le même réſultat que les équations de l'*article précédent.*

IX.

Si l'on conſidère que la quantité $\frac{dx}{dy}$, qui eſt dans l'équation *(A)*, eſt ce que nous avons repréſenté par m,

dans la manière de différencier de l'*article IV*, c'est-à-dire, en regardant a comme constante, & que le rayon de courbure R, qui entre dans (B), est une fonction de cette même quantité a, ces deux équations pourront être mises sous la forme

$$m^2\gamma - (\alpha - \beta)m - \delta = 0,$$

$$(Fa)^2(\alpha\beta - \gamma\delta) + k^3 Fa(\alpha + \beta) + k^6 = 0,$$

& comprendront l'intégrale première de l'équation aux différences partielles du troisième ordre, que nous venons de trouver, puisqu'elles ne sont que du second ordre, & qu'elles contiennent une fonction arbitraire; mais parce que ces équations ne renferment plus le radical, elles sont plus générales que l'équation aux différences troisièmes; elles expriment en effet, que pour une même ligne de moindre ou de plus grande courbure, l'une ou l'autre des deux rayons de courbure, indistinctement est constant, tandis que dans la surface dont il s'agit, pour une même ligne de moindre ou de plus grande courbure, c'est le rayon de cette même courbure qui ne varie pas, & non celui de l'autre.

Pour sauver l'ambiguité, c'est dans les équations (C) & (D) qu'il faut mettre m à la place de $\frac{dz}{dy}$, & Fa pour R, ce qui donne,

$$2\gamma m = \alpha - \beta + \sqrt{[(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta]},$$

$$2(\alpha\beta - \gamma\delta)Fa = k^3\{-\alpha - \beta + \sqrt{[(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta]}\},$$

pour intégrale première & complète de l'équation de la surface.

Si l'on donnoit au radical des signes différens dans les deux équations, elles exprimeroient une autre génération de surface, que nous aurons occasion de traiter.

X.

Actuellement, pour intégrer ces équations, j'élimine le radical, ce qui ne rétablit pas l'ambiguité, & donne

$$(\alpha\beta - \gamma\delta)\, Fa = (\gamma m - \alpha)\, k^3,$$

& combinant cette équation avec les deux premières de l'*article précédent*, j'obtiens les deux équations

$$Fa(m\gamma + \beta) = - k^3,$$

& $$Fa(m\alpha + \delta) = - m k^3,$$

qui expriment la même chose que les proposées, & qu'il s'agit d'intégrer : pour cela, je remarque que les quantités α, β, γ, δ, sont des différentielles partielles, & que l'on a

$$\alpha = k^3 \frac{d.\frac{p}{k}}{d\,x};$$

$$\beta = k^3 \frac{d.\frac{q}{k}}{d\,y};$$

$$\gamma = k^3 \frac{d.\frac{q}{k}}{d\,x};$$

$$\delta = k^3 \frac{d.\frac{p}{k}}{d\,y}.$$

Substituant ces valeurs dans les deux précédentes, elles deviennent

$$Fa\left(m \frac{d.\frac{q}{k}}{d\,x} + \frac{d.\frac{q}{k}}{d\,y}\right) = - 1,$$

$$Fa\left(m \frac{d.\frac{p}{k}}{d\,x} + \frac{d.\frac{p}{k}}{d\,z}\right) = - m,$$

qui

qui sont des différentielles exactes, prises en regardant a comme constante; on aura donc en intégrant

$$Fa.\frac{q}{k} = -y + \text{f}\,a,$$

$$Fa.\frac{p}{k} = -x + fa,$$

dans lesquelles f & f sont des fonctions arbitraires, introduites pour compléter les intégrales, & ces deux équations sont l'intégrale seconde & complète de l'équation aux troisièmes différences. Enfin, substituant pour k sa valeur $\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$, ces deux équations donnent pour p & q les valeurs suivantes,

$$p = \frac{x - fa}{\sqrt{[(Fa)^2 - (x - fa)^2 - (y - \text{f}a)^2]}},$$

$$q = \frac{y - \text{f}a}{\sqrt{[(Fa)^2 - (x - fa)^2 - (y - \text{f}a)^2]}},$$

& par conséquent

$$dz = \frac{(x - fa)\,dx + (y - \text{f}a)\,dy}{\sqrt{[(Fa)^2 - (x - fa)^2 - (y - \text{f}a)^2]}},$$

qui est une différentielle exacte, prise en regardant a comme constante, & dont l'intégrale est

$$(z - a)^2 + (y - \text{f}a)^2 + (x - fa)^2 = (Fa)^2,$$

a devant être éliminé par l'équation suivante,

$$z - a + (y - \text{f}a)\,\text{f}'a + (x - fa)f'a = Fa\,F'a,$$

qui exprime que la différentielle de la première, prise en ne faisant varier que a, doit être nulle. Ainsi, ces deux équations sont l'intégrale finie & complète de l'équation aux différences partielles, qui énonce qu'une surface est engendrée par la circonférence d'un cercle variable de rayon, & dont le plan est toujours normal à la courbe, parcourue par son centre.

X I.

Des deux équations intégrales que nous venons de trouver, la première est celle d'une sphère, dont les coordonnées du centre a, fa, $\mathfrak{f}a$, & le rayon Fa, sont fonctions d'un même paramètre; la seconde dit que la différentielle de la première, prise en ne faisant varier que ce paramètre, doit être nulle; leur système appartient donc à la surface qui enveloppe une suite de sphères variables de rayon & de position dans l'espace, c'est-à-dire, que la surface dont il s'agit peut aussi être regardée comme formée par les intersections successives de la surface d'une sphère mobile & variable de rayon, résultat qu'il étoit facile d'observer *a priori.*

Si ces deux équations intégrales ne coïncident pas avec les équations *(A)* & *(B)* de l'*article VII*, quoiqu'elles expriment la même chose, c'est que dans celles-ci l'indéterminée z' est l'ordonnée du centre du cercle générateur, tandis que dans les autres l'indéterminée a est l'ordonnée du centre de la sphère mobile & perpétuellement touchée, ce qui est différent; mais elles rentrent les unes dans les autres par une simple transformation, & elles donnent le même résultat par la différenciation.

Nous sommes entrés dans un grand détail sur cette surface, 1.° pour faire une application de la méthode de différencier & d'intégrer, que nous avons donnée; 2.° parce que cette surface est celle qui, quoique flexible, doit garder sa forme, si on la suppose remplie par un fluide élastique comprimé, comme l'a démontré M. Meusnier.

X I I.

Exprimer qu'une surface est engendrée par la circonférence d'un cercle variable de rayon, & qui se meut d'une manière quelconque dans l'espace.

Soient, comme précédemment, x, y, z, les coordonnées rectangulaires de la surface courbe, & x', y', z', celles

du centre du cercle générateur; si les équations de la courbe parcourue par le centre, sont $y = \varphi z$ & $x = \psi z$, on aura $y' = \varphi z'$ & $x' = \psi z'$, en sorte que si l'on représente par $\pi z'$ le rayon variable du cercle, on aura pour première équation

$$(A)\ (z - z')^2 + (y - \varphi z')^2 + (x - \psi z')^2 = (\pi z')^2,$$

dans laquelle z' doit être déterminé par la loi du mouvement du plan.

Soient de plus $y = \mathrm{f} z$ & $x = f z$, les équations de la courbe à laquelle le plan du cercle générateur est toujours normal; & x'', y'', z'', les coordonnées du point où cette courbe est coupée par le plan, on aura $y'' = \mathrm{f} z''$, $x'' = f z''$; & l'équation qui exprime que le plan est normal à cette courbe, sera, comme dans l'*article I*,

$$z - z'' + (y - \mathrm{f} z'')\, \mathrm{f}' z'' + (x - f z'')\, f' z'' = 0;$$

& parce que la quantité z'' est fonction de z', cette équation peut se mettre sous la forme

$$(B)\ z - z' + (y - \varphi z')\pi z' + (x - \psi z')\varpi z' = 0.$$

Les deux équations *(A)* & *(B)* comprennent l'expression demandée, en sorte que si l'on connoissoit la loi du mouvement du centre, & le rayon du cercle générateur, ce qui détermineroit les formes des cinq fonctions, on élimineroit z' de ces deux équations, & l'on auroit en x, y, z, l'équation de la surface demandée; mais si l'on veut simplement exprimer le caractère de cette espèce de génération, il faut regarder ces cinq fonctions comme arbitraires, & les faire disparoître par des différenciations poussées aux cinquièmes différences, ce qui n'a d'autre difficulté que la longueur du calcul.

XIII.

Exprimer qu'une surface courbe est engendrée par une courbe plane quelconque, qui se meut de manière que

ſon plan ſoit normal aux courbes parcourues par tous ſes points.

On peut encore définir autrement cette ſurface. Concevons qu'un plan ſe meuve comme s'il ſe développoit de deſſus une ſurface développable, & que ſur ce plan ſoit tracée une courbe quelconque fixe dans le plan, elle engendrera, par ſon mouvement, une ſurface de la nature de celles dont il s'agit ici.

Soient x, y, z, les coordonnées rectangulaires de la ſurface, $y = \varphi z$, $x = \psi z$, les équations d'une des courbes auxquelles le plan eſt toujours normal; ſi x', y', z', ſont les coordonnées du point où cette courbe eſt coupée par le plan, on aura $y' = \varphi z'$ & $x' = \psi z'$, & l'équation qui exprimera que le plan eſt normal à la courbe, ſera, comme dans l'*article I.er*

$$(A) \quad z - z' + (y - \varphi z')\varphi' z' + (x - \psi z')\psi' z' = 0,$$

ce qui détermine la valeur de z' en x, y & z.

Actuellement, le caractère de la ſurface eſt que ſi le point que l'on conſidère ſur cette ſurface ſe meut parallèlement à l'élément correſpondant de la courbe normale, c'eſt-à-dire, perpendiculairement au plan, ſa diſtance à la courbe normale

$$\sqrt{[(z - z')^2 + (y - \varphi z')^2 + (x - \psi z')^2]},$$

eſt invariable: or, ce point ſe meut ſuivant cette condition, ſi l'on a $\frac{dx}{dy} = \frac{\psi' z'}{\varphi' z'}$; il faut donc qu'en donnant à $\frac{dx}{dy}$ la valeur $\frac{\psi' z'}{\varphi' z'}$, la différentielle du radical ſoit nulle, ce, qui exécuté à la manière de l'*article IV*, & en vertu de l'équation *(A)*, donne

$$(B) \qquad p\psi' z' + q\varphi' z' = 1.$$

Les deux équations *(A)* & *(B)* renferment la ſolution de la queſtion.

La première, différenciée deux fois de ſuite, en regardant z' comme conſtante, donne

$$mp + q + \varphi' z' + m \psi' z' = 0,$$
$$m' (p + \psi' z') + m^2 r + 2ms + t = 0;$$

la ſeconde, différenciée deux fois de la même manière, donne

$$(mr + s) \psi' z' + (ms + t) \varphi' z' = 0,$$

$$\left.\begin{array}{r} m' (r \psi' z' + s \varphi' z') \\ + \psi' z' \left(m^2 \frac{d^3 z}{dx^3} + 2m \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + \frac{d^3 z}{dx dy^2}\right) \\ + \varphi' z' \left(m^2 \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + 2m \frac{d^3 z}{dx dy^2} + \frac{d^3 z}{dy^3}\right) \end{array}\right\} = 0.$$

Si de l'équation *(B)* & des quatre différentielles, on élimine les trois indéterminées φ', ψ', m', on trouve que l'équation aux troiſièmes différences partielles, qui exprime la propriété de la ſurface, eſt le réſultat de l'élimination de m des deux équations ſuivantes,

$$\left.\begin{array}{l} (ms + t) \left[m^2 \frac{d^3 z}{dx^3} + 2m \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + \frac{d^3 z}{dx dy^2} + \frac{(rt - s^2)(mq - p)}{k^2}\right] \\ - (mr + s) \left[m^2 \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + 2m \frac{d^3 z}{dx dy^2} + \frac{d^3 z}{dy^3} - \frac{(rt - s^2)(mq - p)m}{k^2}\right] \end{array}\right\} = 0,$$

$$m^2 [s(1 + p^2) - pqr] + m [t(1 + p^2) - r(1 + q^2)] - [s(1 + q^2) - pqt] = 0.$$

XIV.

La conſidération que nous avons employée pour réſoudre la queſtion, nous a conduit directement aux différences premières. Pour avoir la même expreſſion en quantités finies, des deux équations aux différences premières,

$$p \psi' z' + q \varphi' z' = 1,$$
$$mp + q + \varphi' z' + m \psi' z' = 0;$$

je tire les valeurs ſuivantes de p & de q,

$$p = \frac{1 + (\varphi' z')^2 + m\varphi' z' \psi' z'}{\psi' z' - m\varphi' z'},$$
$$q = \frac{-m[1 + (\psi' z')^2] - \varphi' z' \psi' z'}{\psi' z' - m\varphi' z'};$$

qui, ſubſtituées dans $dz = p\,dx + q\,dy$, donnent

$$\frac{m\varphi' z'}{\psi' z'}\left[dz + \varphi' z' dy + \psi' z' dx - dy\,\frac{1 + (\varphi' z')^2 + (\psi' z')^2}{\varphi' z'}\right]$$
$$= dz + \varphi' z' dy + \psi' z' dx - dx\,\frac{1 + (\varphi' z')^2 + (\psi' z')^2}{\psi' z'},$$

dont l'intégrale, priſe en regardant z' comme conſtante, eſt

$$z + y\varphi' z' + x\psi' z' - y\,\frac{1 + (\varphi' z')^2 + (\psi' z')^2}{\varphi' z'}$$
$$= \pi\left[z + y\varphi' z' + x\psi' z' - x\,\frac{1 + (\varphi' z')^2 + (\psi' z')^2}{\psi' z'}\right],$$

dans laquelle π eſt une fonction arbitraire, & z' doit être telle, que la différentielle de cette équation, priſe en regardant z' comme ſeule variable, ſoit nulle; ce qui ſignifie que la ſurface que l'on conſidère eſt perpétuellement enveloppée par une ſurface cylindrique à baſe quelconque, mais conſtante, & qui ſe meut de manière que ſa baſe ſoit toujours normale aux courbes que parcourent tous ſes points; réſultat qu'on pouvoit obſerver *a priori*, & qui auroit donné directement l'expreſſion en quantités finies, que nous venons de trouver.

X V.

On peut encore arriver au même réſultat par une troiſième conſidération. En effet, ſur la ſurface demandée, la courbe génératrice eſt la ligne d'une des courbures, tandis que les courbes parcourues par chacun de ſes points, ſont des lignes de l'autre courbure; or pour chacune de ces dernières lignes, le rayon de leur courbure eſt conſtant, puiſqu'il eſt toujours celui qui convient à un même point

de la génératrice, & il varie lorsque l'on passe d'une de ces lignes à une autre; donc la surface est telle, que pour la même ligne de courbure, le rayon de l'autre courbure est constant : donc cette surface est celle dont il étoit question à la fin de l'*article IX*, & dont l'équation est pareillement comprise dans celle-ci :

$$m^2\gamma - (\alpha - \beta)m - \delta = 0,$$
$$(Fa)^2(\alpha\beta - \gamma\delta) + k^3 Fa(\alpha + \beta) + k^6 = 0,$$

Si l'on veut avoir son équation particulière, il faut extraire les racines de ces deux équations, & donner au radical commun des signes différens; ce qui donne

$$2\gamma m = \alpha - \beta + \sqrt{[(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta]},$$
$$2(\alpha\beta - \gamma\delta)Fa = -k^3\{\alpha + \beta + \sqrt{[(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta]}\};$$

équations qui ne diffèrent de celles de l'*article IX*, que par les signes du radical qui sont contraires; & qui par la différenciation donnent la même équation aux différences troisièmes que nous avons trouvées, *article XIII.*

X V I.

Enfin la partie de cette surface comprise entre deux positions consécutives de la courbe génératrice, étant une petite portion de surface cylindrique coupée perpendiculairement à la direction de ses arêtes rectilignes, il s'ensuit que cette surface peut être exécutée commodément en fuseaux d'étoffe, de telle manière qu'un des fils de la chaîne de l'étoffe parcoure le fuseau dans toute sa longueur. Toutes les autres surfaces courbes peuvent être exécutées de cette manière, mais les courbes sur lesquelles doivent être faites les coutures, sont compliquées, & celle-ci est la seule où les courbes soient simples & directement données par la génération. Les surfaces développables, & celles de révolution ne jouissent de cette

propriété, que parce qu'elles sont des cas particuliers de celle dont il s'agit.

Passons maintenant au cas général.

XVII.

Exprimer qu'une surface courbe est engendrée par le mouvement d'une courbe quelconque, plane ou à double courbure, constante de forme, & variable de position d'une manière quelconque dans l'espace.

Tout étant rapporté à trois plans fixes dans l'espace, & rectangulaires, par les coordonnées x, y, z, supposons qu'à l'origine du mouvement de la courbe génératrice, ou, ce qui revient au même, que pour un certain instant quelconque de son mouvement, la position de cette courbe par rapport aux trois plans soit connue, en sorte qu'on ait à cette époque les équations des projections de la courbe, & qu'elles soient $y = \varphi z$ & $x = \psi z$. Supposons ensuite que trois autres plans rectangulaires, confondus dans ce moment avec les trois plans fixes, soient entraînés par la courbe dans son mouvement, de manière qu'elle ne change jamais de position par rapport à eux, & que dans le cours du mouvement, quelque part que l'on prenne la courbe génératrice, ses projections sur ces plans mobiles soient toujours les mêmes, & que par conséquent les équations de ces projections en coordonnées perpendiculaires à ces plans mobiles, & rapportées à leur intersection comme origine, soient constamment les mêmes, indépendamment de la position de la courbe; il est évident que si l'on appelle u, v, w, les coordonnées mobiles qui, à l'origine du mouvement, étoient respectivement x, y z; les équations des projections de la courbe sur les plans mobiles dans un instant quelconque, seront $v = \varphi w$ & $u = \psi w$; dans lesquelles les quantités u, v, w sont des fonctions de x, y, z, & d'une indéterminée qui exprime la distance à l'origine du mouvement; en sorte que si l'on connoissoit la loi du mouvement des plans mobiles, & qu'on

qu'on fût par conséquent en état, pour un instant quelconque du mouvement, de trouver leurs équations rapportées aux plans fixes, on trouveroit les valeurs des quantités u, v, w, & éliminant l'indéterminée des deux dernières équations, on auroit en x, y, z, celle de la surface demandée.

Posons donc que l'on connoisse la courbe que décrit le point d'intersection commune des trois plans mobiles, & que les projections de cette courbe sur les trois plans fixes, aient pour équations $y = \varpi z$ & $x = \pi z$. Considérant ensuite la génératrice dans un instant quelconque de son mouvement, soit z' l'ordonnée parallèle aux z de son origine mobile; les autres coordonnées de cette origine seront

$\pi z'$ dans le sens des x,

& $\varpi z'$ dans le sens des y.

Cela posé, les équations des trois plans mobiles, lorsque leur intersection se trouve au point dont l'ordonnée est z', sont de la forme

$$a\ (z - z') + b\ (y - \varpi z') + c\ (x - \pi z') = 0,$$
$$a'\ (z - z') + b'\ (y - \varpi z') + c'\ (x - \pi z') = 0,$$
$$a''\ (z - z') + b''\ (y - \varpi z') + c''\ (x - \pi z') = 0;$$

dans lesquelles les coéfficiens doivent avoir les valeurs déterminées d'après la loi du mouvement des plans. Or, de ces neuf coéfficiens, il n'y en a que six qui soient nécessaires pour la détermination des plans; nous pouvons donc établir entr'eux trois conditions arbitraires; & choisissant celles qui sont de nature à simplifier les expressions, nous poserons les trois équations suivantes:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1,$$
$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1;$$

de plus, les trois plans étant rectangulaires, on aura entre les coéfficiens les trois équations suivantes:

$$aa' + bb' + cc' = 0,$$
$$a''a + b''b + c''c = 0,$$
$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0;$$

donc de ces neuf quantités il n'y en a que trois qu'il soit nécessaire de déterminer d'après la loi du mouvement de la courbe génératrice.

Posons que les trois coéfficiens déterminés de cette manière, soient a, b', c'', les valeurs des six autres, conclues des six équations précédentes, en faisant, pour abréger,

$$1 + a + b' + c'' = M,$$
$$1 + a - b' - c'' = N,$$
$$1 - a + b' - c'' = P,$$
$$1 - a - b' + c'' = Q.$$

seront

$$2b = \sqrt{(NP)} + \sqrt{(MQ)},$$
$$2a' = \sqrt{(NP)} - \sqrt{(MQ)},$$
$$2a'' = \sqrt{(NQ)} + \sqrt{(MP)},$$
$$2c = \sqrt{(NQ)} - \sqrt{(MP)},$$
$$2c' = \sqrt{(PQ)} + \sqrt{(MN)},$$
$$2b'' = \sqrt{(PQ)} - \sqrt{(MN)};$$

& parce que, d'après la loi du mouvement, étant donnée z', on doit toujours être en état de trouver les trois quantités a, b', c'', il s'ensuit que ces quantités sont des fonctions de z', que nous pourrons représenter par les équations $a = \alpha z'$, $b' = \beta z'$, $c'' = \gamma z'$, α, β, γ étant des caractères de fonctions; & que les six autres quantités, ainsi que M, N, P, Q, seront d'autres fonctions de z', déduites de celles-ci.

Actuellement, si du point de sa surface, dont les coordonnées sont x, y, z, on abaisse des perpendiculaires sur les trois plans mobiles, leurs valeurs seront

$$-\{a\ (z - z') + b\ (y - \varpi z') + c\ (x - \pi z')\},$$
$$-\{a'\ (z - z') + b'\ (y - \varpi z') + c'\ (x - \pi z')\},$$
$$-\{a''\ (z - z') + b''\ (y - \varpi z') + c''\ (x - \pi z')\};$$

ces trois quantités sont celles que nous avons représentées au commencement de cet article par u, v, w, c'est-à-dire, par w, φw, ψw. Donc si l'on substitue dans ces quantités les valeurs des coéfficiens que nous avons trouvées précédemment, la solution de la question sera comprise dans les trois équations suivantes:

$$\alpha z'(z - z') + \tfrac{1}{2}[\sqrt{(NP)} + \sqrt{(MQ)}](y - \varpi z')$$
$$+ \tfrac{1}{2}[\sqrt{(NQ)} - \sqrt{(MP)}]\ (x - \pi z') = - w,$$
$$\tfrac{1}{2}[\sqrt{(NP)} - \sqrt{(MQ)}](z - z') + \beta z'(y - \varpi z')$$
$$+ \tfrac{1}{2}[\sqrt{(PQ)} + \sqrt{(MN)}]\ (x - \pi z') = \varphi(-w),$$
$$\tfrac{1}{2}[\sqrt{(NQ)} + \sqrt{(MP)}](z - z') + \tfrac{1}{2}[\sqrt{(PQ)}$$
$$- \sqrt{(MN)}](y - \varpi z') + \gamma z'(x - \pi z') = \psi(-w).$$

en sorte que lorsque l'on connoîtra la loi du mouvement de la courbe génératrice, & par conséquent les formes des sept fonctions, α, β, γ, ϖ, π, φ & ψ, en éliminant z' & w de ces trois équations, on aura en x, y, z, celle de la surface demandée. Mais si l'on veut simplement énoncer la génération de cette surface, sans statuer rien de particulier ni sur la courbe génératrice ni sur la loi de son mouvement, il faut regarder ces sept fonctions comme arbitraires, & les éliminer par la différenciation, ce qui conduira à une équation aux différences partielles du septième ordre.

XVIII.

En ſuppoſant qu'une ſurface courbe, conſtante de forme & déterminée, ſe meuve d'une manière quelconque dans l'eſpace, exprimer qu'une autre ſurface l'enveloppe perpétuellement dans toutes ſes poſitions, indépendamment de la loi du mouvement.

Conſervons tout ce qui eſt dans l'*article précédent*, & ſuppoſons de plus, qu'à l'origine du mouvement, l'équation donnée de la ſurface mobile, ſoit repréſentée par

$$\varphi(z, y, x) = 0;$$

que par conſéquent ſon équation rapportée aux trois plans rectangulaires mobiles avec la ſurface, ſoit perpétuellement

$$\varphi(w, v, u) = 0.$$

Il eſt évident que les points de la ſurface cherchée, ſont ceux de la ſurface mobile, dont les coordonnées x, y, z, rapportées aux plans fixes, ne varient pas lorſque la quantité z', qui détermine la poſition de la ſurface mobile, varie; donc on aura l'équation demandée, en éliminant u, v, w, z', des cinq équations ſuivantes:

$$\alpha z'(z-z') + \tfrac{1}{2}[\sqrt{(NP)} + \sqrt{(MQ)}](y-\varpi z')$$
$$+ \tfrac{1}{2}[\sqrt{(NQ)} - \sqrt{(MP)}](x-\pi z') = -w,$$
$$\tfrac{1}{2}[\sqrt{(NP)} - \sqrt{(MQ)}](z-z') + \beta z'(y-\varpi z')$$
$$+ \tfrac{1}{2}[\sqrt{(PQ)} + \sqrt{(MN)}](x-\pi z') = -v,$$
$$\tfrac{1}{2}[\sqrt{(NQ)} + \sqrt{(MP)}](z-z')\tfrac{1}{2} + [\sqrt{(PQ)}$$
$$- \sqrt{(MN)}](y-\varpi z') + \gamma z'(x-\pi z') = -u,$$
$$\varphi(w, v; u) = 0,$$
$$\frac{d.\varphi(w, v, u)}{d z'} = 0;$$

en ſorte que la forme de la fonction φ étant donnée, ce qui réduit toutes ces équations aux deux dernières, ſi l'on différencie ces deux équations par le procédé donné au commencement de ce Mémoire, & qu'on élimine les cinq fonctions α, β, γ, π, ϖ, conſidérées comme arbitraires, & l'indéterminée z', on aura une équation aux différences partielles du cinquième ordre, qui énoncera les propriétés de la ſurface qui enveloppe la ſurface donnée & mobile, dans toutes ſes poſitions, ſans rien dire de particulier ſur la loi ſuivant laquelle ces poſitions changent.

On voit donc que quelque compliquée que ſoit l'équation d'une ſurface, conſtante de forme & variable de poſition dans l'eſpace, l'équation aux différences partielles de la ſurface qui l'enveloppe perpétuellement, ne peut jamais être que du cinquième ordre. Dans certains cas particuliers, l'ordre de cette équation peut être conſidérablement abaiſſé; on ſait, par exemple, que lorſque la ſurface mobile eſt un plan, l'équation de la ſurface perpétuellement touchée, n'eſt que du ſecond ordre, c'eſt celle des ſurfaces développables; & nous avons vu dans ce Mémoire, que lorſque la ſurface mobile eſt une ſphère, l'équation de la ſurface qui l'enveloppe eſt encore du ſecond ordre.

Nous ne nous étendrons pas davantage ſur cette matière, qui ſe complique trop, eu égard à ſon utilité.



MÉMOIRE*
SUR LE CALCUL INTÉGRAL DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

Par M. MONGE.

TOUT ce que je me propose de dire sur cet objet, étant fondé sur le procédé que j'ai exposé dans le Mémoire précédent, pour faire disparoître, au moyen de la différenciation, les fonctions arbitraires qui sont comprises dans une équation intégrale, je vais reprendre ici ce procédé, pour le développer avec plus de clarté, & l'appliquer ensuite à l'intégration des équations aux différences partielles.

Je commencerai d'abord par les équations linéaires du premier ordre ; je passerai ensuite & par degrés à celles des ordres supérieurs, & je terminerai ce Mémoire par quelques considérations sur les équations élevées.

* Ce Mémoire a été fait à l'occasion d'une proposition que j'énonçai à l'Académie, & qui fut contestée: il étoit achevé lorsqu'on me fit voir que l'idée principale, & qui faisoit l'objet de la contestation, étoit entièrement dans un Mémoire de M. de la Grange, imprimé dans le volume de l'Académie de Berlin, pour l'année 1779, où à la vérité, ce célèbre Géomètre l'applique simplement aux équations du premier ordre. Je crois être le premier qui ait dit quelque chose d'analogue dans un Mémoire présenté à l'Académie en 1771, imprimé dans le volume des Savans Étrangers, pour l'année 1773, en démontrant, & par des considérations géométriques, & par des opérations analytiques, la proposition suivante.

L'intégrale de l'équation aux différences partielles $Mp + Nq = 0$, dans laquelle les coëfficiens M, N, sont fonctions des trois variables x, y, z, est la même, soit que l'on regarde dans ces coëfficiens la quantité z comme variable, soit qu'on la regarde comme constante.

On y verra que cette proposition, dont j'étois dès-lors fortement occupé, est le germe de ce qui fait l'objet du Mémoire actuel, & qu'elle a dû me conduire aux résultats que je présente.

I.

Soit proposé de faire disparoître la fonction arbitraire φ de l'équation $V = \varphi U$.

Cette équation exprime évidemment que les deux quantités V & U sont constantes ensemble, & variables ensemble; ou, pour mieux dire, elle exprime seulement que ces deux quantités sont constantes ensemble, car si U venoit à varier, l'équation ne détermineroit pas la variation qui en résulteroit dans V. Il suit de-là, que si l'on fait U égale à une certaine constante quelconque a, on aura V égale à une autre constante b, sans qu'il y ait aucune relation entre a & b, puisque dans l'équation $b = \varphi a$, qui pour lors a lieu, la fonction φ est arbitraire : la proposée exprime donc que les deux équations

$$U = a,$$
$$V = \varphi a = b,$$

ont lieu en même temps, indépendamment de la constante arbitraire a, ou, ce qui revient au même, elle est le résultat de l'élimination de a entre ces deux équations: elle ne comporte pas que chacune de ces équations aient lieu en particulier, mais elle signifie qu'elles ont lieu simultanément, c'est-à-dire, que si l'une est supposée, l'autre s'ensuit nécessairement, & elle ne signifie que cela. Si donc on différencie aux différences ordinaires ces deux équations, ce qui fait en effet disparoître l'indéterminée a, & donne

$$dU = 0,$$
$$dV = 0,$$

ou

$$(A) \qquad \left(\frac{dU}{dx}\right) dx + \left(\frac{dU}{dy}\right) dy = 0,$$

$$(B) \qquad \left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy = 0,$$

on aura deux équations dans lesquelles on aura introduit une nouvelle indéterminée $\frac{dy}{dx}$, & dont le système représentera la proposée, & exprimera la même chose qu'elle. Ainsi, énoncer la proposée, c'est prononcer que les deux équations *(A)* & *(B)* ont lieu simultanément, ou indépendamment de la valeur arbitraire de $\frac{dy}{dx}$; ce n'est pas dire que l'une ait lieu, ni que l'autre ait lieu, c'est poser qu'elles ont lieu ensemble, c'est dire que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, qu'elles donnent, sont égales entr'elles, sans rien statuer d'ailleurs sur cette valeur, qui peut être tout ce qu'on voudra. Donc, si l'on élimine de ces deux équations la quantité $\frac{dy}{dx}$, le résultat

$$(C)\quad \left(\frac{dU}{dx}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) - \left(\frac{dU}{dy}\right)\left(\frac{dV}{dx}\right) = 0,$$

énoncera la même chose que la proposée. C'est ce résultat nécessaire, exprimé en quantités différentielles, & délivré de la fonction arbitraire φ, que l'on nomme l'*équation aux différences partielles de la proposée*, & dont celle-ci se nomme l'*intégrale complète.*

Les deux équations *(A)* & *(B)* ne sont pas nécessaires; tout autre système, qui, par l'élimination d'une indéterminée ω, donneroit pour résultat l'équation *(C)*, seroit également propre à la représenter, pourvu que l'on comprît bien que les deux équations de ce système n'auroient pas lieu séparément, & que l'une fût destinée à éliminer ω de l'autre; mais ce nouveau système, quelle que fût sa forme, exprimeroit précisément la même chose que les deux équations *(A)* & *(B)*, prises simultanément, & indépendamment de la valeur de $\frac{dy}{dx}$.

II.

II.

Il ſuit de-là, que pour faire diſparoître une fonction arbitraire d'une équation intégrale, de quelque manière que cette fonction entre dans l'équation, il faut 1.° égaler à zéro la différentielle ordinaire de la quantité qui eſt ſous la fonction, ce qui produira une première équation; 2.° différencier aux différences ordinaires l'équation, en regardant la fonction comme une conſtante, ce qui donnera une ſeconde équation; 3.° éliminer, entre ces deux équations & la propoſée, la fonction & l'indéterminée $\frac{dy}{dx}$, & l'équation réſultante ſera la différentielle demandée.

Si l'équation contenoit, non-ſeulement la fonction arbitraire φ, mais encore les coëfficiens de ſes différentielles ſucceſſives φ', φ'', φ''' . . . &c, ce que nous venons de dire ne ſeroit pas ſuffiſant; mais dans ce cas, en faiſant diſparoître les fonctions arbitraires, on eſt conduit à des équations aux différences mêlées, entières & partielles, dont nous ne nous propoſons pas de parler dans ce Mémoire.

III.

Pour intégrer une équation aux différences partielles linéaires & du premier ordre, il faut faire l'opération inverſe. Suppoſons que l'on faſſe pour abréger,

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

de manière que p & q repréſentent les différences partielles du premier ordre; & ſoit propoſé d'intégrer l'équation générale

$$Mp + Nq + L = 0,$$

dans laquelle M, N, L, ſoient données d'une manière quelconque en x, y, z. Cette équation exprime une ſimple relation entre p & q, & ne peut ſuffire pour les déterminer toutes deux en x, y, z: ſi donc on élimine ou p

ou q, au moyen de l'équation $dz = p\,dx + q\,dy$, les équations

$$Mdz + Ldx = q(Mdy - Ndx),$$
$$Ndz + Ldy = p(Mdy - Ndx),$$

qu'on obtiendra, ne devront déterminer ni p ni q, c'est-à-dire, qu'elles devront avoir lieu chacune en particulier, indépendamment des valeurs de ces deux quantités; donc, leurs membres seront simultanément égaux à zéro, donc, on aura en même temps les trois équations

$$Mdz + Ldx = 0,$$
$$Ndz + Ldy = 0,$$
$$Mdy - Ndx = 0,$$

dont deux quelconques comportent la troisième. Ainsi, énoncer la proposée, c'est prononcer que deux quelconques de ces trois équations ont lieu, indépendamment de la valeur de la quantité $\frac{dy}{dx}$, introduite par l'élimination: ce n'est pas dire qu'aucunes d'elles ait lieu, c'est dire que deux d'entr'elles ont lieu ensemble.

Ces équations aux différences ordinaires ne sont point nécessaires; tout autre système de deux équations, qui, par l'élimination d'une indéterminée ω, reproduiroient, comme les précédentes, la proposée, exprimeroit la même chose, & en seroit une autre traduction exacte.

Actuellement, soient

$$V = a,$$
$$U = b,$$

les intégrales complètes de deux de ces trois équations aux différences ordinaires, a & b étant les constantes arbitraires introduites par l'intégration; ces deux équations, qui, comme leurs différentielles, doivent avoir lieu simultanément,

comme elles, représenteront la proposée : or, elles expriment, non pas que les deux quantités V & U sont constantes chacune en particulier, mais qu'elles sont constantes en même temps; c'est-à-dire, qu'elles varient ensemble, & sont constantes ensemble; ou autrement, qu'elles sont fonctions l'une de l'autre, sans rien statuer d'ailleurs sur la forme de cette fonction. Donc, si l'on indique par φ une fonction arbitraire, l'équation

$$V = \varphi U$$

énoncera la même chose que la proposée, & sera son intégrale complète.

I V.

On voit donc d'abord que lorsque les trois équations

$$Mdz + Ldx = 0,$$
$$Ndz + Ldy = 0,$$
$$Mdy - Ndx = 0,$$

seront intégrables, on aura immédiatement l'intégrale de la proposée. Cette intégrale seroit possible, quand même il n'y auroit qu'une de ces équations que l'on pût intégrer dans l'état où elle est, parce qu'au moyen de cette équation intégrée, on chasseroit d'une des deux autres la variable, dont la différentielle n'est pas employée, ce qui en feroit une équation aux différences ordinaires à deux variables, dont l'intégrale seroit possible : mais lors même qu'aucune de ces trois équations ne pourra s'intégrer, en multipliant l'une d'entr'elles par un facteur indéterminé, & ajoutant le produit à une des deux autres, on aura une équation à trois variables, qui tiendra lieu d'une des trois premières; & si l'on peut déterminer le facteur, de manière que la condition d'intégrabilité soit satisfaite, on aura une équation dont l'intégrale rendra possible celles des deux autres. Nous allons éclaircir cela par des exemples.

V.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$py - qx = 0,$$

qui est celle des surfaces de révolution autour de l'axe des z: les trois équations aux différences ordinaires se réduisent, dans ce cas, aux deux suivantes,

$$dz = 0,$$
$$ydy + xdx = 0;$$

leurs intégrales sont

$$z = a,$$
$$x^2 + y^2 = b.$$

Donc, l'intégrale complète de la proposée est

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

ce qu'on savoit déjà.

VI.

EXEMPLE II. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$p(y - Bz) - q(x - Az) + Ay - Bx = 0,$$

dans laquelle les quantités A & B sont des constantes; les trois équations aux différences ordinaires sont

$$(y - Bz)\,dz + (Ay - Bx)\,dx = 0,$$
$$-(x - Az)\,dz + (Ay - Bx)\,dy = 0,$$
$$(y - Bz)\,dy + (x - Az)\,dx = 0,$$

dont aucune n'est intégrable immédiatement.

Mais si l'on multiplie la première par A, la seconde par B, & qu'on les ajoute, on aura

$$Adx + Bdy + dz = 0;$$

si l'on multiplie de même la première par x, la seconde par y, & qu'on les ajoute, on aura

$$xdx + ydy + zdz = 0:$$

les intégrales de ces deux dernières équations sont

$$Ax + By + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b.$$

Donc, en faisant $a = \varphi b$, on aura pour intégrale complète de la proposée

$$Ax + By + z = \varphi(x^2 + y^2 + z^2).$$

Cette équation, qui énonce la même chose que les deux précédentes prises simultanément, exprime que la surface à laquelle elle appartient, est le lieu des intersections d'une suite de plans parallèles par une suite de surfaces de sphères concentriques, & dont le centre commun est à l'origine des coordonnées; donc, elle est celle des surfaces de révolution autour d'un axe incliné mené par l'origine.

VII.

Exemple III. S'il s'agit d'intégrer l'équation

$$px + qz + y = 0;$$

des trois équations aux différences ordinaires

$$xdz + ydx = 0,$$
$$zdz + ydy = 0,$$
$$xdy - zdx = 0,$$

que l'on obtient, il n'y a que la seconde qui soit intégrable immédiatement, & son intégrale est

$$z^2 + y^2 = a^2;$$

mais si l'on substitue dans la première la valeur de y, que fournit cette intégrale, on a

$$xdz + dx\sqrt{(a^2 - z^2)} = 0;$$

qui ne renferme plus que deux variables, & dont l'intégrale est

$$x^{a} e^{\text{arc fin.} \frac{z}{a}} = b:$$

faisant donc $b = \varphi a$, & mettant pour a sa valeur $\sqrt{(z^2 + y^2)}$, l'intégrale complète de la proposée sera

$$x^{\sqrt{(z^2+y^2)}} e^{\text{arc fin.} \frac{z}{\sqrt{(z^2+y^2)}}} = \varphi(x^2 + y^2).$$

Si au lieu de substituer la valeur de y dans la première, on eût mis celle de z dans la troisième, en opérant de la même manière, on auroit trouvé l'intégrale complète sous cette autre forme,

$$x^{\sqrt{(z^2+y^2)}} \varphi(z^2 + y^2) = e^{\text{arc fin.} \frac{y}{\sqrt{(z^2+y^2)}}}.$$

Ces exemples suffisent pour faire sentir l'esprit de la méthode dont il s'agit dans ce Mémoire, & nous aurons occasion dans la suite d'en faire d'autres applications.

De l'Intégration des Équations aux différences partielles linéaires & du second ordre.

Nous supposerons que l'on fasse dans la suite

$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

de manière que les quantités r, s, t représentent les trois différences partielles du second ordre.

VIII.

Soit l'équation linéaire générale

$$Ar + Bs + Ct + D = 0,$$

dans laquelle A, B, C, D soient données d'une manière quelconque en x, y, z, p, q. Cette équation exprime une

simple relation entre les trois quantités $r, s, t,$ & ne peut suffire pour déterminer les valeurs de chacune d'elles en x, y, z, p, q. Si donc, à l'aide des deux équations $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$, qui ne disent rien de nouveau, on élimine deux de ces trois quantités, les trois équations

$$Bdpdy + Cdqdy - Cdpdx + Ddy^2 = -r\{Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2\},$$

$$Adpdy + Cdqdx + Ddxdy = s\{Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2\},$$

$$Adpdx - Adqdy + Bdqdx + Ddx^2 = -t\{Ady^2 - Bdxdy - Cdx^2\},$$

que l'on obtient, ne doivent pas déterminer les valeurs de r, s, t; & parce qu'elles ont lieu, il faut que ce soit indépendamment de ces valeurs, c'est-à-dire, que chacun des membres de ces équations doit être par lui-même égal à zéro, ou que l'on a en même temps

$$Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2 = 0,$$
$$Adpdy + Cdqdx + Ddxdy = 0,$$
$$Bdpdy + C(dqdy - dpdx) + Ddy^2 = 0,$$
$$A(dpdx - dqdy) + Bdqdx + Ddx^2 = 0;$$

de ces quatre équations, il n'y en a que deux de nécessaires, car deux quelconques étant posées, les deux autres s'ensuivent.

Ainsi énoncer la proposée, c'est prononcer que deux quelconques de ces quatre équations ont lieu en même temps, indépendamment de la valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui leur est commune, & qu'on a introduite dans la proposée pour en obtenir ces deux équations. Donc en raisonnant ici

comme dans l'*article III*, si les intégrales complètes de deux quelconques de ces équations, sont

$$V = a,$$
$$U = b;$$

a & b étant les constantes arbitraires introduites par l'intégration, l'intégrale première de la proposée, sera

$$V = \varphi U;$$

& si cette équation est encore linéaire, on l'intégrera en quantités finies, par la méthode que nous avons expliquée plus haut.

I X.

Les équations aux différences ordinaires de l'*article précédent*, étant toutes les quatre élevées au second degré, il est évident que dans la première que l'on intégrera, la constante arbitraire sera pareillement élevée au second degré, & que cette constante aura deux valeurs que nous représenterons par

$$V = a,$$
$$V' = a'.$$

Quant à la seconde qu'on se propose d'intégrer, il se présente naturellement deux cas; ou cette équation, en vertu de l'intégrale de la première, s'abaissera au premier degré, ou elle restera du second; ces deux cas donnent des résultats qu'il ne faut pas confondre. Nous allons d'abord traiter le premier, nous analyserons ensuite le second.

X.

Si la seconde équation aux différences ordinaires, devient linéaire, en vertu de l'intégrale de la première, il n'y aura aucune nouvelle ambiguité introduite de sa part; mais parce que l'intégrale de la première en présente une, il s'ensuit que, selon la solution qu'on emploîra, l'intégrale

l'intégrale de la seconde sera $U = b$ ou $U' = b'$; que par conséquent l'intégrale première de la proposée, sera indifféremment

$$V = \varphi U,$$
$$\text{ou } V' = \psi U',$$

& que l'intégrale commune de ces deux dernières équations, sera l'intégrale finie & complète de la proposée.

Ces deux équations sont aussi celles qu'on trouveroit en faisant disparoître de l'intégrale finie, par la différenciation, ou l'une ou l'autre des deux fonctions arbitraires φ & ψ, qui la complètent.

XI.

Toutes les fois que les quantités V & V' seront exprimées en x, y, z, & qu'elles seront délivrées des différences partielles p & q, elles seront aussi les quantités qui entreront sous les deux fonctions arbitraires de l'intégrale finie; & parce que des quatre équations aux différences ordinaires, il n'y a que la première qui ne contienne pas les différences de p & de q, il s'ensuit qu'on ne pourra avoir immédiatement ces deux quantités, que par l'intégration de cette première équation. Lorsque les quantités V & V' contiendront les différences partielles p & q, les deux équations $V = \varphi U$ & $V' = \psi U'$, n'en seront pas moins les intégrales premières de la proposée, mais il est évident que ces quantités changeront de forme pour entrer dans l'intégrale finie.

Avant que d'aller plus loin, éclaircissons ce qui précède par des exemples connus.

XII.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'équation du second ordre,

$$Ar + Bs + Ct + D = 0,$$

dans laquelle les quantités A, B, C, D, sont des constantes;

les deux équations principales aux différences ordinaires, seront

$$A\,dy^2 - B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0,$$

$$A\,dp\,dy + C\,dq\,dx + D\,dx\,dy = 0.$$

Si, pour abréger, l'on exprime par k & k' les deux valeurs de k que fournit l'équation algébrique

$$Ak^2 - Bk + C = 0,$$

la première de ces deux équations donnera les deux solutions suivantes:

$$dy - k\,dx = 0,$$

$$dy - k'dx = 0,$$

dont les intégrales seront

$$y - kx = a,$$

$$y - k'x = a';$$

& l'on voit d'abord que les deux quantités qui seront sous les deux fonctions arbitraires de l'intégrale finie, seront

$$y - kx \ \& \ y - k'x.$$

Actuellement, si l'on emploie la première de ces solutions, & qu'on l'introduise dans l'autre équation aux différences ordinaires, elle deviendra

$$Ak\,dp + C\,dq + Dk\,dx = 0,$$

dont l'intégrale est

$$Akp + Cq + Dkx = b;$$

donc une des intégrales premières de la proposée, est

$$Akp + Cq + Dkx = \varphi'(y - kx).$$

En employant la seconde solution, au lieu de la première, on auroit eu pour autre intégrale

$$Ak'p + Cq + Dk'x = \psi'(y - k'x).$$

Chacune de ces intégrales premières étant linéaire, on peut encore l'intégrer par le procédé de l'*article III*; en

effet, les deux équations aux différences ordinaires, que l'on obtient, sont

$$Akdy - Cdx = 0;$$

$$Akdz + Dkxdx - \varphi'(y - kx)dx = 0;$$

l'intégrale de la première, à cause de $kk' = \frac{C}{A}$, est

$$y - k'x = a';$$

la seconde, en éliminant y, devient

$$Akdz + Dkxdx - \varphi'\{a' + x(k' - k)\}dx = 0,$$

dont l'intégrale est

$$Akz + \tfrac{1}{2}Dkx^2 - \varphi\{a' + x(k' + k)\} = b.$$

Enfin faisant $b = \varphi a'$, & mettant pour a' sa valeur, on trouve pour intégrale complète de la proposée

$$Az + \tfrac{1}{2}Dx^2 = \varphi(y - kx) + \psi(y - k'x).$$

XIII.

EXEMPLE II. Soit proposée l'équation

$$q^2r - 2pqs + p^2t = 0,$$

qui est celle des surfaces engendrées par une droite qui se meut d'une manière quelconque, mais toujours parallèlement au plan des x & y. Les équations aux différences ordinaires sont, pour ce cas,

$$q^2dy^2 + 2pqdxdy + p^2dx^2 = 0,$$

$$q^2dpdy + p^2dydx = 0;$$

la première donne $(qdy + pdx)^2 = 0$, ou $dz^2 = 0$, ou $z = a$; & parce que les deux racines de cette équation sont égales, il s'ensuit que les deux fonctions qui compléteront l'intégrale finie, seront composées de la même quantité z.

Quant à la seconde, puisqu'on a par la première

$$qdy + pdx = 0,$$

elle devient

$$pdq - qdp = 0,$$

dont l'intégrale est

$$q = bp;$$

donc l'intégrale première de la proposée, est

$$q = p\varphi z,$$

ce qu'on savoit déjà.

En suivant le procédé de l'*article III*, pour arri à l'intégrale finie, les deux équations aux différei ordinaires, sont

$$dz = 0,$$

$$dx + dy\varphi z = 0;$$

l'intégrale de la première est $z = a$, comme ci-dessus; c de la seconde, puisque z est constant, est $x + y\varphi z =$ donc l'intégrale finie de la proposée est

$$x + y\varphi z = \psi z,$$

ce qu'on savoit encore.

XIV.

Ces deux exemples prouvent suffisamment que qu parmi les quatre équations aux différences ordinaires l'*article VIII*, il s'en trouvera deux immédiatement i grables, ou que quand on en pourra composer deux au qui seront intégrables & qui tiendront lieu de deux premières, on aura toujours au moins l'intégrale prem de la proposée. Mais pour exprimer analytiquement c intégrale, il n'est pas même nécessaire que les équat aux différences ordinaires, soient toutes deux actuellen intégrables; il suffira souvent qu'il y en ait une, con on va le voir dans l'exemple suivant qui nous a été] posé comme devant se refuser à cette méthode.

XV.

EXEMPLE III. Posons qu'il faille intégrer l'équa

$$r - t - \frac{2p}{x} = 0,$$

dont l'intégrale finie, trouvée par M. Euler, eſt

$$z = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x+y) - x\varphi'(x+y) \\ +\psi(x-y) - x\psi'(x-y), \end{array} \right.$$

& dont les Géomètres ont coutume de dire qu'elle n'a point d'intégrale première.

Les équations aux différences ordinaires que la méthode donne pour ce cas, ſont

$$dx^2 - dy^2 = 0,$$

$$dpdy - dqdx = \frac{2pdxdy}{x};$$

la première a deux racines inégales, $dx + dy = 0$, & $dx - dy = 0$, dont les intégrales complètes ſont $x + y = a$, & $x - y = a'$: elle indique donc d'abord que les deux fonctions arbitraires qui complètent l'intégrale finie, ſont compoſées des quantités différentes $(x + y)$, & $(x - y)$.

Prenons enſuite une de ces racines, par exemple, $dx - dy = 0$, l'autre équation devient par-là

$$dp - dq = \frac{2pdx}{x},$$

& c'eſt cette équation qu'il faudroit intégrer pour arriver à l'intégrale première de la propoſée.

On a objecté que cette équation étoit impoſſible, parce qu'étant à trois variables, elle ne ſatisfait pas à l'équation de condition, pour l'intégrabilité. Nous répondons que cette équation, conſidérée ſeule, n'a pas lieu, & qu'elle eſt étrangère à la queſtion; elle n'a lieu que conjointement avec l'autre $dx - dy = 0$, & on doit la regarder comme provenant d'une troiſième qui auroit été réduite par le moyen de la première $dx - dy = 0$, & dont l'intégrale ſeroit poſſible. En effet, on peut ajouter à cette équation la quantité $\omega(dx - dy)$, qui eſt nulle, en vertu de l'autre, puis ajouter & retrancher la quantité $k(dx + dy)$, & cette équation devient

$$dp - dq = \left(\frac{p}{x} + k\right)(dx + dy) - k(dx + dy) + \omega(dx - dy),$$

dans laquelle, ſi une des deux quantités k & ω contient une indéterminée, la ſubſtitution de l'équation $dx - dy = 0$ ſera faite. L'autre quantité pourra enſuite être déterminée de manière à rendre poſſible l'intégrale du ſecond membre.

Soient donc $k = \psi''(x - y)$ & $\omega = - 2x\psi'''(x - y)$, l'intégrale de cette équation ſera alors

$$(A) \quad p - q = \psi'(x - y) - 2x\psi''(x - y) + \int\left[\frac{p}{x} + \psi''(x - y)\right](dx + dy),$$

& ce ſera une des intégrales premières de la propoſée, intégrale que les Géomètres ont méconnue.

La quantité qui eſt ſous le ſigne d'intégration ne pouvant être qu'une fonction de $(x + y)$, il s'enſuit que cette intégrale peut être repréſentée par le ſyſtème des deux équations ſimultanées

$$p - q = \psi'(x - y) - 2x\psi''(x - y) + \varphi'(x + y),$$
$$\varphi''(x + y) = \frac{p}{x} + \psi''(x - y),$$

dont l'une eſt deſtinée à déterminer la forme de la fonction ſurabondante.

Au lieu d'employer la racine $dx - dy = 0$, on auroit pu ſe ſervir de l'autre $dx + dy = 0$, & en opérant d'une manière analogue, on auroit trouvé l'autre intégrale première

$$(B) \quad p + q = \varphi'(x + y) - 2x\varphi''(x + y) + \int\left[\frac{p}{x} + \varphi''(x + y)\right](dx - dy).$$

que l'on peut de même repréſenter par le ſyſtème des équations ſimultanées

$$p + q = \varphi'(x + y) - 2x\varphi''(x + y) + \psi'(x - y),$$
$$\psi''(x - y) = \frac{p}{x} + \varphi''(x + y).$$

XVI.

Les deux intégrales premières *(A)* & *(B)*, que l'on vient de trouver, n'étant pas linéaires, ne peuvent pas être traitées par la méthode dont il s'agit dans ce Mémoire : mais si au lieu de l'une d'elles, on prend les deux équations simultanées qui la représentent, on en tirera pour p & pour q des valeurs qui, substituées dans $dz = pdx + qdy$, donneront une équation aux différences ordinaires, dont l'intégrale sera, en quantités finies, celle de la proposée. Par exemple, les deux équations simultanées qui représentent l'équation *(A)*, donnent

$$p = x[\varphi''(x+y) - \psi''(x-y)],$$
$$q = x[\varphi''(x+y) - \psi(x-y)] - \psi'(x-y) + 2x\psi''(x-y) - \varphi'(x+y).$$

& par conséquent

$$dz = x\varphi''(x+y)(dx+dy) - dy\varphi'(x+y) - x\psi''(dx-dy) - dy\psi'(x-y);$$

qui, en ajoutant & retranchant

$$dx\varphi'(x+y) + dx\psi'(x-y),$$

devient la différentielle exacte de l'équation

$$z = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x+y) - x\varphi'(x+y) \\ + \psi(x-y) - x\psi'(x-y) \end{array} \right\}$$

intégrale finie & complète de la proposée.

XVII.

Nous disons que les deux équations *(A)* & *(B)* sont les intégrales premières de l'équation aux différences secondes, 1.° parce qu'elles ne contiennent plus de différences partielles du second ordre, & qu'elles renferment chacune une fonction arbitraire, qui rend leur généralité aussi grande que celle de la proposée ; 2.° parce que c'est à l'une ou à

l'autre de ces deux équations que l'on arrive, lorſqu'a avoir différencié, aux différences premières, é finie, on élimine ou l'une ou l'autre des deux fonct arbitraires & ſa différentielle. En effet, ſi l'on différe l'intégrale finie ſucceſſivement, par rapport à x & rapport à y, on a les deux équations

$$p = -x[\varphi''(x + y) + \psi''(x - $$

&

$$q = -x[\varphi''(x + y) - \psi''(x - $$
$$+ \varphi'(x + y) - \psi'(x - $$

qui, priſes ſimultanément, expriment la même choſe l'intégrale finie. Si l'on en élimine φ'' on trouve

$$p - q = -\varphi'(x + y) + \psi'(x - y) - 2x\psi''(x - $$

qui n'eſt pas la différentielle première que l'on demar Il ne ſuffit pas, pour employer la première des deux éq tions ſimultanées, d'en faire uſage pour chaſſer φ'', il encore par ſon moyen chaſſer φ'; ainſi, la dernière équa ne tient encore lieu que de l'une des deux précéde qui l'ont produite, & il faut la combiner avec une d'el pour que leur ſyſtème repréſente exactement l'intég finie : or, on ne peut éliminer la fonction φ' plus ſim ment qu'en prenant ſa valeur dans celle de p, où elle r élevée qu'à un ſeul ordre de différentielles, ce qui do

$$\varphi'(x + y) = -\int[\tfrac{p}{x} + \psi''(x - y)](dx + d$$

& ſubſtituant dans la dernière équation, on a, com ci-deſſus,

$$(A) \quad p - q = \psi'(x - y) - 2x\psi''(x - $$
$$+ \int[\tfrac{p}{x} + \psi''(x - y)](dx + d$$

équation qui tient lieu ſeule de l'intégrale finie, en exp mant la même choſe qu'elle, & qui, étant aux différen partie

partielles premières, & contenant d'ailleurs une fonction arbitraire de moins, en est la différentielle première.

En éliminant de la même manière la fonction ψ, on auroit trouvé l'équation *(B)*, qui est l'autre différentielle première: chacune de ces équations *(A)* & *(B)*, différenciée par rapport à x, puis par rapport à y, produit également, par l'élimination de la fonction arbitraire qui reste, l'équation aux différences secondes,

$$r - t - \frac{2p}{x} = 0.$$

XVIII.

On a reproché que ces expressions étoient abusives, & l'on a dit que les deux équations *(A)* & *(B)* renfermant des intégrations qui ne sont qu'indiquées, ne peuvent être regardées comme des intégrales actuellement obtenues; mais l'objet de la question étoit de délivrer les proposées des différences partielles du second ordre, & d'arriver à une équation unique qui exprimât la même chose, & qui ne contînt aucune trace des manières différentes dont p & q peuvent varier; nous l'avons fait. D'ailleurs, il n'y a aucun Géomètre qui ne regarde l'équation

$$z = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x+y) - x\varphi'(x+y) \\ + \psi(x-y) - x\psi'(x-y), \end{array} \right.$$

comme l'intégrale finie de la proposée; cependant cette équation est une véritable différentielle aux différences ordinaires; on peut la mettre sous la forme suivante:

$$\frac{z}{x^2} = \left\{ \frac{d\left[\frac{\varphi(x+y)+\psi(x-y)}{x}\right]}{dx} \right\},$$

qui n'est pas simplement équivalente, mais qui est absolument la même, puisqu'il n'y a qu'à exécuter les opérations indiquées dans l'une, pour avoir l'autre. On peut de même écrire les deux intégrales premières *(A)* & *(B)*, sous les formes différentielles ordinaires,

$$dp - dq = \frac{p}{n}(dx + dy) - 2x\psi'''(x - y)(dx - dy),$$

$$dp + dq = \frac{p}{n}(dx - dy) - 2x\varphi'''(x + y)(dx + dy);$$

& chacune de ces équations sera l'intégrale première de l'équation aux différences secondes, de la même manière que la différentielle précédente en est l'intégrale seconde complète; c'est même parce que ces deux intégrales premières sont exprimées en différentielles ordinaires, ou parce qu'elles comportent une intégration qu'on ne peut qu'indiquer, que l'intégrale finie conserve sa forme différentielle.

Nous avons donc donné à nos expressions la valeur que leur donnent tous les autres Géomètres; c'est donc en parlant comme eux, qu'on doit dire que l'équation proposée aux différences secondes partielles, a, de même que toutes celles dont l'intégrale seconde est possible, ses deux intégrales premières, par chacune desquelles on passe également, soit en allant par l'intégration des différences secondes à l'intégrale finie, soit en retournant par la différenciation de celle-ci aux différences secondes.

XIX.

Nous ferons remarquer cependant, que c'est seulement ce qu'exprime l'une ou l'autre des équations *(A)* & *(B)*, qui est nécessaire: leurs formes ne sont pas uniques, & l'on conçoit qu'en exécutant, au moins en partie, les intégrations indiquées, on peut arriver à des résultats équivalens & de formes différentes.

XX.

La manière dont nous avons trouvé les intégrales premières *(A)* & *(B)*, *article XV*, supposoit que la forme de l'intégrale finie étoit connue: nous n'avons pas indiqué comment on pouvoit trouver les valeurs de k & de ω, indépendamment de la connoissance de cette forme; nous

allons l'expoſer ici pour donner un exemple de conduite dans l'emploi de la méthode dont il s'agit.

Les deux équations ſimultanées aux différences ordinaires, & qui repréſentent la propoſée, ſont, en employant la première racine,

$$dx - dy = 0$$
$$dp - dq = \frac{2p\,dx}{x};$$

le premier membre de la ſeconde eſt déjà une différentielle complète, il reſte à faire en ſorte que l'intégrale du ſecond membre ſoit poſſible. Or nous ſavons que les fonctions arbitraires qui entreront dans l'intégrale finie, ſeront compoſées des quantités différentes $x + y = a$, & $x - y = a'$; donc ſi l'on prend dans ces deux dernières équations les valeurs de x & de dx, en a, a' & da, pour les ſubſtituer dans le ſecond membre de l'équation à intégrer, elle deviendra, à cauſe de $da' = 0$,

$$dp - dq = \frac{2p}{a + a'}\,da,$$

équation qui ſeule ne repréſente pas encore la propoſée, parce qu'il ne ſuffit pas de faire uſage de l'équation $da' = 0$; pour l'employer, il faut de plus introduire une fonction arbitraire de a'; ainſi la propoſée n'eſt encore repréſentée que par le ſyſtème des équations ſimultanées

$$da' = 0,$$
$$dp - dq = \frac{2p}{a + a'}\,da.$$

Mais ſi l'on ſuppoſe que la quantité ω contienne une fonction arbitraire de a', l'équation

$$(a) \quad dp - dq = \frac{2p}{a + a'}\,da + \omega\,da'$$

ſeule, pourra repréſenter la propoſée, & le ſera en effet lorſqu'on aura déterminé ω, de manière à ne rien dire de trop général : or, l'intégrale du ſecond membre de cette

équation ne pouvant être qu'une fonction de a & de a', que nous indiquerons par V, l'intégrale de l'équation sera

$$p - q = V,$$

V devant être telle que l'on ait

$$\frac{dV}{da} = \frac{2p}{a+a'};$$

& ces deux équations simultanées tiendront encore lieu de la proposée, lorsqu'on aura déterminé V, de manière qu'elle n'ait que la généralité nécessaire à cet effet.

Ces deux dernières équations donnent

$$(b) \quad p = \frac{a+a'}{2} \frac{dV}{da},$$

$$(c) \quad q = \frac{a+a'}{2} \frac{dV}{da} - V.$$

Différenciant la première par rapport à x, la seconde par rapport à y, on a, à cause de $da + da' = 2dx$,

$$r = \quad \frac{dV}{da} + \frac{a+a'}{2} \frac{ddV}{dxda},$$

$$t = - \frac{dV}{dy} + \frac{a+a'}{2} \frac{ddV}{dyda}.$$

Substituant ces valeurs dans la proposée $r - t - \frac{2p}{x} = 0$, on a

$$\frac{a+a'}{2} \left(\frac{ddV}{dxda} - \frac{ddV}{dyda}\right) + \frac{dV}{dy} - \frac{dV}{da} = 0,$$

équation à laquelle V doit satisfaire, pour que les équations (b) & (c), prises simultanément, énoncent la même chose que la proposée.

Si l'on transforme les différences partielles de V, prises par rapport à x & y, en différences prises par rapport à a & a', cette équation de condition devient

$$(a + a') \frac{ddV}{dada'} - \frac{dV}{da} = 0,$$

dont l'intégrale première eſt,

$$\frac{dV}{dd'} = (a + d')\,\psi'''d' = 2x\,\psi'''(x - y);$$

or, c'eſt cette quantité $\frac{dV}{dd'}$ que nous avons repréſentée par ω dans l'équation *(a)*; donc en ſubſtituant cette valeur, l'équation *(a)* deviendra

$$dp - dq = \frac{p}{a}(dx + dy) + 2x\,\psi'''(x - y),$$

qui coïncide avec une de celles de l'*article XVIII*, & dont l'intégrale, qui eſt l'équation *(A)*, eſt une des intégrales premières de la propoſée, & énonce ſeule la même choſe qu'elle.

Ou bien intégrant encore l'équation,

$$\frac{dV}{dd'} = (a + d')\,\psi'''d',$$

on a

$$V = (a + d')\,\psi''d' - \psi'd' + \varphi'a,$$

dans laquelle φ eſt une fonction arbitraire, & qui donne, en différenciant par rapport à a,

$$\frac{dV}{da} = \psi''d' + \varphi''a.$$

Actuellement que les quantités V & $\frac{dV}{da}$ ſont déterminées, ſi on ſubſtitue leurs valeurs dans *(b)* & *(c)*, on aura

$$p = \frac{a + d'}{2}(\varphi''a + \psi''d'),$$

$$q = \frac{a + d'}{2}(\varphi''a + \psi''d') - (a + d')\,\psi''d' + \psi'd' - \varphi'a,$$

qui, en mettant pour a & d' leurs valeurs, deviennent

$$p = x[\varphi''(x + y) + \psi''(x - y)],$$

$$q = x[\varphi''(x + y) - \psi''(x - y)] + \psi'(x - y) - \varphi'(x + y);$$

équations qui sont les mêmes que celles de l'*article XVI*, & qu'on intégrera en quantités finies de la même manière.

X X I.

Nous n'avons tant insisté sur cet exemple, que pour mettre en état de tirer les conclusions suivantes.

1.° Lorsque des deux équations aux différences ordinaires

$$A\,dy^2 - B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0,$$
$$A\,dp\,dy + C\,dq\,dx + D\,dx\,dy = 0,$$

que nous avons données, *article VIII*, & auxquelles on est conduit par la méthode de ce Mémoire, on peut en déduire une autre en dx, dy, dz, intégrable, de manière que les deux solutions de cette intégrale soient

$$V = a,\ V' = a';$$

il n'est pas nécessaire que l'autre équation soit aussi intégrable, ni même qu'elle le devienne en vertu de la précédente, pour que l'on puisse exprimer l'intégrale première de la proposée : cela est nécessaire seulement pour que cette intégrale première soit exprimée par une équation unique, & par conséquent de la forme $U = \varphi V$, $U' = \psi V'$, V & V' étant en x, y, z. Mais, lors même que la seconde équation aux différences ordinaires ne sera pas intégrable, l'intégrale première pourra souvent être représentée, comme dans l'exemple précédent, par le système de deux équations simultanées qu'on pourra encore espérer d'intégrer en qnantités finies, mais par d'autres méthodes, parce qu'elles ne seront pas linéaires par rapport à p & à q.

2.° On ne pourra avoir en x, y, z, les quantités dont doivent être composées les deux fonctions arbitraires de l'intégrale finie, que quand des deux équations aux différences ordinaires il sera possible d'en déduire une autre en dx, dy, dz, qui soit intégrable. Si l'on ne peut former d'équations intégrables qu'en dx, dy, dz, dp, dq, il faudra

en avoir deux pour que les deux intégrales premières puissent être exprimées chacune par une équation unique de la forme

$$U = \varphi V,$$

dans laquelle U & V soient toutes deux composées de x, y, z, p, q; mais, dans ce cas même, il ne sera pas nécessaire d'en avoir deux pour que les intégrales premières soient exprefsibles analytiquement, & souvent lorsqu'une seule des équations aux différences ordinaires sera intégrable, il sera possible de représenter chacune des intégrales premières par le système de deux équations simultanées, dont l'une sera destinée, dans certains cas, à éliminer une indéterminée, & dans d'autres, à déterminer la forme d'une fonction surabondante. Nous aurons, un peu plus loin, l'occasion d'éclaircir cela par un exemple.

Nous ne nous permettrons plus qu'une seule remarque, qu'il est nécessaire de faire pour ne pas tomber dans de grandes erreurs.

XXII.

Lorsque des deux équations aux différences ordinaires intégrables, & qui sont d'abord toutes deux du second degré, l'une ne s'abaisse pas au premier degré en vertu de l'intégrale de l'autre; leurs intégrales ont chacune deux solutions,

$$\left.\begin{array}{l} V = a \\ V' = a' \end{array}\right\} \text{pour la première,}$$

$$\left.\begin{array}{l} U = b \\ U' = b' \end{array}\right\} \text{pour la seconde,}$$

qui donneroient quatre combinaisons, deux à deux, & par conséquent quatre équations qu'on pourroit d'abord regarder comme les intégrales premières de la proposée. De ces quatre équations, il n'y en a que deux qui appartiennent à la proposée, & qui la représentent chacune complétement; les deux autres sont, pour ainsi dire, étrangères à la question,

& l'on n'a de moyen pour diſtinguer les combinaiſons qui conviennent à l'objet, que de différencier & de reconnoître par-là celles qui ſatisfont à la propoſée. Nous en avons déjà donné un exemple dans le Mémoire précédent, ſur l'expreſſion analytique de la génération des ſurfaces courbes, où nous avons fait voir, *articles IX & XV*, que deux ſurfaces courbes, dont les générations ſont très-différentes, & qui n'ont ni les mêmes équations aux différences partielles, ni les mêmes équations en quantités finies, ſont cependant toutes deux repréſentées par le même ſyſtème de deux équations ſimultanées aux différences ordinaires du ſecond degré. Cela arrive toutes les fois que la propriété de la ſurface eſt qu'il y ait une certaine relation entre deux quantités qui ſont les racines inégales d'une même équation algébrique : ſi, dans cette relation, c'eſt toujours la même racine qui eſt employée, on a une première ſurface; mais ſi les différentes racines ſont mêlées, on a d'autres ſurfaces très-diſtinctes, & dont les équations ne ſont pas les mêmes. Nous allons en apporter un autre exemple.

XXIII.

EXEMPLE II. Soit propoſé d'intégrer l'équation

$$(D)\ (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0;$$

qui eſt celle de la ſurface dont l'aire eſt un *minimum*, & que M. le Chevalier de Borda a publiée dans les Mémoires de l'Académie. Cette équation exprime cette propriété, remarquée par M. Meuſnier, que les deux rayons de courbure ſont par-tout égaux entr'eux & dirigés en ſens contraire. En effet, ſi l'on fait pour abréger

$$\begin{aligned} r(1 + q^2) - pqs &= \alpha, \\ t(1 + p^2) - pqs &= \beta, \\ s(1 + p^2) - pqr &= \gamma, \\ s(1 + q^2) - pqt &= \delta, \\ 1 + p^2 + q^2 &= k; \end{aligned}$$

l'expreſſion

l'expression des deux rayons de courbure d'une surface courbe, donnée par M. Euler, est,

$$R = k^3 \left\{ \frac{-\alpha - \beta + [\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta}]}{2(\alpha\beta - \gamma\delta)} \right\};$$

or, pour exprimer que les deux rayons de courbure sont égaux entr'eux & de signes contraires, il faut faire

$$\alpha + \beta = 0,$$

ou

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0,$$

qui est la proposée. Mais pour exprimer que les deux rayons de courbure sont égaux & de mêmes signes, il faut égaler à zéro le radical, ce qui donne

$$(E) \quad [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]^2 - 4(rt - s^2)(1 + p^2 + q^2) = 0;$$

équation qui est très-différente de la précédente, & qui cependant sera représentée par le même système d'équations aux différences ordinaires simultanées, comme nous allons le voir.

XXIV.

Si l'on applique à la proposée *(D)*, ce que nous avons dit, *article VIII*, les équations aux différences ordinaires simultanées qui la représenteront, seront

$$(1 + q^2)dy^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + p^2)dx^2 = 0,$$
$$(1 + q^2)dp\,dy + (1 + p^2)dq\,dx = 0;$$

& par conséquent

$$(1 + q^2)dp^2 - 2pq\,dp\,dq + (1 + p^2)dq^2 = 0.$$

De ces trois équations, deux quelconques comportent la troisième; la dernière s'intègre facilement par le moyen que nous avons donné pour les équations élevées, dans

les Mémoires de l'Académie, *année 1783*, & son intégrale est

$$(1 + q^2)a^2 - 2apq + 1 + p^2 = 0,$$

a étant la constante arbitraire; ce qui donne les deux solutions suivantes,

$$(F) \quad a = \frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

$$(G) \quad a' = \frac{pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}.$$

Cela posé, selon que ce sera l'une ou l'autre de ces deux solutions, que l'on combinera avec une des solutions de l'autre équation, ce sera l'une ou l'autre des deux surfaces dont nous venons de parler, que l'on exprimera. Par exemple, si l'on prend la première équation aux différences ordinaires, qui a de même ses deux racines,

$$(H) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

$$(J) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

& que l'on combine ensemble celles où les signes du radical sont les mêmes, on aura les deux équations simultanées *(F)*, *(H)*, ou *(G)*, *(J)*, qui appartiendront à la surface dont l'aire est un *minimum;* elles seront de la même généralité que la proposée *(D)*, & elles exprimeront ensemble exactement la même chose qu'elle. Mais si l'on combine les solutions où les signes du radical sont différens, chacun des systèmes d'équations simultanées *(F)*, *(J)*, ou *(G)*, *(H)*, appartiendra à l'autre surface, & représentera exactement l'équation *(E)*, comme on peut s'en assurer par la différenciation.

XXV.

Il pouvoit donc se faire que l'on prît l'un de ces derniers

systèmes, parce qu'ils présentent des facilités de calcul, & l'on auroit eu les deux équations simultanées

$$(F) \qquad a = \frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

$$(J) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2};$$

de ces deux équations on auroit tiré $dy + a dx = 0$, dont l'intégrale $y + ax = b$ auroit donné, en faisant $b = \varphi a$,

$$y + x\left[\frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}\right] = \varphi\left[\frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}\right],$$

pour intégrale première; & parce que l'équation (F) donne $aq - p = \sqrt{(-1 - a^2)}$, qui, étant elle-même linéaire, s'intègre par notre méthode, & produit $z + x\sqrt{(-1 - a^2)} = \psi a$, on auroit pu regarder l'intégrale de la proposée (D), comme étant le résultat de l'élimination de a entre les deux équations

$$y + ax = \varphi a,$$
$$z + x\sqrt{(-1 - a^2)} = \psi a,$$

ce qui n'auroit pas été vrai. Ce résultat est l'intégrale finie & complète de l'équation (E), & appartient à la surface dont les deux rayons de courbure sont par-tout égaux & dans le même sens. Voilà l'erreur contre laquelle nous avons voulu prémunir, & qu'on peut éviter avant que d'intégrer, en recherchant, par la différenciation, quel est le système d'équations simultanées qui reproduit la proposée.

XXVI.

Pour avoir l'intégrale de l'équation (D), il faut donc employer simultanément les solutions dans lesquelles le radical a le même signe, par exemple, les deux équations suivantes:

$$(F) \qquad a = \frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

$$(H) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}.$$

Si l'on fait, pour abréger, $a' = \frac{pq - \sqrt{(-1 - p^2 -}}{1 + q^2}$
la dernière équation devient

$$dy + a'dx = 0,$$

dans laquelle a' n'eſt pas conſtant, & dont l'intégral
peut être repréſentée que par les deux équations ſimulta

$$y + a'x = \pi a' + \varphi a,$$
$$\pi' a' = x;$$

donc l'intégrale première de l'équation *(D)*, qui appar
à la ſurface dont l'aire eſt *minimum*, eſt compriſe
les deux équations

$$y + x\,\frac{pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2} = \pi\left\{\frac{pq - \sqrt{(-1 - p^2 -}}{1 + q^2}\right.$$
$$+ \varphi\left\{\frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q}}{1 + q^2}\right.$$
$$\pi'\left\{\frac{pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}\right\} - x = 0,$$

dont l'une eſt deſtinée à déterminer la forme de la
tion ſurabondante.

En prenant le ſyſtème des deux équations *(G)*, *(J*
en opérant de la même manière, on auroit eu pour l'
intégrale première les deux équations ſimultanées

$$y + ax = \varpi a + \psi a',$$
$$\varpi' a = x.$$

Actuellement, pour arriver à l'intégrale finie, il fau

tirer, de ces deux intégrales premières, les valeurs de p & de q, & les ſubſtituer dans l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

& l'intégrale de cette équation ſeroit l'intégrale demandée. Cette opération ne peut pas s'exécuter, mais nous pouvons en faire l'équivalent. En effet, les deux équations *(F)*, *(G)*, donnent

$$(a - a')p = a\sqrt{(-1 - a'^2)} + a'\sqrt{(-1 - a^2)},$$
$$(a - a')q = \sqrt{(-1 - a'^2)} + \sqrt{(-1 - a^2)},$$

& par conſéquent,

$$(a - a')\,dz = (a\,dx + dy)\sqrt{(-1 - a'^2)} + (a'\,dx + dy)\sqrt{(-1 - a^2)}.$$

Mais les deux intégrales premières donnent

$$dy + a'\,dx = \varphi' a\,da,$$
$$dy + a\,dx = \psi' a'\,da';$$

donc on a en même temps

$$(a - a')\,dx = \psi' a'\,da' - \varphi' a\,da,$$
$$(a - a')\,dy = a\varphi' a\,da - a'\psi' a'\,da';$$
$$(a - a')\,dz = \psi' a'\,da'\sqrt{(-1 - a'^2)} + \varphi' a\,da\sqrt{(-1 - a^2)};$$

donc enfin l'intégrale ſeconde de l'équation *(D)*, eſt le réſultat de l'élimination des deux indéterminées a & a', entre les trois équations ſuivantes,

$$x = \int \frac{\psi' a'\,da' - \varphi' a\,da}{a - a'},$$
$$y = \int \frac{a\varphi' a\,da - a'\psi' a'\,da'}{a - a'},$$
$$z = \int \frac{\psi' a'\,da'\sqrt{(-1 - a'^2)} + \varphi' a\,da\sqrt{(-1 - a^2)}}{a - a'};$$

& en effet, si, en différenciant ce système d'équations simultanées, on fait disparoître les deux fonctions arbitraires, & si on élimine les deux indéterminées a & a', ce qui est alors possible, on reproduit l'équation (D).

XXVII.

Nous n'abusons pas des termes en disant que le système de ces trois équations simultanées représente l'intégrale seconde de la proposée (D), parce que, dans ce système, il n'est plus question d'aucunes différences partielles, ni du premier ordre, ni du second, & qu'elles sont suppléées par deux fonctions arbitraires. Quant aux intégrations aux différences ordinaires qui restent à faire, & qu'on ne peut qu'indiquer, elles tiennent à la nature des choses, & elles viennent de ce que la génération de la surface que l'on considère est transcendante. Pour éclaircir ce que nous entendons par-là, il faut se rappeler que toute équation aux différences partielles est l'expression de la génération d'une surface courbe, indépendamment des courbes qui servent à cette génération & dont il n'est pas question dans l'équation. Toutes les fois que la génération pourra s'exprimer algébriquement, les fonctions arbitraires entreront d'une manière algébrique dans l'intégrale finie de l'équation aux différences partielles ; & les équations particulières des surfaces comprises dans cette génération, ne pourront devenir transcendantes que quand les courbes génératrices, & les fonctions dont ces courbes déterminent la forme, ne seront pas algébriques. Ainsi, par exemple, une surface de révolution ne peut jamais être transcendante, par cela seul qu'elle est de révolution, & elle ne peut le devenir que quand sa courbe génératrice n'est pas algébrique. Mais lorsque cette génération sera elle-même transcendante ; les fonctions arbitraires entreront aussi d'une manière transcendante dans l'intégrale finie, & il sera impossible d'exprimer cette intégrale autrement que par des différences ordinaires, ou, ce qui revient au même, sans employer

des intégrations indiquées; & les équations particulières des surfaces comprises dans cette génération, ne pourront devenir algébriques que dans les cas très-rares, où les transcendantes introduites par la génération, seront détruites par celles qu'introduiront les courbes génératrices.

XXVIII.

Quoique les intégrales finies des équations des deux surfaces courbes que nous venons de considérer, ne puissent être représentées chacune en particulier que par le système de deux équations simultanées pour la première, & de trois pour la seconde; néanmoins on peut, sans les distinguer, les intégrer par notre méthode, & obtenir une équation unique & finie qui les exprime toutes deux ensemble.

En effet, reprenons les deux équations aux différences ordinaires de l'*article XXIV*,

$$(1+q^2)dq^2 + 2pq\,dx\,dy + (1+p^2)dx^2 = 0,$$
$$(1+q^2)dp^2 - 2pq\,dp\,dq + (1+p^2)dq^2 = 0,$$

qui, prises simultanément, appartiennent à ces deux surfaces. L'intégrale de la seconde, comme nous l'avons déjà dit, est

$$(1+q^2)a^2 - 2apq + 1 + p^2 = 0.$$

La première peut être mise sous la forme suivante,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0;$$

& son intégrale peut être représentée par

$$\int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = b,$$

constante arbitraire. Les deux racines de cette équation étant égales, on peut déjà conclure que les deux fonctions qui compléteront l'intégrale finie seront composées de la même quantité b. Donc en faisant $a = \varphi b$, l'intégrale première sera

$$(1+q^2)\left[\varphi\int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}\right]^2$$
$$- 2pq\varphi\int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + 1 + p^2 = 0.$$

Actuellement, pour intégrer encore une fois cette équation, nous conservons la quantité a, pour abréger, & nous la mettons sous cette forme,

$$aq - p = \sqrt{(-1 - a^2)},$$

qui, étant linéaire, se traite par la méthode de l'*article III*, & donne pour équation aux différences ordinaires,

$$dz + dx\sqrt{(-1 - a^2)} = 0,$$
$$dy + a\,dx = 0,$$
$$a\,dz - dy\sqrt{(-1 - a^2)} = 0.$$

Si de deux de ces trois équations on élimine la quantité a, on aura encore

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

qui tiendra lieu d'une d'entr'elles; & si on combine cette dernière avec une des autres, par exemple, avec la seconde, ces deux équations comprendront toute la question.

Or, de ces deux équations, la première donne, comme ci-dessus,

$$\int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = b,$$

& l'intégrale de la seconde, puisque a est constante, est $y + ax = c$, constante arbitraire. Donc, l'intégrale en quantités finies, commune aux deux surfaces, est

$$y + ax = \psi b,$$

qui, à cause de $a = \varphi b$, peut être mise sous la forme symétrique

$$y\varphi\int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + x\psi\int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + 1 = 0.$$

XXIX.

Pour nous assurer que cette équation est l'intégrale commune aux deux surfaces, dont les deux rayons de courbure

courbure font par-tout égaux entr'eux, sans distinction de sens, il faut faire évanouir les deux fonctions φ & ψ, ce qui se fait commodément par le procédé de l'*article I.er* Pour cela, mettons-la sous la forme

$$y + x\varphi = \psi;$$

& nous aurons les deux équations aux différences ordinaires

$$dy + dx\varphi = 0,$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0;$$

ou

$$(1 + q^2)dy^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + p^2)dx^2 = 0;$$

& éliminant $\frac{dy}{dx}$ entre la première & la troisième, on aura pour différentielle première

$$(K) \quad (1 + q^2)\varphi^2 - 2pq\varphi + 1 + p^2 = 0.$$

Le même procédé donnera encore les deux équations aux différences ordinaires

$$(L) \quad q(sdx + tdy)\varphi^2 - \left\{\begin{matrix} p\varphi(sdx + tdy) \\ q\varphi(rdx + sdy) \end{matrix}\right\} + p(rdx + sdy) = 0,$$

$$(M) \quad (1 + q^2)dx^2 + 2pq\,dx\,dy + 1 + p^2 = 0;$$

& éliminant les deux quantités φ & $\frac{dy}{dx}$ entre les trois équations (K), (L), (M), la résultante sera composée des deux facteurs suivans :

$$(D) \quad (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0;$$

$$(E) \quad [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]^2 - 4(1 + p^2 + q^2)(rt - s^2) = 0.$$

Le premier est la proposée de l'*article XXIII*, c'est-à-dire, l'équation de la surface, dont les deux rayons de courbure sont par-tout égaux entr'eux, & en sens contraire, ou

dont l'aire eſt un *minimum:* le ſecond eſt l'équation de la ſurface pour laquelle les rayons de courbure ſont égaux, & dans le même ſens.

Cette diſtinction néceſſaire des racines des équations aux différences ordinaires, n'eſt pas une ſuite de la méthode que nous propoſons, elle tient à la nature même des choſes : il faudroit donc pareillement l'obſerver dans tout autre procédé d'intégration, & nous ne croyons pas qu'il y en ait qui fourniſſe pour cela des moyens auſſi ſimples & auſſi naturels.

XXX.

On nous a encore propoſé d'intégrer l'équation

$$r - t + 2bq = 0,$$

qu'on a coutume de regarder comme n'ayant point d'intégrales premières; nous allons intégrer la ſuivante,

$$(A) \quad Ar + Bs + Ct + Dp + Eq + F = 0,$$

dont elle eſt un cas particulier, & dans laquelle tous les coéfficiens ſont ſuppoſés conſtans. Dans ce cas, les équations aux différences ordinaires de l'*article VIII*, deviennent

$$A\,dy^2 - Bdxdy + Cdx^2 = 0,$$
$$Adpdy + Cdqdx + dxdy\,(Dp + Eq + F) = 0.$$

Les racines de la première ſont

$$dy - kdx = 0, \;\&\; dy - k'dx = 0;$$

k & k' étant les racines de l'équation algébrique

$$Ak^2 - Bk + C = 0.$$

En employant la première racine, la ſeconde équation devient

$$A(dp + k'dq) + dx(Dp + Eq + F) = 0;$$

& ſi l'on fait

$$dy - kdx = da, \; dy - k'dx = da',$$

ce qui donne $dx = \frac{dd' - da}{k - k'}$, & $dy = \frac{kdd' - k'da}{k - k'}$; cette équation, à cause de l'hypothèse $da = 0$, devient

$$A(dp + k'dq) + \frac{dd'}{k - k'}(Dp + Eq + F) = 0,$$

dont l'intégrale est représentée par le système des deux équations simultanées

$$A(p + k'q) + \psi'd' = \varphi'a,$$
$$(k - k')\psi''d' = Dp + Eq + F:$$

c'est le système de ces deux équations, dont l'une est destinée à déterminer la forme de la fonction surabondante, qui est l'intégrale première complète de la proposée. Actuellement, si de ces deux équations on tire les valeurs de p & de q, & qu'on les substitue dans $dz = pdx + qdy$, en employant pour dx & dy les valeurs trouvées plus haut; on a en intégrant

$$\left.\begin{aligned} &z(Dk' - E) - d'F + A(k - k')^2\psi'd' \\ &+ (Dk - E)\psi d' - (Dk' - E)\varphi a \\ &+ \int[(Dk - E)\varphi'ada' - (Dk' - E)\psi'd'da \end{aligned}\right\} = 0,$$

qui est l'intégrale complète de l'équation (A).

Il suit de-là, que l'intégrale complète de l'équation $r - t + 2bq = 0$, est

$$z = \varphi a + \psi d' - \frac{2}{b}\psi'd' - \int(\varphi'ada' + \psi'd'da);$$

dans laquelle on a fait, pour abréger,

$$y - x = a, \text{ \& } y + x = d'.$$

De l'intégration des équations aux différences partielles linéaires du troisième ordre.

XXXI.

Soit fait pour abréger

$$dr = \alpha dx + \beta dy,$$

$$ds = \beta dx + \gamma dy,$$

$$dt = \gamma dx + \epsilon dy,$$

de manière que α, β, γ, ϵ, ſoient les quatre différences partielles du troiſième ordre; & ſoit propoſé d'intégrer l'équation linéaire générale

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\epsilon + E = 0,$$

dans laquelle les coéfficiens A, B, C, D, E, ſoient donnés, d'une manière quelconque, en x, y, z, p, q, r, s, t. Si de cette équation & des trois précédentes, on élimine trois des quatre quantités α, β, γ, ϵ, les trois dernières, par exemple, on aura

$$\left.\begin{array}{l} \alpha(Ady^3 - Bdy^2dx + Cdydx^2 - Ddx^3) \\ \quad + dy^2(Bdr + Cds + Ddt) \\ \quad - dxdy(Cdr + Dds) \\ \quad + dx^2Ddr \\ \quad + Edy^3 \end{array}\right\} = 0.$$

Cette équation devant avoir lieu indépendamment de α; qui ne peut être déterminé, donne les deux équations aux différences ordinaires

$$Ady^3 - Bdy^2dx + Cdydx^2 - Ddx^3 = 0,$$

$$dy^2(Bdr + Cds + Ddt) - dxdy(Cdr + Dds) + Ddx^2dr + Edy^3 = 0.$$

Cela poſé, ſi ces deux équations ſont immédiatement intégrables, ou ſi on peut en déduire deux autres qui le ſoient, ou ſi l'une le devient en vertu de l'intégrale de l'autre . . . &c. & que les deux intégrales ſoient

$$V = a,$$

$$U = b,$$

a & b étant les constantes arbitraires introduites par intégration, l'intégrale première de la proposée sera

$$V = \varphi U.$$

Nous ne nous permettrons qu'un seul exemple.

XXXII.

Soit proposé d'intégrer l'équation des surfaces engendrées d'une manière quelconque, par le mouvement d'une ligne droite, & qui en faisant, pour abréger,

$$- s + \sqrt{(s^2 - rt)} = u,$$

est $t^3 \alpha + 3 t^2 u \beta + 3 t u^2 \gamma + u^3 \epsilon = 0$;

les deux équations aux différences ordinaires de l'*article précédent*, deviennent, dans ce cas,

$$t^3 dy^3 - 3t^2 u dy^2 dx + 3 t u^2 dy dx^2 - u^3 dx^3 = 0,$$

$$dy^2 (3t^2 dr + 3tuds + u^2 dt) - dxdy(3utdr + u^2 ds) + u^2 dx^2 dr = 0.$$

La première a les trois racines égales,

$$(A) \quad tdy - udx = 0;$$

& la seconde, en vertu de cette racine, devient

$$(B) \quad u^2 dt + 2utds + t^2 dr = 0:$$

ainsi les deux équations (A) & (B), prises simultanément, renferment toute la question.

Or l'intégrale de (B) est $\frac{u}{t} = a$,

& celle de (A), puisque $\frac{u}{t}$ est constant, est

$$y = ax + b;$$

donc l'intégrale première de la proposée, est

$$y = \frac{u}{t} x + \varphi\left(\frac{u}{t}\right).$$

Cette équation n'est pas linéaire, & cependant on peut

encore la traiter par la méthode de ce Mémoire; car elle exprime que si l'on fait $\frac{u}{t}$ = constante = a, ce qui donne, en mettant pour u sa valeur,

$$r + 2as + a^2 t = 0,$$

on a $$y = ax + \varphi a,$$

Or l'intégrale complète de la première est

$$z = x\psi(ax - y) + \pi(ax - y),$$

qui, en vertu de la seconde, devient

$$z = x\psi a + \pi a;$$

donc l'intégrale troisième & complète de la proposée, est représentée par le système des deux équations simultanées

$$y = ax + \varphi a,$$
$$z = x\psi a + \pi a,$$

c'est-à-dire, qu'elle est le résultat qu'on obtiendroit en éliminant l'indéterminée a entre ces deux équations; ce que nous avons déjà fait voir ailleurs.

XXXIII.

Si les deux équations aux différences ordinaires avoient toutes deux plusieurs racines inégales, il faudroit les distinguer d'une manière analogue à celle que nous avons employée pour le second ordre.

XXXIV.

Il est facile de voir que le procédé que nous venons de détailler pour les trois premiers ordres, est applicable à tous les ordres supérieurs, & que le raisonnement qui nous a conduit, tant dans la nouvelle manière de différencier, que dans le procédé d'intégration qui en résulte, contient la véritable métaphysique du calcul aux différences partielles.

De l'intégration des Équations aux différences partielles linéaires, pour un nombre quelconque de Variables principales.

Nous nous contenterons d'expoſer la méthode pour le cas des trois variables principales & pour les deux premiers ordres ; il ſera facile enſuite de l'appliquer aux autres cas.

XXXV.

Soient u, x, y, les trois variables principales, & z la variable qui en dépend ; ſoit auſſi

$$dz = pdu + qdx + rdy,$$

de manière que les trois différences partielles du premier ordre, ſoient exprimées par p, q, r. Cela poſé, ſi l'on a l'équation générale linéaire

$$Ap + Bq + Cr + D = 0,$$

dans laquelle les coéfficiens A, B, C, D ſoient donnés d'une manière quelconque en u, x, y, z ; au moyen de la valeur de dz, on pourra chaſſer une des trois quantités p, q, r, ce qui donnera l'une des trois équations

$$Adz + Ddu = q(Adx - Bdu) + r(Ady - Cdu),$$
$$Bdz + Ddx = -p(Adx - Bdu) + r(Bdy - Cdx),$$
$$Cdz + Ddy = -p(Ady - Cdu) - q(Bdy - Cdx).$$

Chacune de ces équations devant avoir lieu indépendamment des valeurs de p, q, r, qui ne doivent pas être déterminées, même l'une d'elles, en une autre ſeule, il s'enſuit que les coéfficiens de ces quantités doivent être ſimultanément égaux à zéro, & qu'on doit avoir en même temps les ſix équations ſuivantes :

$$Adz + Ddu = 0,$$
$$Bdz + Ddx = 0,$$
$$Cdz + Ddy = 0,$$

$$Adx - Bdu = 0,$$
$$Bdy - Cdx = 0,$$
$$Cdu - Ady = 0,$$

dont trois quelconques comportent les trois autres.

Actuellement, si de ces six équations, trois quelconques sont intégrables immédiatement, ou si on peut en composer trois autres qui soient intégrables, ou si l'une étant intégrée, deux autres quelconques deviennent intégrables en vertu de l'intégrale de la première, &c. enfin si on peut en tirer d'une manière quelconque trois intégrales complètes,

$$V = a$$
$$U = b$$
$$W = c,$$

qui tiennent lieu de trois d'entr'elles, a, b, c étant les constantes arbitraires introduites par intégration, ces trois intégrales simultanées exprimeront la même chose que la proposée: or elles signifient, non que les quantités V, U, W, sont constantes chacune en particulier, mais que l'une quelconque étant constante, les deux autres le sont nécessairement, ou que l'une est fonction arbitraire des deux autres; donc l'équation

$$V = \varphi(U.\&W),$$

exprimera la même chose que la proposée, & sera son intégrale complète.

XXXVI.

Il est facile de voir que l'équation générale linéaire du premier ordre, & pour un nombre quelconque de variables principales, se traitera de la même manière; & par un semblable raisonnement, on trouve que si $\alpha', \alpha'', \alpha''' \ldots \alpha'^{m\prime}$, sont les variables principales en nombre m, & que l'on ait l'équation linéaire

$$A\frac{dz}{d\alpha'} + B\frac{dz}{d\alpha''} + C\frac{dz}{d\alpha'''} \ldots + M\frac{dz}{d\alpha'^m} + N = 0,$$

dans

dans laquelle les coéfficiens $A, B, C, \ldots M, N$, ſoient donnés d'une manière quelconque en fonctions de toutes les variables, il faudra poſer les m équations ſuivantes aux différences ordinaires,

$$\begin{aligned} Adz + Nd\alpha' &= 0, \\ Bdz + Nd\alpha'' &= 0, \\ Cdz + Nd\alpha''' &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ Mdz + Nd\alpha^{''''} &= 0. \end{aligned}$$

Cela fait, ſi toutes ces équations ſont immédiatement intégrables, ou ſi les unes ſont intégrables en vertu des intégrales des autres, ou ſi on peut en déduire d'une manière quelconque un nombre m d'autres équations qui les comportent toutes & qui ſoient toutes intégrables, & que les conſtantes arbitraires de toutes ces intégrales ſoient

$$a, b, c, \ldots\ldots\ldots\ldots \mu,$$

l'intégrale complète de la propoſée ſera

$$a = \varphi(b, c, \ldots\ldots\ldots\ldots \mu).$$

XXXVII.

Les variables principales étant encore comme ci-devant u, x, y, ſoit l'équation linéaire générale aux ſecondes différences

$$\left.\begin{aligned} & A\frac{ddz}{du^2} + B\frac{ddz}{dx^2} + C\frac{ddz}{dy^2} \\ + & D\frac{ddz}{dxdy} + E\frac{ddz}{dydu} + F\frac{ddz}{dudx} + G \end{aligned}\right\} = 0,$$

dans laquelle les coéfficiens ſont fonctions des quatre variables & des différences partielles premières; on a d'ailleurs toujours

$$d.\frac{dz}{du} = \frac{ddz}{du^2}du + \frac{ddz}{dudx}dx + \frac{ddz}{dudy}dy,$$

$$d.\frac{dz}{dx} = \frac{ddz}{dudx}du + \frac{ddz}{dx^2}dx + \frac{ddz}{dxdy}dy,$$

$$d.\frac{dz}{dy} = \frac{ddz}{dudy}du + \frac{ddz}{dxdy}dx + \frac{ddz}{dy^2}dy.$$

Si l'on ſubſtitue dans la propoſée, à la place des différences partielles

$$\frac{ddz}{du^2},\ \frac{ddz}{dx^2},\ \frac{ddz}{dy^2},$$

leurs valeurs priſes dans les trois dernières équations, on aura

$$\left.\begin{array}{l} \frac{ddz}{dxdy}(Ddudxdy - Bdudy^2 - Cdudx^2) \\ + \frac{ddz}{dudy}(Edudxdy - Adxdy^2 - Cdu^2dx) \\ + \frac{ddz}{dudx}(Fdudxdy - Adx^2dy - Bdu^2dy) \\ + Adxdyd\frac{dz}{du} + Bdudyd.\frac{dz}{dx} \\ + Cdudxd\frac{dz}{dy} + Gdudxdy \end{array}\right\} = 0;$$

équation dans laquelle aucune des trois quantités

$$\frac{ddz}{dxdy},\ \frac{ddz}{dudy},\ \frac{ddz}{dudx},$$

ne doit être déterminée, & qui devant avoir lieu indépendamment des valeurs de ces trois quantités, donne les quatre équations ſimultanées ſuivantes,

$$Cdx^2 - Ddxdy + Bdy^2 = 0,$$
$$Ady^2 - Edydu + Cdu^2 = 0,$$
$$Bdu^2 - Fdudx + Adx^2 = 0,$$
$$Adxdyd.\frac{dz}{du} + Bdudyd.\frac{dz}{dx}$$
$$+ Cdudxd.\frac{dz}{dy} + Gdudxdy = 0.$$

De ces quatre équations, les trois premières étant entre les deux quantités

$$\frac{dz}{dy} \ \& \ \frac{dz}{dx},$$

ne peuvent avoir lieu elles-mêmes, à moins que l'équation de condition ſuivante ne ſoit ſatisfaite,

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = 4ABC + DEF.$$

Donc, 1.° la propoſée n'eſt intégrable que lorſque les coéfficiens ſatisfont à cette condition ; 2.° ces quatre équations aux différences ordinaires n'en repréſentent réellement que trois, à cauſe de l'équation de condition.

Actuellement, ſi de ces quatre équations, la dernière & deux des autres ſont intégrables immédiatement, ou ſi on peut en déduire d'une manière quelconque trois autres qui ſoient intégrables & qui en comportent trois en y comprenant toujours la dernière, & que les conſtantes arbitraires qui complèteront ces intégrales ſoient a, b, c; une des intégrales premières de la propoſée ſera,

$$a = \varphi\,(b, c).$$

XXXVIII.

En raiſonnant de même, on trouvera les équations aux différences ordinaires, dont les intégrales donneront celles des équations aux différences partielles des ordres ſupérieurs; mais on trouvera auſſi que le nombre des conditions auxquelles les coéfficiens doivent ſatisfaire pour que l'équation ſoit intégrable, eſt toujours moindre d'une unité que l'ordre des différentielles, dans les cas de trois variables principales.

Nous n'entrerons pas, à cet égard, dans de plus grands détails, & nous terminerons cet article en répétant encore que les équations ſimultanées aux différences ordinaires ſont enſemble de la même généralité que l'équation aux différences partielles. Le travail de l'intégration ne conſiſte

X ij

donc plus, lorſqu'elle eſt poſſible, qu'à transformer ces équations en d'autres qui les comportent toutes & qui ſoient intégrables.

De l'intégration des Équations aux différences partielles élevées.

L'intégration des équations aux différences partielles élevées ayant une très-grande analogie avec celles des équations aux différences ordinaires qui ne ſont pas linéaires, nous allons répéter ici, d'une manière un peu plus générale, ce que nous avons dit ſur ce dernier objet, dans un Mémoire imprimé dans le volume de l'Académie, de 1782.

Si dans une équation algébrique quelconque, délivrée de radicaux & de diviſeurs, les coéfficiens $A, B, C, D \dots$ &c. des différens termes ſont indépendans les uns des autres, c'eſt-à-dire, s'ils ſont regardés comme donnés immédiatement; qu'enſuite on différencie cette équation un certain nombre de fois, & qu'après chaque différenciation on élimine une des conſtantes $A, B, C, D \dots$ &c. l'équation différentielle à laquelle on arrivera, ſera toujours linéaire par rapport aux plus hautes différences. Par exemple, ſi l'on a l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1,$$

& qu'on la différencie trois fois de ſuite, ce qui donnera, en faiſant $ddx = 0$,

$$2Axdx + B(xdy + ydx) + 2Cydy = 0,$$

$$2A\,dx^2 + B(xddy + 2dxdy) + 2C(dy^2 + yddy) = 0,$$

$$B(xd^3y + 3dxddy) + 2C(3dyddy + yd^3y) = 0;$$

ſuivant qu'on éliminera entre la propoſée & la première différentielle, l'une des trois conſtantes A, B, C, on aura

une des trois différentielles premières, dans chacune desquelles les différences *dx*, *dy*, seront linéaires; parce que dans chaque élimination on ne multiplie jamais, les uns par les autres, les termes d'une même équation, & que chaque terme de la seconde ne doit être multiplié que par des termes de la première qui ne contiennent point de différence.

Pareillement, selon qu'on éliminera entre la proposée & les deux premières différentielles, deux quelconques des trois coéfficiens *A*, *B*, *C*, on aura l'une des trois différentielles secondes, dans chacune desquelles la quantité *ddy* sera linéaire; parce que dans cette opération on n'aura multiplié chaque terme de la troisième que par des termes pris dans les deux autres, qui ne contiennent point de secondes différences.

Enfin, si on élimine entre les quatre équations, les trois coéfficiens, l'équation unique à laquelle on sera conduit, contiendra d^3y linéaire, par la même raison.

Mais, si dans la proposée, les coéfficiens *A*, *B*, *C*, ne sont pas considérés comme donnés immédiatement & qu'ils soient fonctions données d'autres quantités *a*, *b*, *c*, élevées à différentes puissances dans les différens coéfficiens, lorsque par la différenciation on fera disparoître une des quantités *a*, *b*, *c*, l'équation différentielle ne sera pas linéaire. Par exemple, si l'on avoit

$$(a + b)^2x^2 + (a - b)^2y^2 = 1,$$

& si après avoir différencié une première fois, ce qui donneroit

$$(a + b)^2xdx + (a - b)^2ydy = 0,$$

on vouloit éliminer ou *a* ou *b*, pour avoir l'une des deux différentielles premières; l'équation à laquelle on arriveroit contiendroit dx^2, dy^2 & $dxdy$, parce que dans l'élimination entre des équations élevées, on multiplie les unes par les autres, des fonctions qui contiennent chacune des termes pris dans les deux équations.

Il suit donc de-là qu'une équation aux différences ordinaires n'est élevée, que parce que la constante arbitraire a fait disparoître par la différenciation, n'étoit pas linéaire dans l'intégrale.

X L.

Actuellement, si l'on différencie une des deux différentielles premières de l'équation précédente, par exemple, celle qui ne contient que b, & qu'on élimine encore cette constante, la différentielle seconde qu'on obtiendra, & qui sera délivrée de deux constantes a & b, sera la même que celle qu'on auroit eue en regardant chacun des coéfficiens $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ de l'intégrale comme indépendant; & par conséquent, dans cette équation, la quantité ddy sera linéaire. On pourra donc trouver, de cette équation, deux intégrales premières différentes, dans chacune desquelles la constante arbitraire sera linéaire; & en éliminant entre ces deux intégrales premières la quantité $\frac{dy}{dx}$, on arrivera à l'équation $Ax^2 + By^2 = 1$. Si l'on veut que cette intégrale, qui contient deux constantes arbitraires, ne soit pas plus générale que la différentielle première qui ne contient que b, il faut substituer dans cette différentielle pour y & pour $\frac{dy}{dx}$, les valeurs que fournit l'intégrale, & déterminer A en B de manière que l'équation résultante soit satisfaite indépendamment de x.

X L I.

Il suit de-là que si l'on a une équation élevée aux différences ordinaires

$$V = 0,$$

de l'ordre m, & dont l'intégrale soit algébrique, & que l'on différencie successivement une, deux, trois... fois cette équation, en faisant évanouir à chaque fois une constante, s'il y en a, ou une variable, s'il n'y a pas de constante, on

arrivera, après un certain nombre n d'opérations, à une équation différentielle linéaire de l'ordre $m + n$. Cette équation aura un nombre $m + n$ d'intégrales premières possibles, dans chacune desquelles la constante arbitraire sera linéaire; si l'on en trouve seulement un nombre m, & qu'entre ce nombre m d'équations & les autres dont le nombre est encore n, on élimine les quantités

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{ddy}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{d^{m+n-1}y}{dx^{m+n-1}}.$$

on aura en x, y, & constantes arbitraires, l'intégrale finie & complète de la proposée.

Il est facile de voir que la même chose auroit encore lieu, quand même la proposée ne seroit intégrable qu'au moyen des logarithmes & des arcs-de-cercle; en sorte que le procédé que nous venons d'exposer contient la méthode d'intégrer toutes les équations élevées dont les intégrales sont expressibles en quantités finies.

XLII.

Tout ce que nous venons de dire, peut s'appliquer aux équations aux différences partielles. En effet, lorsque les fonctions arbitraires qui se trouvent dans une équation intégrable sont toutes linéaires, & que les quantités qui entrent sous les fonctions sont toutes données immédiatement, l'équation qu'on obtient en faisant évanouir les fonctions arbitraires, est elle-même toujours linéaire. Mais, 1.° si les fonctions arbitraires sont élevées à différentes puissances dans les différens termes de l'intégrale; 2.° si les quantités, sous les fonctions, ne sont données que par d'autres équations dans lesquelles elles se trouvent encore sous des fonctions arbitraires, & que dans ce cas elles ne soient pas linéaires par-tout, l'équation aux différences partielles, qui énonce la même chose que l'intégrale, est toujours élevée. Il y a donc deux espèces d'équations aux différences partielles qui ne sont pas linéaires: les unes ont pour

intégrale finie une équation unique; l'intégrale des autres ne peut être exprimée en quantité finie que par le ſyſtème de pluſieurs équations ſimultanées, entre leſquelles il faudroit éliminer les indéterminées qui ſe trouvent ſous des fonctions arbitraires. Néanmoins nous ne les diſtinguerons pas, parce que la méthode que nous allons propoſer convient également aux unes & aux autres.

XLIII.

Des Équations aux différences partielles élevées du premier ordre.

Une équation aux différences partielles n'étant élevée que parce que la fonction arbitraire qu'on a fait évanouir en différenciant ſon intégrale, ou l'indéterminée qu'on a éliminée, n'étoit pas linéaire; il s'enſuit que ſi l'on eût regardé les différentes puiſſances de la fonction, comme des fonctions différentes, ou celles de l'indéterminée, comme d'autres fonctions arbitraires de cette même quantité, en faiſant diſparoître toutes ces fonctions par des différenciations, on ſeroit arrivé à une équation dont l'ordre auroit été plus haut, & qui auroit été linéaire. C'eſt cette équation linéaire qu'il faut retrouver par la différenciation, lorſque cela eſt poſſible, pour l'intégrer enſuite par la méthode que nous avons donnée précédemment.

Soit $\quad (A) \qquad W = 0$

une équation compoſée d'une manière quelconque en x, y, z, p, q: & poſons qu'en la différenciant aux différences ordinaires, on ait

$$A dp + B dq + C dx + D dy = 0.$$

Comme la différenciation qui fait diſparoître une fonction arbitraire eſt hypothétique, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt toujours priſe en ſuppoſant entre dx & dy, un certain rapport, au moyen

moyen duquel on chasse ensuite $\frac{dy}{dx}$ de l'équation, posons que ce rapport soit tel que l'on ait $Cdx + Ddy = 0$; nous aurons donc les deux équations simultanées

$$Adp + Bdq = 0,$$
$$Cdx + Ddy = 0,$$

entre lesquelles, éliminant la quantité $\frac{dy}{dx}$, on aura

$$(B) \quad ADr + (BD - AC)s - BCt = 0,$$

équation qui doit être regardée comme le résultat de la différenciation de l'équation *(A)*. Actuellement, si, dans cette équation, quelqu'une des constantes qui entrent dans la première, a disparu, elle sera l'équation linéaire dont l'intégrale donnera celle de la proposée, comme nous le ferons voir dans un moment. Mais si l'équation *(B)* contient encore toutes les constantes de l'équation *(A)*, il faudra en éliminer une; & si le résultat de l'élimination est linéaire par rapport aux différences secondes, ce sera encore l'équation qu'il faudra intégrer: enfin, si par l'élimination d'aucune constante, on n'arrive à un résultat linéaire, il faudra traiter ce résultat par la méthode des équations élevées du second ordre.

Supposons d'abord que dans l'équation *(B)*, quelques-unes des constantes de la proposée, ou quelque variable, s'il n'y a pas de constante, ait disparu. En traitant cette équation par la méthode de l'*article VIII*, on a les deux équations aux différences ordinaires,

$$ADdy^2 - (BD - AC)dxdy - BCdx^2 = 0,$$
$$ADdpdy - BCdqdx = 0.$$

La première a deux racines, $Cdx + Ddy = 0$, & $Ady - Bdx = 0$; si l'on employoit la première racine, on seroit reconduit à la proposée, tandis que l'objet est de

trouver l'autre intégrale première de l'équation aux différences secondes, ce qu'on ne peut obtenir qu'à l'aide de la seconde racine : ainsi on aura les deux équations simultanées

$$(C) \quad A\,dy - B\,dx = 0,$$
$$(D) \quad C\,dq - D\,dp = 0.$$

Actuellement, si ces deux équations aux différences ordinaires, que l'on peut encore réduire par l'équation *(A)*, sont intégrables, ou si l'une peut s'intégrer en vertu de l'intégrale de l'autre, ou enfin si on peut en déduire d'une manière quelconque deux autres qui les comportent, & qui soient intégrables, en sorte que leurs intégrales complètes étant

$$V = \alpha,$$
$$U = \varphi\alpha,$$

on puisse, à l'aide de ces deux équations, éliminer p & q de la proposée ; le résultat de l'élimination sera en x, y, z, α, l'intégrale complète de la proposée, indépendamment de la valeur de α : donc si on différencie ce résultat en ne faisant varier que α, on aura deux équations simultanées qui comprendront l'intégrale demandée.

XLIV.

Si, en éliminant les quantités p & q, l'indéterminée α disparoît en même temps, l'intégrale complète de la proposée sera une équation unique, dans laquelle la fonction arbitraire sera élevée à différentes puissances dans les différens termes. Nous allons éclaircir ce procédé par des exemples simples.

XLV.

Exemple I. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$(ap + q)^2 - ax(ap + q) + a^2 z = 0.$$

En différenciant, on a

$$\alpha dp + dq = 0,$$
$$dx - \alpha dy = 0;$$

par conséquent les équations *(C)* & *(D)* deviennent

$$\alpha dy - dx = 0,$$
$$\alpha dq + dq = 0;$$

donc les intégrales sont

$$\alpha y - x = a$$
$$\alpha p + q = \varphi a = \varphi(ay - x).$$

Substituant pour $\alpha p + q$, cette valeur dans la proposée, on trouve pour intégrale complète,

$$[\varphi(ay - x)]^2 + x\varphi(ay - x) + z = 0;$$

dans cette intégrale, l'indéterminée α disparoît en même temps que les différences partielles p & q, parce que la proposée n'est élevée qu'en vertu de la première cause que nous avons rapportée.

XLVI.

EXEMPLE II. Soit proposé d'intégrer

$$a^2(1 + p^2 + q^2) = (z - px - qy)^2,$$

qui est l'équation des surfaces développables circonscrites à la sphère, dont le centre est à l'origine, & dont le rayon est a. En la différenciant aux différences ordinaires, on trouve $C = 0$, $D = 0$, c'est-à-dire, qu'il n'y a pas de termes affectés de dx & de dy, & que cette différentielle se réduit à la forme

$$Mdp + Ndq = 0;$$

d'où l'on tire

$$p = \varphi q.$$

Substituant cette valeur de p dans la proposée, on a

$$a^2 [1 + q^2 + (\varphi q)^2] = (z - x\varphi q - qy)^2,$$

qui doit avoir lieu indépendamment de la valeur de q; donc, si on différencie cette équation, en ne faisant varier que q, ce qui donne

$$a^2 [q + (\varphi q)(\varphi' q)] - (z - x\varphi q - qy)(x\varphi' q + y) = 0,$$

on aura deux équations simultanées qui comprendront l'intégrale de la proposée.

XLVII.

EXEMPLE III. Si l'on avoit eu

$$a^2 + b^2 p^2 + c^2 q^2 = (z - px - qy)^2,$$

a, b, c étant des constantes, on auroit trouvé pareillement $p = \varphi q$, & l'intégrale complète auroit été le résultat de l'élimination de q entre les deux équations suivantes,

$$a^2 + b^2 (\varphi q)^2 + c^2 q^2 = (z - x\varphi q - qy)^2,$$

$$b^2 (\varphi q)(\varphi' q) + c^2 q - (z - x\varphi q - qy)^2 (x\varphi' q + y).$$

Cette équation est celle des surfaces développables circonscrites à une surface du second degré, dont le centre est à l'origine, & dont les axes a, b, c sont dirigés suivant ceux des x, y, z.

XLVIII.

En général, si en représentant par M la quantité $z - px - qy$, on a une équation composée d'une manière quelconque en p, q, M, elle donnera, comme les précédentes, $p = \varphi q$, & elle appartiendra par conséquent à une surface développable. Si donc on met partout φq à la place de p, dans cette équation, & qu'on la différencie ensuite en regardant q comme seule variable, on aura deux équations simultanées qui comprendront

l'intégrale de la proposée, indépendamment de l'indéterminée q; il faut en excepter le cas où M disparoîtroit, parce qu'alors cette méthode ne donneroit rien.

XLIX.

Exemple IV. Soit proposée $z^2(1 + p^2 + q^2) = a^2$, dans laquelle a est une constante: en la différenciant aux différences ordinaires, on a

$$A = pz,$$
$$B = qz,$$
$$C = p(1 + p^2 + q^2),$$
$$D = q(1 + p^2 + q^2);$$

par conséquent, les équations *(C), (D)* de l'*article XLIII*, deviennent

$$p\,dy - q\,dx = 0,$$
$$p\,dq - q\,dp = 0.$$

Pour les intégrer, faisons

$$p - Vq = 0,$$

& elles deviendront

$$dp - V\,dq = 0,$$
$$dx - V\,dy = 0.$$

De ces trois dernières équations, multipliant la première par dz, la seconde par z, & ajoutant les trois ensemble, on a

$$p\,dz + z\,dp + dx - V(q\,dz + z\,dq + dy) = 0;$$

cette équation devant avoir lieu, indépendamment de l'indéterminée V, que nous avons introduite, donne les deux équations simultanées,

$$p\,dz + z\,dp + dx = 0,$$
$$q\,dz + z\,dq + dy = 0,$$

qui énoncent la même chose que les deux premières équations aux différences ordinaires simultanées, & dont les intégrales sont

$$pz + x = \alpha,$$

$$qz + y = \varphi\alpha.$$

Substituant dans la proposée pour p & q les valeurs que donnent les deux intégrales, on aura

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + z^2 = a^2;$$

& différenciant cette équation, en ne faisant varier que α, ce qui donne

$$x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\,\varphi'\alpha = 0,$$

on aura deux équations, qui, prises simultanément, comprendront l'intégrale demandée.

De ces deux équations, la première est celle d'une sphère constante de rayon, & dont le centre est sur une courbe tracée dans le plan des x & y, l'équation de cette courbe étant $y = \varphi x$; la seconde énonce qu'on ne considère dans chaque sphère que les points dont les coordonnées x, y, z, ne varient point quand α varie; elles expriment donc ensemble que la surface à laquelle elles appartiennent, est l'enveloppe d'une suite de sphères constantes de rayon, & dont les centres sont placés sur une courbe quelconque tracée dans le plan des x & y.

L.

L'hypothèse que nous avons adoptée dans la différenciation de l'*article XLIII*, & qui consistoit à faire

$$Cdx + Ddy = 0,$$

& à substituer ensuite dans l'autre équation la valeur de $\frac{dy}{dx}$, que fournit celle-ci, étoit arbitraire, & on peut, au lieu d'elle, employer toutes celles qui, en faisant disparoître une constante, conduisent à une équation aux différences

ſecondes que l'on ſache traiter. Cette conſidération, qui donne de l'étendue à la méthode que nous propoſons, la rend auſſi plus vague, & même indéterminée; elle nous a conduit à des réſultats qui pourront paroître curieux, & que nous allons expoſer.

Si les trois quantités L, M, N, ſont données d'une manière quelconque en x, y, z, p, q, mais qu'il y ait entr'elles cette relation que des trois équations ſuivantes aux différences ordinaires

$$dL = 0,$$
$$dM = 0,$$
$$dN = 0,$$

deux quelconques étant poſées, la troiſième s'enſuive néceſſairement; & que l'on ait une équation aux différences partielles, compoſée d'une manière quelconque des trois quantités L, M, N, & repréſentée par

$$F(L, M, N,) = 0,$$

dans laquelle la forme de la fonction F ſoit tout ce qu'on voudra, déterminée, ou arbitraire, algébrique, ou tranſcendante; en la différenciant aux différences ordinaires, on aura une équation de cette forme,

$$A\,dL + B\,dM + C\,dN = 0.$$

Et ſi l'on prend pour hypothèſe, que l'une de ces trois différentielles ſoit nulle, on aura, par exemple, les deux équations ſimultanées

$$A\,dL + B\,dM = 0,$$
$$dN = 0,$$

qui ſignifient que la ſeconde étant ſuppoſée, on a M égale à une fonction de L; mais par la condition entre ces trois quantités, on a auſſi N égale à une fonction des deux autres; on aura donc les trois équations ſimultanées

$$L = \alpha,$$
$$M = \varphi\alpha,$$
$$N = \psi\alpha:$$

on a d'ailleurs, en vertu de la propoſée,

$$F(\alpha, \varphi\alpha, \psi\alpha) = 0.$$

Si donc entre ces quatre équations, on élimine p, q, & une des deux fonctions arbitraires, on aura une équation $V = 0$, en x, y, α, & une fonction arbitraire, qui devra avoir lieu indépendamment de l'indéterminée α, & qui, priſe ſimultanément avec l'équation $\frac{dV}{d\alpha} = 0$, comportera l'intégrale complète de la propoſée.

L I.

Exemple I. Soit propoſée

$$(ax + by + cz - 1)^2(1 + p^2 + q^2) = h^2(c - ap - bq)^2,$$

dans laquelle les coéfficiens a, b, c, h, ſont conſtans; ſi l'on fait pour abréger

$$1 + p^2 + q^2 = k^2,$$

on pourra la mettre ſous la forme ſuivante :

$$a\left(x + \frac{hp}{k}\right) + b\left(y + \frac{hq}{k}\right) + c\left(z - \frac{h}{k}\right) = 1.$$

Or, les trois quantités qui entrent dans cette équation ſont telles, que deux des trois équations

$$d\left(x + \frac{hp}{k}\right) = 0,$$
$$d\left(y + \frac{hq}{k}\right) = 0,$$
$$d\left(z - \frac{h}{k}\right) = 0;$$

étant

étant posées, la troisième s'ensuit nécessairement, indépendamment de l'objet de la question : en posant donc

$$x + \frac{hp}{k} = a,$$

$$y + \frac{hq}{k} = \varphi a,$$

$$z - \frac{h}{k} = \psi a,$$

ce qui donne en éliminant p & q,

$$(a) \quad (x - a)^2 + (y - \varphi a)^2 + (z - \psi a)^2 = h^2;$$

l'intégrale de la proposée sera le résultat de l'élimination de l'indéterminée a & d'une des deux fonctions arbitraires φ ou ψ, entre cette équation & les deux suivantes,

$$(b) \quad aa + b\varphi a + c\psi a = 1,$$

$$(c) \quad x - a + (y - \varphi a)\varphi' a + (z - \psi a)\psi' a = 0.$$

L'élimination actuelle de la fonction surabondante est facile ; nous ne la faisons pas, pour laisser au calcul sa simplicité : ainsi l'intégrale de la proposée est réellement comportée par le système de deux équations simultanées.

De ces trois équations (a), (b), (c), la première est celle de la surface d'une sphère dont le centre est indéterminé ; la seconde énonce que le centre est toujours dans le plan, dont l'équation rapportée à l'origine générale, est

$$ax + by + cz = 1;$$

la troisième exprime qu'on ne considère sur la surface de la sphère que les points dont les coordonnées x, y, z ne varient pas lorsque le paramètre a, qui détermine la position du centre, varie : elles expriment donc ensemble que la surface à laquelle appartient la proposée, est l'enveloppe d'une suite de sphères dont le rayon est h, & dont les centres sont placés sur une courbe quelconque, tracée dans un certain plan donné de position dans l'espace.

L I I.

EXEMPLE II. Si la proposée avoit été

$$\left.\begin{array}{l} k^2\,[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+k^2-g^2]^2 \\ +4\,h^2\,[\,(x-a)p+(y-b)q-(z-c)]^2 \end{array}\right\}=0,$$

dans laquelle a, b, c, h, g sont des constantes, & où l'on a de même

$$1+p^2+q^2=k^2,$$

on auroit pu la mettre sous la forme suivante:

$$[a-(x+\tfrac{hp}{k})]^2+[b-(y+\tfrac{hq}{k})]^2 + [c-(z-\tfrac{h}{k})]^2=g^2;$$

& en raisonnant comme dans l'*exemple précédent*, on auroit trouvé que l'intégrale complète de la proposée auroit été comportée par le système des trois équations

$$(x-\alpha)^2+(y-\varphi\alpha)^2+(z-\psi\alpha)^2=h^2,$$
$$(a-\alpha)^2+(b-\varphi\alpha)^2+(c-\psi\alpha)^2=g^2,$$
$$(x-\alpha)+(y-\varphi\alpha)\varphi'\alpha+(z-\psi\alpha)\psi'\alpha=0,$$

qu'il est facile de réduire à deux, par l'élimination actuelle d'une des deux fonctions arbitraires.

De ces trois équations, la première & la troisième sont les mêmes que dans l'*exemple précédent;* mais la seconde exprime que le centre de la sphère est généralement sur la surface d'une autre sphère, dont le rayon est g, & dont les coordonnées du centre sont a, b, c, dans les sens des x, y, z: donc la proposée appartient à l'enveloppe d'une suite de sphères dont les centres sont placés sur une courbe quelconque, tracée sur la surface d'une autre sphère donnée de rayon & de position.

L I I I.

Quand même la fonction F dans l'équation

$$F(L, M, N) = 0,$$

de l'*article L*, seroit transcendante, l'intégration dont nous venons de parler ne s'en feroit pas moins de la même manière.

Par exemple, si la proposée étoit

$$z - \frac{h}{k} = a.\text{arc. sin.} \frac{y + \frac{hq}{k}}{(x + \frac{hp}{k})^2 + (y + \frac{hq}{k})^2},$$

son intégrale complète seroit comprise dans les trois équations suivantes:

$$(x - a)^2 + (y - \varphi a)^2 + (z - \psi a)^2 = h^2,$$

$$\psi a = a.\text{arc. sin.} \frac{\varphi a}{a^2 + (\varphi a)^2},$$

$$x - a + (y - \varphi a)\varphi' a + (z - \psi a)\psi' a = 0,$$

qu'on peut toujours réduire à deux par l'élimination actuelle de la fonction ψ.

De ces trois équations, la seconde énonce que le centre de la sphère doit se trouver sur la surface du filet d'une vis à filet carré, dont l'axe coïncide avec celui des z, & dont le produit de la circonférence de la base, multipliée par la hauteur du pas, est a; elles expriment donc ensemble que la proposée est l'équation de l'enveloppe d'une suite de sphères de même rayon h, & dont les centres sont placés dans une courbe quelconque, tracée sur la surface que nous venons de définir.

L I V.

En général, les quantités $L, M, N, P, Q \ldots$ &c. étant composées chacune d'une manière quelconque en x, y, z, p, q, avec cette condition que deux quelconques des équations suivantes aux différences ordinaires,

$$dL = 0,$$
$$dM = 0,$$
$$dN = 0,$$
$$dP = 0,$$
$$dQ = 0 \ldots\ldots \&c.$$

étant posées, toutes les autres s'ensuivent nécessairement; si l'on a une équation aux différences partielles, composée d'une manière quelconque des quantités $L, M, N, P, Q,$ & représentée par

$$F(L, M, N, P, Q \ldots) = 0,$$

pour l'intégrer, il faudra poser les équations

$$L = \alpha,$$
$$M = \varphi\alpha,$$
$$N = \psi\alpha,$$
$$P = \pi\alpha,$$
$$Q = \varpi\alpha \ldots\ldots \&c.$$

& éliminer entre toutes ces équations, les quantités p & q, ce qui donnera autant d'équations moins une, qu'il y a de fonctions arbitraires $\varphi, \psi, \pi, \varpi \ldots\ldots \&c$, entre lesquelles on aura d'ailleurs, en vertu de la proposée, l'équation

$$F(\alpha, \varphi\alpha, \psi\alpha, \pi\alpha, \varpi\alpha \ldots\ldots) = 0.$$

Cela fait, on éliminera entre toutes ces équations, comprise la dernière, toutes les fonctions arbitraires moins une, & on aura une équation unique

$$V = 0,$$

qui ne contiendra que x, y, z, α & une fonction arbitraire; & en la combinant avec sa différentielle prise en ne faisant venir que α, & qui est

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0,$$

on aura deux équations qui comprendront l'intégrale de la proposée.

L V.

Lorsque la fonction F, de l'*article précédent*, sera de forme algébrique, l'élimination des fonctions surabondantes pourra toujours se faire, & l'intégrale complète de la proposée pourra toujours être représentée par le système des deux équations simultanées

$$V = 0,$$

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0;$$

mais lorsque cette forme sera transcendante, l'élimination ne sera pas praticable en général, & l'intégrale sera représentée par un système d'équations dont le nombre sera plus grand d'une unité que celui des fonctions qui resteront.

L V I.

Enfin, lors même que la fonction F contiendra des fonctions arbitraires, & que l'équation

$$F(L, M, N, P, Q \ldots\ldots\ldots\text{\&c.}) = 0,$$

sera par conséquent l'intégrale d'une équation d'ordre supérieur, son intégrale finie se trouvera de la même manière. Par exemple:

1.° Si l'on avoit

$$z - \frac{h}{k} = \pi\left[\left(x + \frac{hp}{k}\right)^2 + \left(y + \frac{hq}{k}\right)^2\right],$$

dans laquelle π est une fonction arbitraire, son intégrale complète seroit le résultat de l'élimination d'une des deux fonctions φ ou ψ & de l'indéterminée α, des trois équations suivantes,

$$(x - a)^2 + (y - \varphi a)^2 + (z - \psi a)^2 = k^2.$$
$$x - a + (y - \varphi a)\varphi' a + (z - \psi a)\psi' a = 0.$$
$$\psi a = \pi [a^2 + (\varphi a)^2];$$

& elle appartiendroit à l'enveloppe d'une ſuite de ſphères de même rayon, & dont les centres ſeroient placés dans une courbe quelconque tracée ſur une ſurface quelconque de révolution autour de l'axe de z, ſans rien ſtatuer d'ailleurs, ni ſur la courbe génératrice de la ſurface de révolution, ni ſur la courbe qui, dans cette ſurface, doit contenir les centres des ſphères.

2.° Si la propoſée étoit le réſultat de l'élimination de l'indéterminée β entre les deux équations ſuivantes,

$$z - \frac{h}{k} = \left(x + \frac{hp}{k}\right)\pi\beta + \left(y + \frac{hq}{k}\right)\varpi\beta + \beta.$$
$$\left(x + \frac{hp}{k}\right)\pi'\beta + \left(y + \frac{hq}{k}\right)\varpi'\beta + 1 = 0.$$

dans leſquelles les fonctions π & ϖ ſont arbitraires; ſon intégrale ſeroit le réſultat de l'élimination d'une des fonctions φ ou ψ, & des deux indéterminées a, β, entre les quatre équations ſuivantes,

$$(x - a)^2 + (y - \varphi a)^2 + (z - \psi a)^2 = k^2.$$
$$x - a + (y - \varphi a)\varphi' a + (z - \psi a)\psi' a = 0.$$
$$\psi a = a . \pi\beta + \varphi a \varpi\beta + \beta.$$
$$a\pi'\beta + \varphi a \varpi'\beta + 1 = 0.$$

qu'on peut facilement réduire à trois par l'élimination actuelle de la fonction ψ; & elle appartiendroit à l'enveloppe d'une ſuite de ſphères de même rayon, & dont les centres ſeroient ſur une courbe quelconque tracée ſur une ſurface développable quelconque, ſans rien ſtatuer d'ailleurs, ni ſur la nature de la ſurface développable, ni ſur celle de la courbe qui, dans cette ſurface, doit contenir les centres des ſphères.

LVII.

Il n'y a aucune équation aux différences partielles du premier ordre, qui ne soit susceptible d'être ramenée à la forme que nous venons de considérer, & qui ne pût s'intégrer par cette dernière méthode, si l'on avoit un procédé pour trouver les quantités $L, M, N, P \ldots$ &c. qui toutes sont fonctions de deux d'entr'elles, & qui entrent seules dans la composition de la proposée; mais cette recherche comporte en général des difficultés aussi grandes que celles du calcul intégral des équations aux différences partielles; & ce que nous avons dit depuis l'*article L*, ne peut être utile que dans des cas très-particuliers. Néanmoins, le nombre de systèmes de quantités L, M, N, qui satisfont à la condition que nous avons énoncée, est infini; nous allons en rapporter quelques-uns des plus simples.

1.° Les trois quantités

$$L = x + \frac{a^2 p}{\sqrt{(a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2)}},$$

$$M = y + \frac{b^2 q}{\sqrt{(a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2)}},$$

$$N = z - \frac{c^2}{\sqrt{(a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2)}},$$

sont telles que les différences ordinaires de deux d'entre elles étant égales à zéro, celle de la troisième devient nulle; & si dans tous les exemples que nous avons rapportés on met pour L, M, N, ces nouvelles valeurs, toutes les équations aux différences partielles que l'on aura, n'appartiendront plus à des enveloppes de suites de sphères, mais à des enveloppes de suites de surfaces du second degré, dont les axes sont constans, & toujours parallèles à ceux des coordonnées x, y, z, & dont les centres se meuvent d'une manière indiquée dans chaque cas par la proposée. Ainsi, en faisant, pour abréger,

$$a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2 = k^2,$$

l'intégrale de l'équation

$$A\left(x+\frac{a^2 p}{k}\right)+B\left(y+\frac{b^2 q}{k}\right)+C\left(z-\frac{c^2}{k}\right)=1$$

analogue à celle de l'*article LI*, seroit le résultat de l'élimination d'une des deux fonctions arbitraires φ ou ψ, & de l'indéterminée α entre les trois équations suivantes,

$$b^2c^2(x-\alpha)^2+a^2c^2(y-\varphi\alpha)^2+a^2b^2(z-\psi\alpha)^2=a^2b^2c^2,$$
$$b^2c^2(x-\alpha)+a^2c^2(y-\varphi\alpha)\varphi'\alpha+a^2b^2(z-\psi\alpha)\psi'\alpha=0,$$
$$A\alpha+B\varphi\alpha+C\psi\alpha=1,$$

& appartiendroit à l'enveloppe d'une suite de surfaces du second degré, dont les axes constans a, b, c, seroient toujours parallèles à ceux des coordonnées x, y, z, & dont les centres seroient placés sur une courbe quelconque tracée dans le plan, dont l'équation seroit

$$Ax+By+Cz=1.$$

2.° En donnant aux quantités L, M, N, les valeurs suivantes,

$$L=\frac{x}{p}(px+qy-z),$$
$$M=\frac{y}{q}(px+qy-z),$$
$$N=-z(px+qy-z),$$

qui sont encore telles que l'on a à la fois

$$dL=0,\ dM=0,\ dN=0,$$

toute équation composée de ces trois quantités, est toute intégrée par le procédé que nous venons de donner, & elle appartient à l'enveloppe d'une suite de surfaces du second degré, dont les centres sont à l'origine, & dont les axes, dirigés suivant ceux des coordonnées x, y, z, varient de longueur, suivant une loi donnée par la proposée. Ainsi, l'intégrale de l'équation

$$(px+qy-z)(Aqx+Bpy-Cpqz)=pq,$$

qui

qui peut être mise sous la forme

$$AL + BM + CN = 1,$$

est le résultat de l'élimination d'une des deux fonctions φ ou ψ, & de l'indéterminée α entre les trois équations

$$x^2 \varphi\alpha \psi\alpha + y^2 \alpha \psi\alpha + z^2 \alpha \varphi\alpha = \alpha \varphi\alpha \psi\alpha,$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 (\varphi\alpha \psi'\alpha + \varphi'\alpha \psi\alpha) \\ + y^2 (\psi\alpha + \alpha \psi'\alpha) \\ + z^2 (\varphi\alpha + \alpha \varphi'\alpha) \end{array}\right\} = \varphi\alpha \psi\alpha + \alpha \psi\alpha \varphi'\alpha + \alpha \varphi\alpha \psi'\alpha,$$

$$A\alpha + B\varphi\alpha + C\psi\alpha = 1;$$

& elle appartient à l'enveloppe d'une suite de surfaces du second degré, dont les centres sont à l'origine, & dont les axes a, b, c, toujours dirigés suivant ceux des coordonnées x, y, z, varient de grandeur, d'une manière quelconque, en satisfaisant néanmoins à l'équation

$$Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 = 1.$$

LVIII.

Quant à la manière de trouver *a priori* un système de trois quantités L, M, N, composées en x, y, z, p & q, & telles qu'une quelconque soit fonction des deux autres; si l'on prend une équation quelconque $V = 0$, qui soit en x, y, z, & trois paramètres, & que de cette équation & des deux suivantes,

$$\frac{dV}{dx} = 0,$$

$$\frac{dV}{dy} = 0,$$

on tire les valeurs de ces trois paramètres, ces valeurs satisferont à la condition énoncée, c'est-à-dire, qu'en égalant à zéro les différences ordinaires de deux d'entr'elles, celle de la troisième deviendra nulle, en vertu des premières.

L I X.

Avant que de quitter cette matière, nous croyons devoir faire remarquer une propriété analogue dans les équations aux différences ordinaires de tous les ordres. Supposons que pour abréger, on fasse

$$\frac{dy}{dx} = p, \ \frac{dp}{dx} = q, \ \frac{dq}{dx} = r \ldots \&c.$$

Cela posé, si deux quantités M, N, composées toutes deux en x, y, p, sont telles, que l'une des deux équations suivantes,

$$dM = 0,$$
$$dN = 0,$$

étant posée, l'autre ait lieu nécessairement, & qu'on ait à intégrer une équation aux différences ordinaires du premier ordre, composée d'une manière quelconque en M & N, représentée par

$$F(M, N) = 0,$$

en éliminant p & une des deux constantes arbitraires a, b, entre les trois équations suivantes:

$$M = a,$$
$$N = b,$$
$$F(a, b) = 0,$$

on aura en x, y, & une constante arbitraire, l'intégrale complète de l'équation proposée; car de ces trois équations, les deux premières ayant lieu indépendamment de la nature de la question, elles expriment en général que b est une fonction de a; & la troisième qui résulte de la proposée, détermine la forme de cette fonction.

EXEMPLE I. L'intégrale de $F[p. (y - px)] = 0$, est le résultat de l'élimination de p & d'une des constantes arbitraires a ou b des trois équations

$$p = a,$$
$$y - px = b,$$
$$F(a, b) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, elle est comprise dans les deux équations suivantes :

$$y = ax + b,$$
$$F(a, b) = 0,$$

dont la seconde est destinée à éliminer la constante arbitraire surabondante.

EXEMPLE II. L'une des deux équations

$$d\left[x - \frac{pk}{\sqrt{(1 + p^2)}}\right] = 0,$$
$$d\left[y + \frac{k}{\sqrt{(1 + p^2)}}\right] = 0,$$

étant posée, l'autre s'ensuit nécessairement ; si donc on a une équation aux différences ordinaires de cette forme,

$$F\left[\left(x - \frac{pk}{\sqrt{(1 + p^2)}}\right), \left(y + \frac{k}{\sqrt{(1 + p^2)}}\right)\right] = 0,$$

son intégrale sera le résultat de l'élimination de p & d'une des deux arbitraires a ou b entre les trois équations

$$x - \frac{pk}{\sqrt{(1 + p^2)}} = a,$$
$$y + \frac{k}{\sqrt{(1 + p^2)}} = b,$$
$$F(a, b) = 0;$$

ou parce qu'on peut d'abord éliminer p des deux premières ; l'intégrale sera comprise dans les deux équations

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = k^2,$$
$$F(a, b) = 0.$$

Quant à la manière de trouver *a priori* deux quantités M, N, telles que, posant $dM = 0$, on ait $dN = 0$; si l'on a une équation $V = 0$, qui soit en x, y & deux

paramètres, & que de cette équation & de la sui
$dV = 0$, on tire les valeurs de ces deux paramè
ces valeurs satisferont à la condition énoncée.

L X.

Si l'on a trois quantités $M, N, P,$ composées en $x, y,$
& telles, qu'une des trois équations suivantes,

$$dM = 0,$$
$$dN = 0,$$
$$dP = 0,$$

étant posée, les deux autres s'ensuivent nécessairem
& qu'il faille intégrer une équation aux différences
naires du second ordre, composée d'une manière
conque des trois quantités $M, N, P,$ représentée pa

$$F(M, N, P) = 0,$$

on éliminera $p, q,$ & une des trois constantes arbitr
$a, b, c,$ des quatre équations

$$M = a,$$
$$N = b,$$
$$P = c,$$
$$F(a, b, c) = 0,$$

& le résultat sera en x, y & deux constantes arbitra
l'intégrale complète & finie de la proposée. En effet
ces quatre équations, les trois premières ayant lieu si
tanément, quel que soit d'ailleurs l'objet de la quest
il en résulte généralement, en $x, y, a, b, c,$ une é
tion, dans laquelle les trois constantes arbitraires
indépendantes, & la proposée établit la relation qu
entr'elles ces trois constantes, dans la question dont il s'

EXEMPLE. Les trois quantités

$$M = x - \frac{p(1+p^2)}{q},$$
$$N = y + \frac{1+p^2}{q},$$

$$P = \frac{(1+p^2)^3}{q^2},$$

étant telles, que l'on a simultanément $dM = 0$, $dN = 0$, $dP = 0$, il s'ensuit que l'intégrale finie & complète d'une équation aux différences ordinaires du second ordre, représentée par

$$F\{[x - \frac{p(1+p^2)}{q}], [y + \frac{1+p^2}{q}], \frac{(1+p^2)^3}{q^2}\} = 0,$$

est le résultat de l'élimination de p & de q, & d'une des constantes arbitraires entre les quatre équations

$$x - \frac{p(1+p^2)}{q} = a,$$
$$y + \frac{1+p^2}{q} = b,$$
$$\frac{(1+p^2)^3}{q^2} = c,$$
$$F(a, b, c) = 0;$$

ou parce qu'on peut toujours éliminer p & q des trois premières, elle est le résultat de l'élimination d'une des constantes a, b, c, entre les deux équations

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c,$$
$$F(a, b, c) = 0.$$

LXI.

En général, si l'on a un nombre n de quantités M, N, P, Q, R....&c. composées en x, y, p, q, r, s...&c. jusqu'aux différences de l'ordre $n - 1$ inclusivement, & telles, qu'une des équations suivantes,

$$dM = 0,\ dN = 0,\ dP = 0,\ dQ = 0,\ dR = 0\ \ldots\&c.$$

étant posées, les autres s'ensuivent nécessairement, & qu'on ait une équation aux différences ordinaires de l'ordre $n - 1$, composée d'une manière quelconque des quantités M, N, P, Q, R....&c. représentée par

$$F(M, N, P, Q, R \ldots\ldots \&c.) = 0;$$

son intégrale finie & complète sera le résultat de l'élimination des $(n - 1)$ quantités p, q, r, s....&c. & d'une

des constantes arbitraires $a, b, c, d, e \ldots$ &c, entre les $n + 1$ équations

$$M = a,$$
$$N = b,$$
$$P = c,$$
$$Q = d,$$
$$R = e,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$F(a, b, c, d, e \ldots\ldots\ldots \&c.) = 0,$$

& ce résultat sera en x, y & $(n - 1)$ constantes arbitraires.

Nous n'insisterons pas davantage sur cette matière, & nous ne dirons plus qu'un mot des équations aux différences partielles élevées du second ordre.

Des Équations aux différences partielles élevées du second ordre.

LXII.

Soit $W = 0$ une équation aux différences partielles composée d'une manière quelconque en x, y, z, p, q, r, s, t. Posons qu'en la différenciant aux différences ordinaires, & en faisant

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

on ait

$$A\,dr + B\,ds + C\,dt + D\,dx + E\,dy = 0.$$

Cela posé, si par une certaine hypothèse faite dans cette équation sur la valeur de $\frac{dy}{dx}$, l'équation aux différences partielles du troisième ordre, à laquelle on arrivera, contient une constante de moins, & est linéaire, ou de la forme de celle que l'on fait traiter; on prendra les trois intégrales premières de cette équation, dont l'une sera la

proposée, & toutes les fois que de ces trois intégrales il sera possible d'éliminer en même temps les cinq quantités p, q, r, s, t, le résultat sera l'intégrale finie demandée.

Supposons qu'en faisant

$$(A) \quad D\,dx + E\,dy = 0,$$

ce qui donne

$$(B) \quad A\,dr + B\,ds + C\,dt = 0,$$

on fasse disparoître une constante, ou quelque variable s'il n'y a pas de constante; en substituant dans (B) pour $\frac{dy}{dx}$ la valeur que donne (A), on aura l'équation aux différences partielles du troisième ordre, & linéaire

$$AE\,\frac{d^3z}{dx^3} + (BE - AD)\,\frac{d^3z}{dx^2dy} + (CE - BD)\,\frac{d^3z}{dxdy^2} - CD\,\frac{d^3z}{dy^3} = 0,$$

qui, traitée par la méthode de l'*article XXXI*, donne les deux équations aux différences ordinaires

$$(A\,dy^2 - B\,dx\,dy + C\,dx^2)\,(D\,dx + E\,dy) = 0,$$

$$\left.\begin{array}{r} dr\,[(BE - AD)dy^2 - (CE - BD)dxdy - CDdx^2] \\ +\; ds\,dy\,[(CE - BD)\,dy + CD\,dx] \\ - CDdtdy^2 \end{array}\right\} = 0.$$

La première de ces deux équations a deux facteurs rationels; si l'on employoit le second, l'intégrale première que l'on obtiendroit seroit la proposée elle-même, & l'on auroit fait un travail inutile. Ainsi il ne faut faire usage que du premier facteur; mais en vertu de ce facteur, la seconde équation se simplifie, en sorte que les deux équations aux différences ordinaires qui doivent donner les deux autres intégrales de l'équation aux troisièmes différences sont,

$$(C) \quad A\,dy^2 - B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0,$$

$$(D) \quad AEdydr + ds(CEdx - ADdy) - CDdxdt = 0.$$

Chacune des racines de l'équation *(C)*, prise simultanément avec l'équation *(D)*, produira une intégrale, & toutes les fois que de ces deux intégrales & de la proposée il sera possible d'éliminer d'une manière quelconque les quantités p, q, r, s, t, on aura l'intégrale finie de la proposée.

L X I I I.

EXEMPLE. Soit proposé d'intégrer

$$2bx(a^2r + 2as + t) + 4\sqrt{(a^2r + 2as + t)} - 2ab(ap + q) = 0;$$

en la différenciant aux différences ordinaires, les équations *(A)* & *(B)* deviennent

$$a^2dr + 2ads + dt = 0,$$
$$dx - ady = 0,$$

dans lesquelles la constante b a disparu. Les équations *(C)* & *(D)* reproduisent encore les mêmes équations aux différences otdinaires, & l'on a en intégrant

$$a^2r + 2as + t = \varphi(x - ay);$$

substituant cette valeur dans la proposée, elle devient

$$ap + q = a\varphi(x - ay) + 4ab^2x[\varphi(x - ay)]^2,$$

qui, étant linéaire, s'intègre facilement, & donne pour intégrale complète & finie

$$z = \psi(x - ay) + x\varphi(x - ay)^2 + 2b^2x^2[\varphi(x - ay)]^2.$$

Il est facile de faire de semblables raisonnemens pour les équations des ordres supérieurs; mais aussi l'on voit qu'à mesure que l'ordre des équations sera plus élevé, les cas où, par ce procédé, on pourra les intégrer complétement, seront plus rares.



OBSERVATION

OBSERVATION

SUR UN GRAND NOMBRE DE MORSURES

Faites à une même perſonne, par un chien enragé, traitées avec ſuccès.

Par M. SABATIER.

RIEN ne prouve plus l'incertitude où l'on eſt encore ſur la meilleure manière de traiter les plaies faites par des animaux enragés, que le jugement que la Société royale de Médecine a porté, en 1782, ſur les Mémoires qui ont concouru pour le Prix qu'elle avoit propoſé à ce ſujet : elle a cru devoir en couronner trois, quoique les vues curatives que chacun de leurs auteurs propoſe, ſoient différentes. Il eſt donc eſſentiel de fixer l'attention du public, & celle des gens de l'art, ſur cet objet important, & de leur faire connoître les faits qui conſtatent la préférence que l'on doit donner à une méthode ſur les autres : celui dont je vais rendre compte, ne me paroît laiſſer aucun doute ſur les avantages de celle que j'ai ſuivie. Lu le 13 Novembre 1784.

Le 17 Février dernier, un chien deſtiné à la garde d'une maiſon iſolée, en bleſſa le Jardinier à la lèvre ſupérieure, qui fut déchirée de manière à former un lambeau aſſez conſidérable. Comme cet animal n'étoit pas méchant, on eut quelque ſoupçon qu'il pouvoit être malade, & on l'enferma dans le jardin, où on lui deſcendoit des alimens par une fenêtre. On crut qu'il en avoit uſé, & on commença à ſe raſſurer ſur ce qu'il répondoit à la voix & venoit chaque fois qu'il étoit appelé. Un jeune homme de vingt-deux ans, grand & robuſte, ſe haſarda, le ſurlendemain 19 au matin, à entrer dans le jardin avec un plat où il y avoit de la viande, & une terrine pleine

d'eau. Le chien qu'il appela, vint assez paisiblement, mais quand il aperçut l'eau, il recula de quelques pas, & s'élança sur lui avec impétuosité. Le jeune homme, forcé de se défendre, jeta ce qu'il avoit dans les mains, afin de pouvoir saisir l'animal par le cou, & de s'en rendre maître. Il étoit déjà blessé en plusieurs endroits, & il appeloit des secours que la crainte rendit tardifs. Enfin il parvint à se coucher sur le chien qu'il avoit terrassé, & à le tenir pendant assez long-temps dans cette situation, pour que le maître de la maison, armé d'un couteau de chasse, le tuât sous lui.

Il avoit été mordu aux deux mains, à l'avant-bras & à l'épaule droite, & à la partie supérieure & antérieure de la jambe gauche. En outre, il étoit égratigné en divers endroits & sur-tout au ventre, & il étoit difficile de juger si c'étoit par les dents ou par les griffes de l'animal. Plusieurs des morsures ne portoient que l'empreinte des dents qui avoient pénétré toute l'épaisseur de la peau; mais celles de l'avant-bras & de l'épaule offroient des plaies assez étendues, & celle de la jambe, plus considérable que les autres, avoit au moins un pouce &-demi de longueur & de largeur, & une profondeur telle que le tibia, & l'aponévrose qui couvre les muscles de sa partie antérieure & externe, étoient à nu.

Le Jardinier, dont on avoit pansé la plaie à la manière de celle qui résulte du bec-de-lièvre, étoit tranquille; mais le jeune homme & les personnes de la maison, qui prenoient intérêt à lui, ne l'étoient pas. Il demanda à consulter, & je fus prié de le voir le soir du même jour. Je lui dis que pour le mettre en sûreté, il falloit élargir celles de ses blessures qui en avoient besoin, & les cautériser toutes à une assez grande profondeur. Il le desiroit avec empressement; mais il n'étoit pas sûr que le chien fut enragé. L'opération que je me proposois de lui faire, pouvoit avoir des suites fâcheuses, vu le nombre, l'étendue & la profondeur de ses plaies: il pouvoit se faire qu'il

restât estropié. Je ne voulus rien entreprendre que je n'eusse l'aveu d'un parent qu'il avoit à Paris, & qui veilloit sur lui. Cette circonstance me fit différer jusqu'au lendemain vers midi, c'est-à-dire, vingt-sept à vingt-huit heures après l'accident. Les morsures & les plaies étoient au nombre de vingt-cinq, & les égratignures remarquables, au nombre de cinquante. Je n'eus pas besoin d'inspirer du courage au malade, quoique le supplice auquel il alloit être exposé, dût être bien long. Les ouvertures faites par les dents de l'animal, & les égratignures furent incisées en étoile à une profondeur plus ou moins grande ; ensuite je cautérisai les premières avec le beurre d'antimoine liquide, dans lequel j'avois trempé des pinceaux de linge roulé sur des brins de bouleau, & je brûlai les secondes, à plusieurs reprises, avec des grosses aiguilles montées sur des alumettes, & rougies à la flamme d'une bougie. Je portai de même le caustique sur tous les points de la surface & des bords des plaies, de manière que la sphère de son activité répondît à la grandeur de leurs dimensions, & il n'y eut d'autre différence à cet égard, si ce n'est que je n'y fis point d'incisions préparatoires, parce qu'elles étoient suffisamment ouvertes. Il me fallut plus de deux heures pour achever ce terrible procédé, dont j'étois plus fatigué que le malade : tant la crainte de la rage avoit fait d'impression sur lui.

Je craignois des accidens relatifs aux plaies ; il n'en survint point, & les parties malades n'éprouvèrent qu'un léger gonflement. La suppuration s'établit successivement dans les différentes parties, & les escares se détachèrent; les plaies légères furent guéries en assez peu de temps. Il ne restoit plus que celles dont les dimensions étoient plus grandes. Celles-ci éprouvèrent les mêmes révolutions que les autres, & celle de la jambe, sur-tout, suppura très-long-temps avant de se cicatriser.

Le 14 Avril suivant, cinquante-cinq jours après sa blessure, le Jardinier, qui s'applaudissoit de sa sécurité,

du mal dont il se croyoit menacé, puisque j'ai vu périr, entre mes mains plusieurs personnes mordues par des animaux enragés, auxquelles on l'avoit administré à forte dose.

A quoi donc est-il redevable de sa guérison? à l'action du caustique & à celle du feu qui ont détruit le virus en même-temps que le tissu des parties qui en étoient imprégnées. Les morsures des animaux enragés peuvent être comparées aux plaies que l'on fait pour insérer le levain de la petite vérole. Il se fait une véritable inoculation, dont on préviendra les effets si on cautérise les plaies avant que le virus ait eu le temps de déployer son énergie & de l'exercer sur l'économie animale. La facilité avec laquelle ces sortes de plaies guérissent pour l'ordinaire, & la longueur du temps qui s'écoule avant que les malades en éprouvent les suites, montrent qu'il y reste d'abord sans action; ce n'est guère qu'entre trente & quarante jours que les malades sont incommodés. Ils commencent pour lors à ressentir un mal-aise, de l'agitation, des insomnies, de légers mouvemens convulsifs, une altération dans les traits du visage, des dégoûts & de l'oppression, simptômes avant-coureurs par où la maladie s'annonce d'une manière particulière. Peut-être le procédé qui m'a si bien réussi, peut-il être employé avec succès jusqu'à cette époque. Le fait que je viens de rapporter, montre du moins qu'on peut tarder vingt-quatre heures & plus sans y avoir recours. Mais, sans les circonstances particulières qui m'ont forcé de différer, j'en aurois fait usage aussi-tôt que j'ai été averti, & je crois prudent de ne pas perdre un instant sans venir au secours des blessés.

Ce cas n'est pas le seul où j'aie employé la cautérisation pour prévenir la rage. En 1775, je fis brûler un cylindre d'amadou sur la plaie d'un Soldat atteint à la poitrine, au-dessous du mamelon gauche, par un coup de croc qu'un chien lui avoit donné; l'escarre fut profonde, & la séparation fut suivie d'une suppuration qui dura assez

& qui ne pouvoit ſe perſuader que le chien qui les avoit bleſſés eût été malade, commença à perdre l'appétit; il dîna fort peu & ne ſoupa point. Le lendemain il ſe plaignit que ſa plaie étoit douloureuſe, & dit qu'il ſe ſentoit oppreſſé & qu'il avoit des envies de vomir. On lui demanda s'il étoit altéré, à quoi il répondit qu'il avoit grand ſoif, mais qu'il ne pouvoit pas boire. Effectivement, il lui fut impoſſible d'avaler l'eau qu'on lui préſenta, quoiqu'il ſe fût efforcé de la porter à ſa bouche. On lui fit prendre avec peine trois grains d'émétique dans quelques cuillerées d'eau, ce qui lui procura des évacuations abondantes, dont il ne reçut aucun ſoulagement. La ſuffocation devenoit de plus en plus forte; il y avoit beaucoup d'agitations; le malade, quoique d'une conſtitution vigoureuſe, ſe ſoutenoit avec peine quand il s'efforçoit de ſe lever: ſon état étoit décidé. On ſe détermina à le conduire à l'Hôtel-Dieu dans la ſoirée. L'impreſſion de l'air ſur ſon viſage, le mit dans une fureur momentanée, qui ſe renouvela pluſieurs fois pendant la nuit. Il ne put rien avaler de ce qu'on lui préſenta, & mourut hydrophobe le lendemain 16, à ſept heures du ſoir.

Le jeune homme que j'ai ſoigné, jouit encore de la meilleure ſanté, quoiqu'il y ait bientôt huit mois accomplis qu'il a été bleſſé; quoique ſes plaies aient été au nombre de ſoixante-quinze; quoique pluſieurs de ces plaies, & notamment celles des mains & des poignets, lui aient été faites à nu, & qu'il ſoit d'une vraiſemblance qui approche de la certitude, que celles de l'avant-bras, de la jambe & de l'épaule, qui étoient fort grandes, ont été couvertes & infectées de la bave de l'animal; quoique je n'aie pris aucune précaution pour prolonger la ſuppuration des plaies, dont le plus grand nombre s'eſt cicatriſé aſſez promptement; quoiqu'enfin le malade n'ait fait uſage intérieurement que de quelques gouttes d'alkali volatil, que je lui ai laiſſé prendre chaque matin, dans la vue de calmer [illegible] nation troublée, plutôt [illegible]

du mal dont il ſe croyoit menacé, puiſque j'ai vu périr, entre mes mains pluſieurs perſonnes mordues par des animaux enragés, auxquelles on l'avoit adminiſtré à forte doſe.

A quoi donc eſt-il redevable de ſa guériſon? à l'action du cauſtique & à celle du feu qui ont détruit le virus en même-temps que le tiſſu des parties qui en étoient imprégnées. Les morſures des animaux enragés peuvent être comparées aux plaies que l'on fait pour inſérer le levain de la petite vérole. Il ſe fait une véritable inoculation, dont on préviendra les effets ſi on cautériſe les plaies avant que le virus ait eu le temps de déployer ſon énergie & de l'exercer ſur l'économie animale. La facilité avec laquelle ces ſortes de plaies guériſſent pour l'ordinaire, & la longueur du temps qui s'écoule avant que les malades en éprouvent les ſuites, montrent qu'il y reſte d'abord ſans action ; ce n'eſt guère qu'entre trente & quarante jours que les malades ſont incommodés. Ils commencent pour lors à reſſentir un mal-aiſe, de l'agitation, des inſomnies, de légers mouvemens convulſifs, une altération dans les traits du viſage, des dégoûts & de l'oppreſſion, ſimptômes avant-coureurs par où la maladie s'annonce d'une manière particulière. Peut-être le procédé qui m'a ſi bien réuſſi, peut-il être employé avec ſuccès juſqu'à cette époque. Le fait que je viens de rapporter, montre du moins qu'on peut tarder vingt-quatre heures & plus ſans y avoir recours. Mais, ſans les circonſtances particulières qui m'ont forcé de différer, j'en aurois fait uſage auſſi-tôt que j'ai été averti, & je crois prudent de ne pas perdre un inſtant ſans venir au ſecours des bleſſés.

Ce cas n'eſt pas le ſeul où j'aie employé la cautériſation pour prévenir la rage. En 1775, je fis brûler un cylindre d'amadou ſur la plaie d'un Soldat atteint à la poitrine, au-deſſous du m[illegible] gauche, par un coup de croc [illegible]nné; l'eſcarre fut profonde, & [illegible]'une ſuppuration qui dura aſſez

& qui ne pouvoit se persuader que le chien qui les avoit blessés eût été malade, commença à perdre l'appétit; il dîna fort peu & ne soupa point. Le lendemain il se plaignit que sa plaie étoit douloureuse, & dit qu'il se sentoit oppressé & qu'il avoit des envies de vomir. On lui demanda s'il étoit altéré, à quoi il répondit qu'il avoit grand soif, mais qu'il ne pouvoit pas boire. Effectivement il lui fut impossible d'avaler l'eau qu'on lui présenta, quoiqu'il se fût efforcé de la porter à sa bouche. On lui fit prendre avec peine trois grains d'émétique dans quelques cuillerées d'eau, ce qui lui procura des évacuations abondantes, dont il ne reçut aucun soulagement. La suffocation devenoit de plus en plus forte; il y avoit beaucoup d'agitations; le malade, quoique d'une constitution vigoureuse, se soutenoit avec peine quand il s'efforçoit de se lever: son état étoit décidé. On se détermina à le conduire à l'Hôtel-Dieu dans la soirée. L'impression de l'air sur son visage, le mit dans une fureur momentanée, qui se renouvela plusieurs fois pendant la nuit. Il ne put rien avaler de ce qu'on lui présenta, & mourut hydrophobe, le lendemain 16, à sept heures du soir.

Le jeune homme que j'ai soigné, jouit encore de la meilleure santé, quoiqu'il y ait bientôt huit mois accomplis qu'il a été blessé; quoique ses plaies aient été au nombre de soixante-quinze; quoique plusieurs de ces plaies, & notamment celles des mains & des poignets, lui aient été faites à nu, & qu'il soit d'une vraisemblance qui approche de la certitude, que celles de l'avant-bras, de la jambe & de l'épaule, qui étoient fort grandes, ont été couvertes & infectées de la bave de l'animal; quoique je n'aie pris aucune précaution pour prolonger la suppuration des plaies, dont le plus grand nombre s'est cicatrisé assez promptement; quoiqu'enfin le malade n'ait fait usage intérieurement que de quelques gouttes d'alkali volatil, que je lui ai laissé prendre chaque matin, dans la vue de calmer son imagination troublée, plutôt que dans celle de le mettre à l'abri

du mal dont il se croyoit menacé, puisque j'ai vu périr entre mes mains plusieurs personnes mordues par des animaux enragés, auxquelles on l'avoit administré à forte dose.

A quoi donc est-il redevable de sa guérison? à l'action du caustique & à celle du feu qui ont détruit le virus en même-temps que le tissu des parties qui en étoient imprégnées. Les morsures des animaux enragés peuvent être comparées aux plaies que l'on fait pour insérer le levain de la petite vérole. Il se fait une véritable inoculation, dont on préviendra les effets si on cautérise les plaies avant que le virus ait eu le temps de déployer son énergie & de l'exercer sur l'économie animale. La facilité avec laquelle ces sortes de plaies guérissent pour l'ordinaire, & la longueur du temps qui s'écoule avant que les malades en éprouvent les suites, montrent qu'il y reste d'abord sans action ; ce n'est guère qu'entre trente & quarante jours que les malades sont incommodés. Ils commencent pour lors à ressentir un mal-aise, de l'agitation, des insomnies, de légers mouvemens convulsifs, une altération dans les traits du visage, des dégoûts & de l'oppression, simptômes avant-coureurs par où la maladie s'annonce d'une manière particulière. Peut-être le procédé qui m'a si bien réussi, peut-il être employé avec succès jusqu'à cette époque. Le fait que je viens de rapporter, montre du moins qu'on peut tarder vingt-quatre heures & plus sans y avoir recours. Mais, sans les circonstances particulières qui m'ont forcé de différer, j'en aurois fait usage aussi-tôt que j'ai été averti, & je crois prudent de ne pas perdre un instant sans venir au secours des blessés.

Ce cas n'est pas le seul où j'aie employé la cautérisation pour prévenir la rage. En 1775, je fis brûler un cylindre d'amadou sur la plaie d'un Soldat atteint à la poitrine, [illegible]dessous du mamelon gauche, par un coup de croc [illegible]hien lui [illegible] donné; l'escarre fut profonde, & [illegible] d'une suppuration qui dura assez

& qui ne pouvoit se persuader que le chien qui les avoit blessés eût été malade, commença à perdre l'appétit; il dîna fort peu & ne soupa point. Le lendemain il se plaignit que sa plaie étoit douloureuse, & dit qu'il se sentoit oppressé & qu'il avoit des envies de vomir. On lui demanda s'il étoit altéré, à quoi il répondit qu'il avoit grand soif, mais qu'il ne pouvoit pas boire. Effectivement, il lui fut impossible d'avaler l'eau qu'on lui présenta, quoiqu'il se fût efforcé de la porter à sa bouche. On lui fit prendre avec peine trois grains d'émétique dans quelques cuillerées d'eau, ce qui lui procura des évacuations abondantes, dont il ne reçut aucun soulagement. La suffocation devenoit de plus en plus forte; il y avoit beaucoup d'agitations; le malade, quoique d'une constitution vigoureuse, se soutenoit avec peine quand il s'efforçoit de se lever: son état étoit décidé. On se détermina à le conduire à l'Hôtel-Dieu dans la soirée. L'impression de l'air sur son visage, le mit dans une fureur momentanée, qui se renouvela plusieurs fois pendant la nuit. Il ne put rien avaler de ce qu'on lui présenta, & mourut hydrophobe, le lendemain 16, à sept heures du soir.

Le jeune homme que j'ai soigné, jouit encore de la meilleure santé, quoiqu'il y ait bientôt huit mois accomplis qu'il a été blessé; quoique ses plaies aient été au nombre de soixante-quinze; quoique plusieurs de ces plaies, & notamment celles des mains & des poignets, lui aient été faites à nu, & qu'il soit d'une vraisemblance qui approche de la certitude, que celles de l'avant-bras, de la jambe & de l'épaule, qui étoient fort grandes, ont été couvertes & infectées de la bave de l'animal; quoique je n'aie pris aucune précaution pour prolonger la suppuration des plaies, dont le plus grand nombre s'est cicatrisé assez promptement; quoiqu'enfin le malade n'ait fait usage intérieurement que de quelques gouttes d'alkali volatil, que je lui ai laissé prendre chaque matin, dans la vue de calmer son imagination troublée, plutôt que dans celle de le mettre à l'abri

du mal dont il se croyoit menacé, puisque j'ai vu périr, entre mes mains plusieurs personnes mordues par des animaux enragés, auxquelles on l'avoit administré à forte dose.

A quoi donc est-il redevable de sa guérison? à l'action du caustique & à celle du feu qui ont détruit le virus en même-temps que le tissu des parties qui en étoient imprégnées. Les morsures des animaux enragés peuvent être comparées aux plaies que l'on fait pour insérer le levain de la petite vérole. Il se fait une véritable inoculation, dont on préviendra les effets si on cautérise les plaies avant que le virus ait eu le temps de déployer son énergie & de l'exercer sur l'économie animale. La facilité avec laquelle ces sortes de plaies guérissent pour l'ordinaire, & la longueur du temps qui s'écoule avant que les malades en éprouvent les suites, montrent qu'il y reste d'abord sans action; ce n'est guère qu'entre trente & quarante jours que les malades sont incommodés. Ils commencent pour lors à ressentir un mal-aise, de l'agitation, des insomnies, de légers mouvemens convulsifs, une altération dans les traits du visage, des dégoûts & de l'oppression, simptômes avant-coureurs par où la maladie s'annonce d'une manière particulière. Peut-être le procédé qui m'a si bien réussi, peut-il être employé avec succès jusqu'à cette époque. Le fait que je viens de rapporter, montre du moins qu'on peut tarder vingt-quatre heures & plus sans y avoir recours. Mais, sans les circonstances particulières qui m'ont forcé de différer, j'en aurois fait usage aussi-tôt que j'ai été averti, & je crois prudent de ne pas perdre un instant sans venir au secours des blessés.

Ce cas n'est pas le seul où j'aie employé la cautérisation pour prévenir la rage. En 1775, je fis brûler un cylindre d'amadou sur la plaie d'un Soldat atteint à la poitrine, au-dessous du mamelon gauche, par un coup de croc qu'un chien lui avoit donné; l'escarre fut profonde, & la séparation fut suivie d'une suppuration qui dura assez

& qui ne pouvoit se persuader que le chien qui les avoi blessés eût été malade, commença à perdre l'appétit il dîna fort peu & ne soupa point. Le lendemain il s plaignit que sa plaie étoit douloureuse, & dit qu'il s sentoit oppressé & qu'il avoit des envies de vomir. O lui demanda s'il étoit altéré, à quoi il répondit qu'il ava grand soif, mais qu'il ne pouvoit pas boire. Effectivemen il lui fut impossible d'avaler l'eau qu'on lui présent quoiqu'il se fût efforcé de la porter à sa bouche. On l fit prendre avec peine trois grains d'émétique dans quelqu cuillerées d'eau, ce qui lui procura des évacuations abo dantes, dont il ne reçut aucun soulagement. La suffo tion devenoit de plus en plus forte; il y avoit beauco d'agitations; le malade, quoique d'une constitution vigo reuse, se soutenoit avec peine quand il s'efforçoit de lever: son état étoit décidé. On se détermina à le co duire à l'Hôtel-Dieu dans la soirée. L'impression de l'a sur son visage, le mit dans une fureur momentanée, q se renouvela plusieurs fois pendant la nuit. Il ne put ri avaler de ce qu'on lui présenta, & mourut hydrophob le lendemain 16, à sept heures du soir.

Le jeune homme que j'ai soigné, jouit encore de meilleure santé, quoiqu'il y ait bientôt huit mois accom plis qu'il a été blessé; quoique ses plaies aient été au nomb de soixante-quinze; quoique plusieurs de ces plaies, notamment celles des mains & des poignets, lui aient é faites à nu, & qu'il soit d'une vraisemblance qui approc de la certitude, que celles de l'avant-bras, de la jam & de l'épaule, qui étoient fort grandes, ont été couvert & infectées de la bave de l'animal; quoique je n'aie pr aucune précaution pour prolonger la suppuration des plaie dont le plus grand nombre s'est cicatrisé assez promptemen quoiqu'enfin le malade n'ait fait usage intérieurement q de quelques gouttes d'alkali volatil, que je lui ai lai prendre chaque matin, dans la vue de calmer son imag nation troublée, plutôt que dans celle de le mettre à l'ab

du mal dont il ſe croyoit menacé, puiſque j'ai vu périr entre mes mains pluſieurs perſonnes mordues par des animaux enragés, auxquelles on l'avoit adminiſtré à forte doſe.

A quoi donc eſt-il redevable de ſa guériſon? à l'action du cauſtique & à celle du feu qui ont détruit le virus en même-temps que le tiſſu des parties qui en étoient imprégnées. Les morſures des animaux enragés peuvent être comparées aux plaies que l'on fait pour inſérer le levain de la petite vérole. Il ſe fait une véritable inoculation, dont on préviendra les effets ſi on cautériſe les plaies avant que le virus ait eu le temps de déployer ſon énergie & de l'exercer ſur l'économie animale. La facilité avec laquelle ces ſortes de plaies guériſſent pour l'ordinaire, & la longueur du temps qui s'écoule avant que les malades en éprouvent les ſuites, montrent qu'il y reſte d'abord ſans action; ce n'eſt guère qu'entre trente & quarante jours que les malades ſont incommodés. Ils commencent pour lors à reſſentir un mal-aiſe, de l'agitation, des inſomnies, de légers mouvemens convulſifs, une altération dans les traits du viſage, des dégoûts & de l'oppreſſion, ſimptômes avant-coureurs par où la maladie s'annonce d'une manière particulière. Peut-être le procédé qui m'a ſi bien réuſſi, peut-il être employé avec ſuccès juſqu'à cette époque. Le fait que je viens de rapporter, montre du moins qu'on peut tarder vingt-quatre heures & plus ſans y avoir recours. Mais, ſans les circonſtances particulières qui m'ont forcé de différer, j'en aurois fait uſage auſſi-tôt que j'ai été averti, & je crois prudent de ne pas perdre un inſtant ſans venir au ſecours des bleſſés.

Ce cas n'eſt pas le ſeul où j'aie employé la cautériſation pour prévenir la rage. En 1775, je fis brûler un cylindre d'amadou ſur la plaie d'un Soldat atteint à la poitrine, au-deſſous du mamelon gauche, par un coup de croc qu'un chien lui avoit donné; l'eſcarre fut profonde, & la ſéparation fut ſuivie d'une ſuppuration qui dura aſſez

& qui ne pouvoit se persuader que le chien qui les avoit blessés eût été malade, commença à perdre l'appétit; il dîna fort peu & ne soupa point. Le lendemain il se plaignit que sa plaie étoit douloureuse, & dit qu'il se sentoit oppressé & qu'il avoit des envies de vomir. On lui demanda s'il étoit altéré, à quoi il répondit qu'il avoit grand soif, mais qu'il ne pouvoit pas boire. Effectivement, il lui fut impossible d'avaler l'eau qu'on lui présenta, quoiqu'il se fût efforcé de la porter à sa bouche. On lui fit prendre avec peine trois grains d'émétique dans quelques cuillerées d'eau, ce qui lui procura des évacuations abondantes, dont il ne reçut aucun soulagement. La suffocation devenoit de plus en plus forte; il y avoit beaucoup d'agitations; le malade, quoique d'une constitution vigoureuse, se soutenoit avec peine quand il s'efforçoit de se lever: son état étoit décidé. On se détermina à le conduire à l'Hôtel-Dieu dans la soirée. L'impression de l'air sur son visage, le mit dans une fureur momentanée, qui se renouvela plusieurs fois pendant la nuit. Il ne put rien avaler de ce qu'on lui présenta, & mourut hydrophobe, le lendemain 16, à sept heures du soir.

Le jeune homme que j'ai soigné, jouit encore de la meilleure santé, quoiqu'il y ait bientôt huit mois accomplis qu'il a été blessé; quoique ses plaies aient été au nombre de soixante-quinze; quoique plusieurs de ces plaies, & notamment celles des mains & des poignets, lui aient été faites à nu, & qu'il soit d'une vraisemblance qui approche de la certitude, que celles de l'avant-bras, de la jambe & de l'épaule, qui étoient fort grandes, ont été couvertes & infectées de la bave de l'animal; quoique je n'aie pris aucune précaution pour prolonger la suppuration des plaies, dont le plus grand nombre s'est cicatrisé assez promptement; quoiqu'enfin le malade n'ait fait usage intérieurement que de quelques gouttes d'alkali volatil, que je lui ai laissé prendre chaque matin, dans la vue de calmer son imagination troublée, plutôt que dans celle de le mettre à l'abri

du mal dont il ſe croyoit menacé, puiſque j'ai vu périr entre mes mains pluſieurs perſonnes mordues par des animaux enragés, auxquelles on l'avoit adminiſtré à forte doſe.

A quoi donc eſt-il redevable de ſa guériſon? à l'action du cauſtique & à celle du feu qui ont détruit le virus en même-temps que le tiſſu des parties qui en étoient imprégnées. Les morſures des animaux enragés peuvent être comparées aux plaies que l'on fait pour inſérer le levain de la petite vérole. Il ſe fait une véritable inoculation, dont on préviendra les effets ſi on cautériſe les plaies avant que le virus ait eu le temps de déployer ſon énergie & de l'exercer ſur l'économie animale. La facilité avec laquelle ces ſortes de plaies guériſſent pour l'ordinaire, & la longueur du temps qui s'écoule avant que les malades en éprouvent les ſuites, montrent qu'il y reſte d'abord ſans action ; ce n'eſt guère qu'entre trente & quarante jours que les malades ſont incommodés. Ils commencent pour lors à reſſentir un mal-aiſe, de l'agitation, des inſomnies, de légers mouvemens convulſifs, une altération dans les traits du viſage, des dégoûts & de l'oppreſſion, ſimptômes avant-coureurs par où la maladie s'annonce d'une manière particulière. Peut-être le procédé qui m'a ſi bien réuſſi, peut-il être employé avec ſuccès juſqu'à cette époque. Le fait que je viens de rapporter, montre du moins qu'on peut tarder vingt-quatre heures & plus ſans y avoir recours. Mais, ſans les circonſtances particulières qui m'ont forcé de différer, j'en aurois fait uſage auſſi-tôt que j'ai été averti, & je crois prudent de ne pas perdre un inſtant ſans venir au ſecours des bleſſés.

Ce cas n'eſt pas le ſeul où j'aie employé la cautériſation pour prévenir la rage. En 1775, je fis brûler un cylindre d'amadou ſur la plaie d'un Soldat atteint à la poitrine, au-deſſous du mamelon gauche, par un coup de croc qu'un chien lui avoit donné; l'eſcarre fut profonde, & ſa ſéparation fut ſuivie d'une ſuppuration qui dura aſſez

long-temps. Un autre homme, mordu par le même chien en plusieurs endroits de la tête, tomba dans les accidens de l'hydrophobie, cinquante-deux jours après, & mourut en moins de vingt-quatre heures. Cependant celui que j'ai cautérisé n'en a pas eu le moindre ressentiment : je l'ai revu bien portant quatre à cinq ans après sa blessure. Depuis ce temps, j'ai conseillé le même procédé pour un enfant mordu à l'un des avant-bras, près le poignet. Il a guéri, & l'on m'a assuré qu'une autre personne, mordue par le même chien, étoit morte de la rage quelque temps après. Enfin j'ai coupé, en 1780, l'extrémité du pouce de la main droite & celle du doigt indicateur de la main gauche, à un Officier & à un Soldat, blessés tous deux par un même chien, sur l'état duquel il y avoit des doutes bien fondés. Mais il s'en faut de beaucoup que ces observations soient concluantes. Le premier Soldat avoit été blessé à travers la bandoulière de son fourniment & à travers ses habits, de sorte que la dent de l'animal avoit pu être essuyée avant qu'elle lui perçât la peau. Je n'ai pas vu périr la personne mordue par le chien qui avoit blessé l'enfant, & la nature de la maladie à laquelle cette personne a succombé ne me paroît pas bien constatée. Enfin il est possible que le chien qui a blessé l'Officier & le dernier Soldat, ne fût pas enragé. Mais toutes les circonstances de l'observation qui fait le sujet de ce Mémoire, se sont passées sous mes yeux, & le chien qui a si fort maltraité le malade à qui j'ai donné des soins, étoit certainement attaqué de la rage, puisque le Jardinier, blessé plus de quarante-huit heures avant lui, est mort avec les simptômes qui caractérisent cette maladie.

Je ne dois pas dissimuler que la cautérisation des plaies faites par des animaux enragés, est un procédé fort connu. Presque tous ceux qui ont écrit sur le traitement de ces sortes de plaies en ont recommandé l'usage, mais comme celui d'un moyen purement auxiliaire, auquel ils n'ont pas attaché toute l'importance qu'il mérite, & sans recom-

mander comme je le fais, de la porter aſſez loin pour que toutes les particules vénéneuſes inoculées ſoient détruites. Si on excepte M. le Roux, de l'Académie des Sciences, Arts & Belles-Lettres de Dijon, l'un de ceux qui ont partagé le prix de la Société royale de Médecine, dont les idées ſont preſque entièrement conformes aux miennes, ils ne ſe ſont propoſé d'autre but que celui d'obtenir une ſuppuration qui durât long-temps, & des dégorgemens à la faveur deſquels les miaſmes virulens puſſent être entraînés au dehors; comme ſi le mouvement qui s'excite dans les plaies, pouvoit empêcher que les ſubſtances qui ſont en contact avec elles, pénètrent à l'intérieur. Il y a des exemples de morſures qui ont ſuppuré avec abondance & qui n'ont point eu de ſuites. N'eſt-il pas plus ſûr de dénaturer & d'anéantir le virus dont les parties ſont infectées, en cautériſant profondement avec des cauſtiques, en conſumant avec le feu, ou en extirpant la partie bleſſée, lorſqu'on ne peut employer l'un ou l'autre de ces procédés ſans de grands inconvéniens, & lorſque le retranchement de cette partie n'emporte pas avec lui le danger de la vie? Voilà ce que l'inſuffiſance des remèdes les plus accrédités dont j'avois fait uſage ſans ſuccès, & ſur-tout ce que la réflexion & l'analogie m'avoient fait penſer depuis long-temps. Il falloit que des circonſtances malheureuſes me miſſent à portée de faire les nouvelles épreuves dont j'avois beſoin: j'ai ſaiſi celles qui ſe ſont préſentées. Les premières m'avoient laiſſé des doutes de toute eſpèce; la dernière les a totalement diſſipés, & je ſuis enfin convaincu que c'eſt de la Chirurgie ſeule que l'on doit attendre des ſecours vraiment efficaces, contre l'une des plus affreuſes maladies qui aient jamais affligé l'humanité.



MÉMOIRE

SUR UNE PLANTE DU PÉROU,

Nouvellement connue en France.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

Préſenté le 17 Déc. 1784.

LA ſcience de la Botanique eſt redevable à M. Dombey*, de pluſieurs Plantes naturelles au Pérou, qu'il a envoyées au Jardin royal, de la nouvelle Eſpagne, en fruits ou en graines, & dont pluſieurs ont réuſſi.

C'eſt M. Dombey, qui, en 1780, adreſſa à l'Académie la manière de deſſécher la pomme de terre ou patate, & de conſerver pluſieurs années les tubéroſités de cette plante, de manière à pouvoir ſervir d'aliment aux hommes & aux animaux.

Cette même année 1780, M. Dombey envoya à l'Académie & au Jardin du Roi, une graine, ſous le nom de *quinoa*, ajoutant les uſages qu'on faiſoit de cette graine à Lima, & les grands avantages dont elle pouvoit être en France, ſi nous parvenions à l'y multiplier.

On donna de ces graines à tous les cultivateurs, mais elles n'ont réuſſi nulle part, il y a même apparence que la graine envoyée avoit été deſſéchée, & peut-être mondée, contre le gré de M. Dombey.

J'ai ſemé cette graine de quinoa, & en vain; un ſeul pied d'une autre plante, qui me ſembloit nouvelle pour nous, a levé dans une des terrines; je l'ai cultivée avec le plus grand ſoin.

Je n'ai pas tardé à me convaincre que cette plante

* Médecin-botaniſte du Roi, correſpondant de l'Académie des Sciences de Paris, envoyé par Sa Majeſté le Roi de France, au Pérou (de retour en France lors de l'impreſſion de ce Mémoire).

n'étoit

n'étoit pas le quinoa, puisqu'on l'a dit de sa famille du *chenopodium*, & que la plante nouvelle indiquoit être d'un genre tout différent. Cette nouvelle plante a fleuri la même année qu'elle a été semée; elle est annuelle, & tous les ans, depuis cette époque, j'obtiens plusieurs pieds des semences recueillies à Denainvilliers; mais comme cette plante mérite par sa feuille & sa fleur d'être connue, & que nous pourrions la perdre par la réunion de diverses circonstances, puisqu'elle est annuelle, j'ai cru devoir en donner une description particulière, & la consigner dans les volumes de l'Académie.

Je ne crois pas, d'après les recherches que j'ai faites, qu'aucun Botaniste ait décrit cette plante, qui, par les caractères propres aux parties de sa fructification, doit être rangée dans la *didinamie angiospermie* de Linné, ce qui le rapproche beaucoup, comme nous le ferons voir dans la suite, de la famille des bignognes, des martynia, &c. Cependant M. de Jussieu, de cette Académie, ayant eu la complaisance de me permettre de visiter l'herbier que M. de Jussieu son oncle a rassemblé au Pérou; j'y ai trouvé cette plante dessinée au trait, par feu M. Joseph de Jussieu, avec son caractère, tiré de sa fleur & de son fruit, & un exemplaire de la même plante desséchée, avec le lieu où il l'a trouvée, ainsi indiqué; *Achochillas del monte, camino de canelos.*

Description de la Plante.

Cette plante, au sortir de la terre, porte deux feuilles séminales, opposées, épaisses, non dentelées, dont les nervures ont peu d'apparence, & qui sont ovoïdes, fort échancrées dans leur petit diamètre, à l'extrémité supérieure, ainsi que du côté de leur pédicule: la plante dont nous parlons, court & s'étend de douze à quinze pieds, ses branches sont herbacées, mais elles se soutiennent en s'accrochant à l'aide de ses vrilles qui sont bifurquées &

terminées par des crochets; c'eſt ainſi que la plante, en ſe prolongeant, adhère aiſément & fortement à ce qu'elle touche. Elle n'eſt ligneuſe que près de ſa racine, les branches & les tiges ſont herbacées, & tiennent de la plupart des labiées, en ce que les tiges ſont anguleuſes & comme quadrangulaires, avec des eſpèces de ſéparations ou de renflemens aux endroits d'où ſortent les branches latérales, *fig. 1*. De ce renflement de la tige, ou de cette eſpèce d'articulation, ſortent deux branches oppoſées, ou deux feuilles, & de chaque inſertion une vrille ou le pédicule d'une vrille. Il ſe forme enſuite, à quatre ou cinq pouces de cette première articulation, un ſecond renflement d'où partent deux pédicules qui ſoutiennent deux nouvelles feuilles; ainſi de ſuite. Chacun de ces pédicules qui portent les feuilles, ſe diviſe ordinairement en trois autres pédicules plus déliés, & ces trois-ci portent une foliole: ces folioles ſont découpées & dentées irrégulièrement. Quelquefois, une ou deux des principales nervures ſe prolongent & ſervent à former une quatrième ou une cinquième foliole; ainſi on doit regarder la feuille comme étant compoſée de deux folioles oppoſées & d'une impaire, quoiqu'elle en ait ſouvent quatre & cinq. La vrille, qui, comme nous l'avons déjà dit, ſe trouve à l'inſertion des branches & des feuilles, eſt auſſi ſurcompoſée; le pédicule principal de cette vrille ſe diviſe ordinairement en trois: elle ſe roule ſouvent en ſpirale déliée, & toujours ſe termine par deux crochets qui ont beaucoup de force, & qui ſe briſent plutôt que d'abandonner la partie à laquelle ils adhèrent. Les nervures de chacune de ces folioles, ſur-tout la principale & longitudinale, ſont très-relevées en deſſous & profondes en-deſſus; la couleur de la foliole, eſt d'un vert aſſez foncé. Des poils fins & blancs ſe remarquent ſur les pédicules des feuilles & ſur les tiges, ils ſont ſur-tout placés ſur les angles; on voit auſſi de ces poils diſpoſés par touffes à l'inſertion des articulations. Toutes les branches ſont ſi herbacées,

& les feuilles si aqueuses, qu'il est difficile de les bien dessécher, & elles se réduisent, entre du papier, à un très-petit volume.

La fleur est disposée en épis de 4 à 5 pouces. Cet épi est terminé par cinq, six & même dix fleurs incomplètes qui n'ont qu'un calice d'une seule pièce, divisé en deux lèvres principales, comme dans le calice des fleurs complètes dont nous allons parler. La principale & la plus grande lèvre du calice de ces fleurs incomplètes, puisqu'elles manquent de corolle, est comme ployée & souvent dentée vers son extrémité supérieure; l'autre est étroite & pointue. Ce calice est coloré d'un rouge très-foncé, jusque vers son fond qui est vert. Les fleurs du reste de l'épi sont composées d'un calice, aussi d'une seule pièce & divisé en deux lèvres principales, comme dans les fleurs incomplètes: l'une de ces lèvres, moins large que dans celles incomplètes, est souvent colorée d'un rouge-foncé, elle est plus grande que la seconde lèvre, & comme creusée un peu en gouttière ou en cueilleron; la seconde lèvre, qui est le plus souvent verte, est plus étroite que celle que nous venons de décrire & un peu pointue. L'ouverture de la corolle se trouve du côté de la plus grande lèvre.

La corolle est composée d'un tuyau d'inégale forme & largeur, sa moindre extrémité est renfermée dans le calice; ce tuyau continue à s'évaser, puis il forme une petite lèvre qui se rabat sur le tuyau, tandis que l'autre partie, qu'on peut considérer comme formant la lèvre supérieure, imite la figure d'un casque, d'une toque ou d'un capuchon très-obtus, ouvert sur le côté qui forme la partie antérieure de la fleur, & cette ouverture est garnie d'un petit rebord qui d'un côté & de l'autre se rabat sur la fleur: toute la corolle est d'une belle couleur bleuâtre très-foncée, qui tire sur le violet.

On voit, en ouvrant la fleur, quatre étamines attachées à la corolle, dont deux sont plus longues que les deux

autres, & quelquefois le filet ou la naiſſance d'une cinquième étamine. Les antères de chaque étamine ſont doubles; chaque bourſe ovale s'ouvre en deux parties qui répandent une pouſſière fécondante jaune & aſſez abondamment.

Du fond du calice, part un piſtil compoſé d'un ovaire hériſſé dès ſon jeune âge de petits poils fins, ſurmonté d'un ſtil de la longueur du pétale, & terminé par un ſtigmate aigu: le pédicule propre à la fleur, eſt peu alongé, & porte à ſon inſertion une *bractée* ou petite feuille peu apparente.

La carolle abandonne le calice, enſuite tombe le calice; & l'ovaire groſſiſſant, devient un fruit long d'environ deux pouces, hériſſé de filets durs, & dont l'extrémité eſt terminée par un crochet aſſez ſemblable par ſa forme à ceux des vrilles; mais celui du fruit a encore plus de force & de réſiſtance.

Si on coupe ce fruit horizontalement, on le voit compoſé de quatre loges principales, formées par des cloiſons qui ſe prolongent ſuivant la longueur du fruit: ce fruit, à l'extérieur, & par les pointes dont il eſt hériſſé, a des rapports avec celui du *xanthium* ou *lappa minor*, (bardanne).

Dans chacune de ces loges, il y a des ſemences appliquées le long de la cloiſon, & qui par leurs poſitions ſe recouvrent en partie les unes les autres: ces ſemences ſont ovales, & entourées d'une membrane mince qui les rend ailées, la membrane eſt fort échancrée dans ſa partie poſtérieure. L'enveloppe hériſſée de pointes, forme à ce fruit comme une eſpèce de brou qui recouvre les quatre loges plus intérieures, où ſont diſpoſées les ſemences, ce qui le diviſe comme en huit parties; & par-là, ce fruit ſe rapproche du *martinia*.

On voit par cette deſcription, que la plante dont il s'agit, doit être placée dans la *didinamie angioſpermie* de Linné, qu'elle tient & ſe rapproche beaucoup de la famille des bignognes par les quatre étamines qui ſont adhérentes à la corolle, dont deux ſont plus courtes, &

par la naissance d'une cinquième, qui n'est apparente que dans certaines fleurs; par ses feuilles qui sont surcomposées comme dans plusieurs espèces de bignognes; par ses vrilles encore propres à plusieurs bignognes; enfin par son fruit, les différentes loges qui le partagent, & par ses semences ailées qui se recouvrent les unes les autres, & qui sont enfermées dans une gousse, par conséquent par des rapports tirés de ses feuilles, de sa fleur & de son fruit. Mais comme le genre des bignognes est nombreux, que la Nature semble avoir indiqué des divisions, en ayant égard à la différence que présentent leurs feuilles entières ou composées, leurs fleurs dont la corolle est plus ou moins campanulée, & divisée plus ou moins régulièrement, les fruits plus ou moins longs, plus ou moins gros, la quantité des cloisons qui les séparent; enfin, que les fruits des bignognes sont unis ou épineux, on pourroit aisément en faire autant de genres particuliers, sur-tout si on fait attention aux cloisons & au nombre des loges qui divisent les fruits. En se servant de ces différences, ce seroit un moyen aisé pour former des divisions dans ce genre des bignognes déjà nombreux.

Nous croyons voir dans la plante que nous décrivons, un caractère qui lui est propre, puisque sa corolle, au lieu d'être campanulée, est formée en un tuyau long & renflé irrégulièrement, qui se termine, comme dans certaines labiées, par une toque ou capuchon obtus; enfin puisque la cloison à quatre ailes qui sépare son fruit, n'est commune à cette plante avec aucune des espèces de bignognes déjà décrites. Il convient donc d'en faire un genre particulier. Ayant appris que M. Dombey avoit adressé à M. de Jussieu, des fruits de cette même plante & l'avoit nommée; en respectant les intentions de ce zélé Botaniste, & une personne connue avantageusement des Savans, je nommerai la plante dont il est question,

La Tourretia *caule volubili quadrangulari, cyrrhoso, foliis plerumque trifidis, foliolis dentatis, fructu hispido, xanthii seu lappæ minori ferè simili.* Act. Reg. Par.

Explication de la Planche qui repréſente la Tourretia.

Fig. 1. Les feuilles ſeminales qui durent & perſiſtent quelque temps.

Fig. 2. La plante.

- *a,* la feuille avec ſon pédicule qui ſe diviſe en trois folioles, ayant chacune ſon pédicule; une des dentelures de la foliole qui s'alonge, & forme quatre ou cinq folioles, au lieu de trois.
- *b,* les vrilles qui ſont elles-mêmes ſurcompoſées, le crochet qui termine chaque vrille.
- *c,* l'épi de fleurs qui ſort ſouvent de la bifurcation des tiges, & à ces endroits où les tiges de la plante forment un renflement. A l'extrémité ſupérieure de l'épi de fleurs, il y a ſouvent cinq ou ſix fleurs incomplètes,
- *d,* & compoſées d'un ſeul calice coloré, ſans pétale.

Fig. 3. La fleur avec tous ſes détails.

- *e,* le bouton de la fleur.
- *f,* la fleur vue de côté avec ſon calice.
- *g,* la fleur vue en face.
- *h,* le calice ouvert.
- *i,* le calice dans lequel on voit l'embryon.
- *k,* l'embryon avec ſon ſtil.
- *l,* la corolle ouverte & les quatre étamines.
- *m,* une étamine ſéparée.
- *n,* le jeune fruit toujours accompagné, dans le jeune âge, de deux ſtipules ou bractées.

Fig. 4. Le fruit en ſon état de maturité.

Fig. 5. Le fruit coupé tranſverſalement où l'on voit les quatre loges formées par les cloiſons, & le brou qui les enveloppe.

Fig. 6. Les graines attachées aux cloiſons.

- *o,* la graine ſéparée & ailée.
- *p,* une de ces pointes ou crochets qui garniſſent le deſſus du fruit.





Y. le Gouaz sculp.

MÉMOIRE
SUR L'ABRICOTIER DE SIBÉRIE.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

LE travail que j'ai entrepris depuis plus de dix ans, pour donner une nouvelle édition du Traité des arbres & arbustes, publié par M. du Hamel-du-Monceau, en 1755, m'a obligé de revoir en même temps certains arbres fruitiers, & en particulier l'espèce d'abricotier de Sibérie dont je vais parler. Lû le 3 Août 1785.

Quoique la séparation entre les abricotiers, amandiers, pêchers, & les pruniers, soit difficile à fixer; cependant M. du Hamel, en traitant des abricotiers, les a distingués avec raison des pruniers, puisque, sans changer des dénominations reçues vulgairement, la fleur & les fruits de l'abricotier sont sessiles, l'ovaire & le fruit velus, le noyau ovale, uni, renflé, &c. le temps de la maturité, différent & plus prématuré, sont des caractères suffisans pour les différencier des pruniers.

M. du Hamel, dans son Traité des arbres & arbustes, a donné à l'abricotier de Sibérie, la phrase d'Amman, *armeniaca betulæ folio & facie, fructu exsucco;* Amman, *Ruth.* & en a parlé dans son Traité des bons fruits, sous le nom d'*abricot noir; tome I, page 142.*

M. Pallas, dans son premier volume, 1.ere partie des plantes Russes, donne sous le nom de *prunus Sibirica,* la description & la figure de cet abricotier; il y indique aussi la couleur de son fruit, d'un rouge-noir, & donne tous les détails concernant son bois, sa feuille & ses fleurs, *tab. VIII, page 15.*

En 1757, M. du Hamel ignoroit d'où lui étoit venu cet arbre qu'il cultivoit; mais d'après la description qu'en

a donnée dernièrement M. Pallas, celles qu'on avoit de Gmelin & d'Amman, je crois ne pouvoir plus douter que son lieu originaire ne soit la Sibérie.

Linné, qui a compris l'abricotier & le pêcher dans le genre des pruniers, regarde avec raison cet arbre de Sibérie, comme devant former une espèce, puisqu'il varie peu par ses semences. Jamais il ne devient un si gros arbre ni si élevé que l'abricotier commun; cependant il pousse des jets longs & grêles, souvent terminés par une pointe dure. Sa feuille est ovale, alongée, & finit par un prolongement très-aigu; elle est dentée finement, d'un vert-foncé en-dessus, soutenue par des pétioles longs, & ressemblant par-là aux feuilles de bouleau auxquelles on l'a comparée avec assez de justice. Les fruits de celui que nous possédons, sont attachés à un très-court pédicule, en quoi il diffère principalement du premier, & ne deviennent pas plus gros qu'une prune de damas: ils sont arrondis, ayant leurs diamètres à peu-près égaux, & de dix-huit lignes environ; l'œil est peu enfoncé. Ce fruit est couvert d'un duvet léger & fin; sa couleur est violette très-foncée, presque noire, & sa chair uniformément pourpre; sa peau & sa chair sont colorées de la même manière du côté du soleil & de la muraille, s'il est en espalier; le noyau est lisse & bombé, figuré en cœur comme celui de l'abricotier, étant plus renflé sur un côté qu'il ne l'est sur l'autre: celui aplati porte une arête principale, & à côté de celle-là deux autres moins marquées; elles sont semblables à ce qu'on remarque sur les noyaux d'abricots: celui de Sibérie en diffère seulement par un sillon qui se voit sur le côté opposé à l'arête, & qui est renflé, par-là il se rapproche de la prune; mais on sait que ce sillon se trouve aussi sur quelques espèces d'abricot, que sur d'autres, c'est un véritable tuyau, dans lequel on peut passer un crin ou fil de laiton fin; que d'ailleurs il manque à quelques espèces de prunes. Quoique ce sillon soit apparent sur toute la longueur du noyau, dans le fruit que

que nous examinons, on ne peut disconvenir qu'il tient plus, par sa forme, du noyau d'abricot que de celui de la prune: son amande est légèrement amère; il mûrit avec les abricots, à la fin de Juillet ou au commencement d'Août; son eau est sucrée, mais a peu de goût. Amman & Pallas donnent ce fruit comme n'ayant aucune saveur, mais la culture peut avoir corrigé celle naturelle à l'arbre sylvestre: il faut cependant convenir qu'il ne mérite d'être placé dans nos vergers, que par la singulière couleur de son fruit.

Ces descriptions de la feuille & du fruit ayant la plus grande conformité avec celles données par Amman, Gmelin, Linné & Pallas, je crois qu'il n'y a pas lieu de douter que l'arbre que je viens de décrire, ne soit originaire de la Sibérie, & que c'est celui qui y croît dans des lieux montagneux & entre des rochers.

M. Pallas ajoute que « peut-être ce prunier de Sibérie n'est-il qu'une simple variété du prunier-abricotier que le « changement de climat & de position a fait dégénérer; « c'est ce que la culture dans les jardins fera connoître par « la suite ». Nous avons déjà dit que cet abricotier se régénère par les semences, ainsi ce seroit une espèce; d'ailleurs, ne semble-t-il pas qu'on dût retrouver la première Nature dans les climats & contrées de la Sibérie, où la main de l'homme n'auroit encore produit aucun changement? S'il est assez constant que l'abricotier que nous cultivons, a été transporté de la Perse dans l'Arménie & en Grèce * pouquoi les parties les plus septentrionales de notre globe n'auroient-elles pas aussi une espèce d'abricot? ce qui devient confirmé par le fait que nous venons de rapporter.

J'ajoute ici la synonimie de cet arbre.

Prunus inermis, foliis ovato-cordatis, longè mucronatis, fructibus excussis. Gmelin, flor. Sib. III, pag. 172.

---

* *Voyez* le voyage de M. Pockocke, pour l'abricot de damas: & le voyage de M. Otter, pour ceux d'Alep & d'Aintab.

Prunus floribus sessilibus, foliis ovato-oblongis. Linné, syst. II, pag. 486, n.° 8.

Armeniaca betulæ folio & facie, fructu exsucco. Amman, Stirp. Ruth. p. 192, n.° 272, tab. XXX. Du Hamel, arb. & arb. tom. I, pag. 74.

Prunus inermis, foliis ovato-cordatis, longè mucronatis, fructibus exsuccis (sessilibus), Pallas, plant. Ros. 1.^a pars, tom. I, pag. 15, tab. VIII.



MÉMOIRE
SUR UNE
NOUVELLE ESPÈCE D'ORME.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

PARMI plusieurs grands arbres qui par différentes émigrations garnissent maintenant nos forêts, nos bois & nos plantations, & qu'on a associés avec le chêne qui couvroit uniquement l'ancienne Gaule, nous pouvons citer l'orme comme étant une des acquisitions des plus utiles & qui nous procure le plus de diverses jouissances.

Présenté le 1.er Sept. 1784.

Nous possédons l'orme depuis long-temps en France; il est indigène dans quelques parties de l'Europe, il se trouve aussi naturellement dans quelque parties de l'Asie; plusieurs variétés semblables aux nôtres sont aussi en Canada & dans l'Amérique septentrionale.

Depuis peu, en France, on cultive une espèce d'orme provenant de la Floride, & elle n'est nullement sensible aux fortes gelées; enfin l'on cultive un orme nain qu'on croit avoir été tiré du Japon, mais celui-là souffre des gelées, & demande des protections contre les froids rigoureux.

M. du Hamel, dans son *Traité des Arbres & Arbustes*, nous donne les phrases de dix ormes, mais dans ce nombre, il n'a pas prétendu, quoique sous le titre d'espèces, n'y avoir pas réuni plusieurs variétés. Il ne connoissoit pas, en 1757, les deux espèces étrangères, celles de la Floride & du Japon. Nous devons la description de ces deux-ci à M. Richard, qui maintenant, à Cayenne, travaille à reculer les limites de nos connoissances en Botanique.

J'aurois tort de prétendre avoir introduit en France une nouvelle espèce d'orme, puisqu'elle y existoit depuis

long-temps ; mais comment, après les Tournefort, Vaillant & les Juſſieux, eſt-il reſté un arbre différent de preſque toutes les eſpèces de ce genre, ſans qu'ils l'aient fait connoître ? Admirateur de leur zèle & de leurs talens, c'eſt un haſard s'il m'eſt reſté à glaner après de pareils maîtres, auſſi attentifs à récolter en matière de Sciences.

L'orme commun ſe plaît dans notre climat, il végète dans des terres qui ont peu de fond quand la terre de la ſuperficie eſt végétative, ſes racines s'étendent au loin & vont chercher la nourriture qui lui eſt néceſſaire: le chêne périroit où l'orme ſubſiſte. Mais quand il eſt placé dans une terre fertile qui a du fond, il pivote & en peu de temps s'élève, & quoiqu'étant planté proche d'autres ormes il acquiert de la groſſeur; les progrès de cet arbre ſont encore plus rapides lorſqu'il eſt placé dans un fond frais & un peu humide.

Perſonne n'ignore l'utilité & les grands avantages qu'on retire de l'orme que nous cultivons, & dont quelques eſpèces ou variétés ſont préférées à juſte titre; les Charrons emploient beaucoup d'ormes, ils en font ſur-tout les moyeux des roues & les jantes, &c. c'eſt avec l'orme qu'on fait la preſſe des preſſoirs, certaines parties des moulins à eau & à vent, &c. & on achette de préférence, pour les moyeux & les jantes, l'orme appelé *tortillard*.

Avant de parler encore de la nouvelle eſpèce d'orme découverte, il convient de rapeler les caractères propres au genre, & de ne citer que les différences qui caractériſent l'eſpèce dont nous parlons.

La fleur, dans le genre de l'orme, eſt composée d'un calice plus ou moins découpé, mais d'une ſeule pièce preſque toujours colorée en rouge; ce calice qui perſiſte juſqu'à la maturité du fruit, porte depuis quatre juſqu'à cinq & même ſix étamines du double plus longues que le calice ; il eſt donc difficile de donner à ce genre une place dans la méthode du célèbre Linné, puiſqu'elle devroit être réglée ſur ce nombre d'étamines.

Mais ce qui déroute encore celui qui cherche dans cette même méthode une place assignée au genre de l'orme, c'est que sur le même arbre il se trouve des fleurs à étamines, d'autres hermaphrodites, & que certains individus ont plus ou moins de l'une ou de l'autre de ces fleurs; l'espèce d'orme qu'on nomme *tortillard*, & qui est principalement recherchée par les Charrons, est très-sujette à donner des graines stériles, ou à n'en point produire, parce que des individus souvent ne portent que des fleurs incomplètes.

Ces fleurs naissent par petits paquets, elles sont sessiles, & il leur succède des capsules membraneuses, aussi sessiles, au milieu desquelles on voit une loge qui contient une seule semence: la forme de la capsule est un ovoïde soutenu à la branche par son petit diamètre, & chacun de ses côtés est arrondi; l'extrémité opposée à celle de son pédicule, est échancrée en forme de cœur.

A l'espèce nouvelle que je fais connoître aujourd'hui, la fleur varie aussi dans le nombre de ses étamines qui en contient depuis quatre jusqu'à six. Le calice ne diffère des autres espèces d'ormes qu'en ce que le calice de celles connues est campanulé, & le fond, dans l'espèce que je décris, est très-pointu; d'ailleurs ce qui lui sert de différence & la caractérise, c'est que, dans cette espèce, la fleur est soutenue par un long pédicule, & n'est pas sessile comme dans la plupart des espèces décrites.

Le fruit soutenu aussi par ce même pédicule fort alongé, a la forme d'un ovoïde dont le grand axe porte par une de ces extrémités dans le calice, & l'autre extrémité très-pointue, est fendue, & séparée jusque vers la loge qui renferme la semence; enfin le pédicule & le fruit sont garnis de poils ou filets blancs & soyeux qui les rendent comme velus: ces parties, en mûrissant, changent peu de couleur & conservent en grande partie la teinte verte qu'elles avoient sur l'arbre.

La feuille de cet arbre est grande, large; on y remarque

auſſi, comme dans beaucoup d'autres ormes, qu'un côté de la feuille ſe prolonge plus que l'autre côté ſur la nervure principale intermédiaire & longitudinale. Enfin, elle ſe diſtingue difficilement des ormes à grandes feuilles, & qu'on a nommés mal-à-propos *ormes femelles*.

L'écorce me paroît raboteuſe, & aſſez approchante auſſi de celle de l'orme femelle, ſans y pouvoir remarquer ces ſillons tortueux, comme on les diſtingue dans l'orme tortillard; variété de l'orme femelle.

Le tronc, quoique l'arbre s'élève & ait un beau port, ſes branches s'étendant, devient fort gros: je ne puis parler de la qualité de ſon bois, ne m'étant pas trouvé à portée d'en faire débiter.

J'ai dit que pluſieurs ormes, quoique grainant beaucoup, ne donnoient que des ſemences infructueuſes: je ſoupçonne que quelques parties de la fructification ſont viciées ou incomplètes dans ces individus, & que l'orme dont nous parlons a ce défaut, car la plupart des capſules ſont dépourvues de graines, & je n'ai pu encore parvenir à le faire lever de graines; mais d'autres perſonnes ont été plus heureuſes, & d'ailleurs on peut ſe le procurer par le ſecours de la greffe.

On voit donc que je ne puis pas aſſurer que cet orme forme une eſpèce, mais les différences dans certaines parties de ſa fructification me le font conjecturer avec quelque eſpèce de certitude.

J'ai découvert cet orme premièrement au jardin de l'Arſenal de Paris; & depuis que je l'ai eu fait remarquer à différentes perſonnes, on s'eſt aſſuré qu'il ſe trouve encore dans pluſieurs autres endroits de la France.

Je dois ajouter qu'ayant eu à ma diſpoſition un catalogue de quelques arbres indigènes à la Ruſſie & à la Siberie, & y ayant quelques planches gravées de ces arbres, j'y ai vu l'orme que je cite avec les longs pédicules qui ſoutiennent ſes fleurs & ſes fruits, & qu'on y donne cet arbre comme étant l'eſpèce d'orme la plus commune en Sibérie, & d'un uſage très-avantageux pour les Arts.

IUS PEDUNCULATA

Mem. de l'Acad. R. des Sc. An. 1784. Pag. 214. Pl. II.



Y. le Gouaz sculp.

Il seroit difficile, comme je l'ai dit, de fixer le temps où l'orme a commencé à être introduit en France; nous savons seulement que du temps de François I.er il n'y en avoit presque point en France: il seroit plus incertain encore de déterminer le pays d'où on l'a tiré; serions-nous redevables de cette espèce à la Russie ou à la Siberie?

On pourroit désigner cet orme sous le nom trivial d'*ulmus pedunculata*, & sous cette phrase.

Ulmus foliis ovato-acuminatis duplicato-serratis basi inæqualibus, fructu viridi bicorne villoso, pedunculo filiforme longo, membranâ seminali subtilissimè reticulatâ. Act. R. Parif. 1784 *.

* Depuis la lecture de ce Mémoire, M. Pallas a publié la première partie des plantes de la Russie; il y annonce que l'*ulmus pedunculata* est l'orme le plus commun en Russie, & le nomme *ulmus lævis*: il a fait graver sa graine, & y décrit notre orme à fruit sessile, comme étant l'orme le moins généralement répandu; ainsi cela confirmeroit ce que j'ai dit plus haut, que nous pourrions devoir cet orme à la Russie ou à la Siberie.



DESCRIPTION

D'un Poiſſon du genre des Silures, appelé Shaid *ou* Shaiden *par les Allemands.*

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

Lû le 28 Juillet 1784.

M. BROUSSONET (maintenant de cette Académie) lut à l'Académie, le 14 Juillet 1784, un Mémoire ſur un Silure ou anguille tremblante, comparable au *gimnotus* annoncé par M. Adanſon, &c; & voyant une grande conformité entre le poiſſon qu'il décrivoit, & le shaid des Allemands, j'ai cru devoir faire part à la Compagnie, de ce que j'avois écrit ſur ce poiſſon.

Le shaid entre dans la claſſe ou ſection des poiſſons anguilliformes, & fera partie de la ſuite au traité des Pêches, commencé par feu M. du Hamel-du-Monceau, & à laquelle je travaille.

Le shaid ou shaiden, ſchadem, welſs des Allemands, eſt le poiſſon décrit par Geſner, ſous le nom de *ſilurus (page 1047),* ainſi que par Willughby *(page 128, tab. H 5)*; c'eſt le *glanis ſalviani (page 210)* & d'Aldrovande; le *ſilurus glanis* de Linné, le *ſum harcha* ou *acchia* des Polonois, & le *sheat fish* des Anglois, le *glagno* à Conſtantinople, & enfin le *glanis*, eſpèce de ſilure, de Pline.

Bélon, après avoir parlé de l'eſturgeon, & du poiſſon *ictio colle hanſen ploſen*, cite le *ſilurus*, & ſemble avoir voulu parler du shaid, en annonçant un poiſſon d'eau douce qu'on vend journellement au marché de Conſtantinople, que le vulgaire nomme *glagnon*, & qui, ſuivant Bélon, eſt le vrai ſilure des Anciens.

Il paroît encore que les Auteurs ont reconnu pluſieurs eſpèces de ſilures; celui que nous décrivons eſt celui d'Artedy, *cirris quatuor in mento*, appendix 110. Ce poiſſon n'ayant

n'ayant été décrit qu'imparfaitement par les Ichtyologistes, & la figure qu'ils en ont donnée étant encore plus incomplète, j'ai cru devoir profiter d'un de ces poissons, envoyé par M. de Regemorte à M. du Hamel, pour le faire dessiner; & comparant ce que les auteurs déjà cités en avoient dit, avec le poisson que j'avois sous les yeux, ajouter ce qui manquoit à leur description & aux gravures qu'ils en ont données *(a)*. Les Anciens ne suivoient aucune méthode, & omettoient de décrire dans les poissons, les parties caractéristiques qui pourroient servir maintenant à faire connoître ceux qu'ils n'ont qu'indiqués. Les Ichtyologistes plus modernes sont, je crois, encore trop concis, & nous laissent des descriptions imparfaites, de sorte qu'en poissons, comme en plantes, nous sommes sujets à séparer des espèces ou variétés, au lieu de les rapporter aux genres & espèces connus: d'ailleurs, la plupart des figures laissées par les Ichtyologistes, sont bien imparfaites; tâchons donc qu'on ne puisse pas nous faire les mêmes reproches.

Suivant Willughby, le shaid ou *silurus* a quelquefois quinze, seize pieds, & beaucoup plus de longueur: on en a vu, d'après les auteurs qui en ont parlé, qui pesoient 80, 120, 150 livres & plus. Il se trouve dans l'Elbe en Hongrie, dans le lac Newsilderfée, dans le Danube, principalement au-dessous d'Offen, à quelque distance de Vienne, en sorte qu'il fournit abondamment le marché de cette capitale; fort rarement en pêche-t-on depuis Offen en remontant vers Vienne: on en trouve aussi dans la Vistule. Gesner dit que quelques lacs de Suisse en fournissoient de son temps, mais on prétend qu'il ne s'y en trouve plus un seul. Il y a aussi en Bavière, un lac où l'on y en prend quelquefois. On en a aussi pêché dans

(a) Depuis la lecture de ce Mémoire à l'Académie, j'ai su que ce poisson étoit décrit dans les Mémoires de l'Académie de Stockolm, *année* 1756, *tab. III, pag.* 34, par M. Osbeck, & dans le douzième volume des Mémoires de l'Académie de Copenhague, *figures* 1 & 2, *page* 132, sous le nom de *Mallen*.

le Rhin en différens temps, & nommément trois vers l'année 1740. Bélon dit qu'on l'apporte à Conſtantinople, des prochains fleuves & des lacs de Macédoine.

Celui que nous avons eu entre les mains (en 1769), & dont nous allons donner la deſcription, venoit de Vienne en Autriche: ſa longueur depuis l'extrémité du muſeau *A*, juſqu'au bout de l'aileron de la queue *B*, étoit de deux pieds & demi; ſa plus grande largeur, très-charnue à l'endroit *(C)* des ouïes ou branchies, étoit de quatre pouces & demi.

La forme de ce poiſſon, conſidérée généralement, va en diminuant avec uniformité depuis les branchies juſqu'à la queue, en s'aplatiſſant un peu ſur les côtés; cet aplatiſſement devient conſidérable à l'endroit où eſt ſitué l'anus, & il continue de même juſqu'à la queue.

On ne trouve d'écailles très-apparentes *(b)* en aucune partie de la peau; elle eſt viſqueuſe & couverte d'une mucoſité, à peu-près comme la peau de l'anguille: cette ſimilitude, plutôt que la forme du corps du poiſſon, a engagé les Ichtyologiſtes à le ranger dans la claſſe des anguilliformes *(de piſcibus anguilliformibus)*. Bélon dit que ſa peau eſt liſſe & polie, ſans écailles comme l'anguille; que par cette raiſon, les Juifs s'en abſtiennent comme nourriture; qu'on ſe ſert de la peau de ce poiſſon pour en couvrir les inſtrumens, comme luth & guitare: cette peau eſt médiocrement épaiſſe, néanmoins plus en certains endroits que dans d'autres; elle revêt en général, ſans diſcontinuité, tout le corps, les ailerons, &c. mais ſa couleur varie. Dans le poiſſon qui nous a ſervi à faire cette deſcription, le corps étoit marbré de taches plus ou moins grandes, & de différentes formes, les unes rouges, les autres bleuâtres, jaunes, pâles ou brunes; le deſſous de la mâchoire & du ventre étoit blanc avec des

(b) Je ne voudrois pas aſſurer ſi avec attention on n'en découvriroit pe comme à l'anguille.

teintes rouges. Willughby ne parle que d'un mélange de sillons noirs & blanchâtres sur le ventre & sur les côtés; les sillons du nôtre étoient peu profonds & tracés sur le dos & les côtés, non sur le ventre, suivant diverses directions, mais toujours de la tête vers l'extrémité opposée, indépendamment des sillons superficiels & parallèles qu'on apercevoit sur le travers du poisson, où ils étoient produits, sur-tout par les appendices latérales de la grande arête.

Gesner, qui distingue plusieurs espèces de ce poisson, y observe des variétés de couleurs encore différentes de celle que nous citons : au reste, on peut dire avec Willughby, qu'il y a beaucoup de poissons dont la couleur varie à raison de l'âge, du sexe, & du lieu où ils vivent; de plus, certaines couleurs s'affoiblissent beaucoup & promptement au sortir de l'eau. La tête est large & aplatie en dessus, à sa partie antérieure, comme on le voit en *E, F, figure 2,* dans ce poisson dont la longueur totale étoit de deux pieds & demi ; le travers de la bouche *E, F,* avoit trois pouces & demi d'un angle à l'autre, & le pourtour de son ouverture presque onze pouces. Les lèvres sont épaisses d'environ deux lignes & demie en tout sens, suivant le contour des mâchoires : l'épaisseur de la partie garnie de dents à chaque mâchoire, est de quatre à cinq lignes, *G, figures 1* & *3;* ces mâchoires forment un demi-ovale, mais celle d'en bas est de trois quarts de pouce plus avancée que l'autre; toutes deux sont divisées au milieu de leur longueur par une symphise *G,* & entièrement garnies d'une multitude de dents courtes, fines, aiguës, fort serrées, & un peu inclinées vers le dedans de la bouche. À peu de distance de la mâchoire supérieure, on trouve au palais une zone de six lignes de largeur, en demi-cercle, formée de pareilles dents, mais qui sont plus courtes. On aperçoit encore au fond du palais de chaque côté, une masse osseuse, arrondie, saillante, longue d'environ un pouce, toute hérissée de dents semblables à celles des mâchoires,

mais bien plus courtes & plus ſerrées; & ſur les mâchoires inférieures, au-deſſous de ces maſſes, ſont deux autres garnitures pareilles qui ont une forme rhomboïdale d'environ un pouce & demi de longueur : toutes ces parties dentées, qu'on peut comparer en quelque ſorte à des limes, ſont d'une couleur jaunâtre qui contraſte ſenſiblement avec le blanc de l'intérieur de la bouche.

Aſſez près du bord de la lèvre ſupérieure, & à un pouce de l'articulation des os de la mâchoire, eſt de chaque côté un filet cartilagineux *H*, ferme, brun, long de ſept pouces, & terminé en pointe fine: la diſſection nous a fait voir que cette eſpèce de mouſtache, dont nous ignorons le vrai uſage, eſt mue par un nerf contigu au nerf optique, & par un muſcle très-fort; qu'elle eſt articulée à ſa baſe avec un nœud oſſeux qui lui donne un mouvement de genou. Benoît-Martin de Berne dit que ces fibres ſont des antennes, & que le poiſſon les projette en avant, comme pour tâter les objets.

En ſuivant le bord de la mâchoire ſupérieure, & avançant vers le milieu, un demi-pouce plus haut que l'inſertion de ces fibres, on aperçoit de chaque côté une petite ouverture *I*, garnie d'un tuyau qui y fait une ſaillie d'environ une ligne de longueur; ce trou communique par un canal intérieur, large & oſſeux, avec une autre ouverture moins apparente faite en fente, placée ſur la même ligne, à un pouce au-deſſus, & qui ne devient bien ſenſible que quand on a ſoulevé la membrane qui la couvre en partie.

Immédiatement derrière les mouſtaches, à un pouce de diſtance, ſont les yeux *K*; ils n'ont que trois lignes d'ouverture, ſont très-peu ſaillans, & revêtus d'une membrane épaiſſe. Deux os embraſſent chaque œil, un de ces os, à peu-près demi-circulaire, aſſez large, contigu au crâne, & ſaillant, en environne la partie antérieure; l'autre lui eſt oppoſé, mais a une forme approchante de celle des ailerons; il eſt étroit, en courbe alongée dans ſa

plus grande largeur, puis il ſe prolonge en ligne droite, & ſe termine en pointe par le haut ; il eſt logé entièrement dans la peau des joues.

Ce que nous appelons *joues*, ſont des parties fort charnues *L, fig. 1*, qui accompagnent l'œil, & dont la poſition ſe termine au bord de l'opercule des ouïes : cet opercule *M*, commençoit à trois pouces & demi de la lèvre ſupérieure dans ce poiſſon, & il avoit en cet endroit une articulation. Depuis-là, toute la largeur de l'opercule, ſur les côtés, n'étoit que d'un pouce & demi ; après avoir fait le tour de la tête, il s'étendoit juſque ſous la gorge, & les deux opercules ſe réuniſſoient en pointe, *N, fig. 4*, à deux pouces du bord antérieur de la lèvre. La partie oſſeuſe formoit tout au plus la moitié de cette largeur, le reſte étoit rempli par une ſubſtance charnue & pliſſée, dans laquelle étoient enclavées & fixées des arêtes fines & oſſeuſes. Sous chaque opercule ſont quatre branchies, dont les os ſont très-forts ; les deux de devant ont chacun, ſur un ſeul rang, une douzaine de petits oſſelets mobiles, pointus, & diſtans les uns des autres. Il y a ſur chacun des deux os poſtérieurs deux rangées parallèles de dents moins conſidérables & plus ſerrées ; ſes filets oſſeux & colorés ne forment qu'un ſeul plan de cinq à ſix lignes de largeur au bord de chaque os ; mais le plan eſt double à la partie poſtérieure.

A la mâchoire inférieure, ſont adhérens quatre filets *O, fig. 1, 3 & 4*, cartilagineux, aſſez mous, blancs avec une légère teinte de rouge, longs d'un pouce & demi ou deux pouces, ſitués à treize ou quatorze lignes du bord de la lèvre, ſuivant aſſez le contour de la mâchoire, & eſpacés entr'eux de treize à quatorze lignes.

Geſner & pluſieurs autres Auteurs diſent que les ſix filets dont nous avons parlé, qui garniſſent la mâchoire ſupérieure & celle inférieure, tombent tous les ans, & qu'ils ſont remplacés par de nouveaux. Sur la même ligne que l'angle de la bouche, à trois pouces & demi en arrière,

ſous le bord de l'opercule des ouïes, eſt une nageoire, *P*, aſſez large, arrondie par le bas, composée de ſeize rayons cartilagineux, dont le plus grand a trois pouces de longueur, & les autres ſont graduellement plus courts, ſelon la forme de l'arrondiſſement qui les termine. Outre ces ſeize rayons, il y en a, ſur le bord antérieur, un autre *Q*, tout-à-fait oſſeux, très-fort, large de quatre lignes à ſa baſe, pointu, long de deux pouces & qui, n'ayant point ſenſiblement d'articulation ſéparée, eſt couvert de la même membrane que les autres rayons. Willughby obſerve, avec Kintmannus, que ce rayon oſſeux ſert d'arme défenſive au shaid, & qu'il eſt denté en ſcie à ſa partie poſtérieure. Nous convenons de cette denture qui n'eſt ſenſible que vers le bas; mais comme le rayon oſſeux eſt couvert de la membrane commune de toute la nageoire, que ſa pointe ſeule l'excède, & qu'il ne paroît pas pouvoir s'alonger, nous ne ſommes pas dans le cas de déterminer en aucune manière l'uſage de cette denture ainſi enfermée de la longueur d'environ un pouce.

Environ à onze pouces du bord antérieur de la mâchoire d'en bas, ſont deux ailerons *R*, preſque contigus, parallèles & entièrement cartilagineux; chacun composé de onze rayons qui ſe terminent en arrondiſſement, & dont le plus long a un pouce & demi. La plus grande largeur de ces ailerons eſt de quinze lignes.

Ils ſont ſitués un pouce en devant de l'anus *D*, au-deſſous duquel commence un grand aileron *SS*, dont les rayons ſont au nombre de quatre-vingt-dix. Il s'étend ſur une longueur d'environ dix-huit pouces, & ſe termine en s'arrondiſſant à-peu-près au milieu *T*, de la longueur de l'aileron de la queue; ſa largeur eſt de douze à treize lignes, & ſon arrondiſſement, à côté de la queue, fait comme un reſſaut bien ſenſible.

L'aileron de la queue *(B)* eſt entier, taillé obliquement, un peu frangé, formé de dix-ſept rayons cartilagineux & ſouples. La membrane qui le couvre eſt plus

épaisse que celle des autres ailerons; elle l'est sur-tout au bord qui est une continuation du dos : comme il y a une coupe inclinée, son angle supérieur est à deux pouces cinq ou six lignes de l'articulation *(V)*, où cet aileron a un pouce & demi de largeur. Gesner paroît douter que cet aileron soit une continuité de celui du ventre. Willughby le nie positivement. A considérer ces deux ailerons en tant que recouverts en effet par une membrane commune, on pourroit n'admettre entr'eux aucune séparation; mais les rayons qui s'articulent au bas de la grande arête, ayant sous cette même membrane une direction qui leur est propre depuis l'endroit où se termine l'arrondissement de l'aileron du ventre; & le concours de ces rayons formant autour du bord inférieur de la grande arête, un aileron comme dans la plupart des autres poissons, il semble qu'on peut très-bien distinguer cet aileron d'avec l'autre.

Sur le dos, à huit pouces du bord antérieur de la mâchoire d'en haut, est un seul aileron *(X)* dont le plus grand diamètre est de six à sept lignes. Il est formé de trois rayons que l'on comprend devoir être écartés les uns des autres pour former cette étendue; le plus grand n'a qu'un pouce de largeur.

On ne trouve pas de langue dans ce poisson. Sur la voûte du palais, est un voile épais & tendineux qui n'a d'attache que par les côtés.

Nous avons dit que les opercules des ouïes alloient se réunir sous le devant de la mâchoire inférieure. Quand on enlève la membrane qui tapisse par en-bas le dedans de la bouche, on trouve, à ce point de leur réunion, une loge charnue, dans laquelle est une oreillette ou aorte considérable, faite en poire, qui précède le cœur. Ce muscle n'est pas échancré, il a une forme à peu-près prismatique, foiblement convexe en dessous, terminé en pointe par le bas, & taillé assez carrément à son extrémité

ſupérieure qui ne communique avec l'aorte que par un tuyau menu & court.

L'eſtomac commence au fond de la gorge; il eſt très-épais, long d'environ ſix pouces, large de trois pouces à ſon orifice ſupérieur, arrondi & un peu plus étroit par le fond. Le pylore ou orifice inférieur eſt ſitué plus bas que la moitié de la longueur totale : ce viſcère, liſſe & veiné par dehors, eſt intérieurement garni de rugoſités plus ou moins conſidérables, très-nombreuſes, & qui s'étendent en long ſur divers ſens, de manière qu'on aperçoit ſouvent une communication entr'elles.

Sur ce viſcère, eſt placé le foie diviſé en deux lobes conſidérables & inégaux, au milieu deſquels on trouve une petite veſſie qui contient du fiel, couleur de ſouci. La veſſie d'air eſt blanche, enveloppée d'une membrane brune & mince qui tient à la grande arête; mais on les ſépare auſſi facilement l'une de l'autre que le gant d'avec la main : cette veſſie eſt d'une ſubſtance forte & tendineuſe, longue d'environ ſix pouces, large de trois dans ſa partie moyenne, arrondie en bourſe ou ſac par le bas; telle étoit au moins celle de notre shaid. Nous n'y avons point vu cette diminution inſenſible en pointe, que Willughby attribue à cette veſſie, elle eſt ſéparée intérieurement de haut en bas par une forte cloiſon dont le bas ſe courbe en arc, & qui intercepte toute communication entre les deux loges.

Ce poiſſon n'a qu'une arête; elle règne depuis la tête juſqu'à la queue; ſes vertèbres ne ſont pas couvertes de mucilage comme celles de l'anguille, à la claſſe de laquelle Willughby rapporte le shaid; leurs apophyſes ou arêtes latérales ſont rangées parallèlement des deux côtés, aſſez droites, eſpacées à une ligne ou un peu plus. Il n'y a point de côtes courbes qui ſe prolongent pour enfermer les viſcères. Les apophyſes de ce côté-là ſont ſeulement plus courtes dans l'eſpace qu'occupent les viſcères ; auſſi le ventre s'affaiſſe-t-il ſur lui-même, faute de ſoutien, dès qu'on

qu'on l'a vidé. Les œufs du shaid, que nous avons eus à la mi-Février, étoient très-menus, & rassemblés en deux masses ovales terminées en pointe, longues de presque trois pouces sur un pouce de largeur.

Nous ne décrirons pas l'organe de l'ouïe de ce poisson; il nous suffira de dire qu'à l'extrémité du crâne, & près de la naissance des vertèbres, on trouve une loge à peu-près aussi longue que large, qui renferme un mucilage, dans lequel sont contenus séparément, l'un à droite, l'autre à gauche, deux osselets très-secs, nus, fort blancs, dont la forme approche de l'ovale, longs d'environ une ligne & demie, plats sur leurs surfaces; mais il y en a une chargée d'un pareil os bombé, plus petit, moins blanc, & qui s'en détache par le moindre choc.

Ce poisson passe pour être des plus voraces, & en conséquence à redouter parmi les autres poissons.

On le range au nombre des mets délicats. Le foie en est bon, les œufs ont une saveur fine, la peau qui est grasse a un mérite particulier.

Nous l'avons mangé au bleu, suivant l'avis des connoisseurs qui nous l'avoient envoyé, mais une sauce un peu relevée lui auroit servi de meilleur assaisonnement; aussi Willughby dit-il qu'on peut l'apprêter de toutes les mêmes manières que l'anguille.

Nous avons déjà prévenu qu'il y avoit plusieurs espèces de Silure, & Gesner dit qu'il existe un poisson, connu sous le nom de *blax*, qui lui ressemble assez par la forme, mais qui est d'un si mauvais goût que les chiens ne veulent pas même en manger.

Tous les Auteurs s'accordent à donner une dimension & une pesanteur considérables à certains de ces poissons; c'est pour cela qu'on ne peut les vendre au marché qu'en les coupant par tranches ou morceaux: Gesner dit que le milieu du corps doit être préféré au reste, comme étant plus ferme & moins fade.

Nous avons cité beaucoup d'endroits où l'on trouvoit

le shaid; il ſemble qu'il eſt devenu beaucoup plus rare qu'il ne l'étoit autrefois.

Le ſieur Diers, pêcheur diſtingué de Straſbourg, ayant entendu parler de ce poiſſon par ſon père, pêcheur comme lui, entreprit le voyage de Hongrie; & après avoir pris des inſtructions des Hongrois, il raſſembla quatre cents shaids de toutes grandeurs, convenables au tranſport, & les conduiſit, dans une baſcule, depuis Offen juſqu'à Ulen. Il les mit dans des tonneaux pour les mener par terre à Straſbourg. Aucun de ces poiſſons ne périt dans la baſcule; mais une douzaine des plus petits ne purent ſoutenir le charroi de terre. Depuis cette tentative, le même ſieur Diers entreprit de faire venir un ſecond convoi à-peu-près du même nombre, & de le faire arriver directement par terre, il a encore réuſſi; mais il a eu environ un tiers de perte, dont l'objet, du côté de l'intérêt, a été compenſé par la précaution de vendre en route ceux des poiſſons qu'il voyoit foiblir.

Dans les deux convois, ceux qui ſont arrivés à Straſbourg, ſe ſont très-bien ſoutenus, à la reſerve de cinq à ſix ſur chaque cent, & ont été vendus chèrement.

Le ſieur Diers avoit combiné la marche & les ſéjours; il les nourriſſoit de ces petits poiſſons communs auſſi dans la rivière de Seine, qu'on nomme *ables* ou *ablettes*, & dont on retire l'écaille qui recouvre la peau, pour en former la nacre des perles fauſſes. Il trouvoit à point nommé ou de ces ables, ou des petits poiſſons blancs pour la nourriture de ſes shaids, & des baſcules dans leſquelles il donnoit, en pleine eau, un jour de repos à ſon poiſſon après deux jours de marche. À Straſbourg, dans les baſcules, le ſieur Diers les nourriſſoit avec des ables écaillés, qui forment un commerce d'induſtrie pour ce pêcheur, qui, d'après ce qu'il a vu dans un de ſes voyages à Paris, a reconnu qu'il pouvoit trouver abondamment en Alſace, ce petit poiſſon propre à la fabrique des fauſſes perles; & il a établi une manufacture ou un dépôt de ces écailles

qu'il envoie à Paris, tandis que ſes shaids & ſes brochets mangent les poiſſons qui les ont fournies.

Je dois terminer cette deſcription, en ajoutant qu'un fond limoneux paroît mieux convenir à ce poiſſon que celui ſableux, & qu'il paſſe pour certain qu'il ne s'eſt jamais multiplié dans quelque lieu qu'il ait été tranſporté. Cependant le ſieur Diers ne déſeſpère pas, en lui trouvant une eau tranquille, & l'y laiſſant en liberté, de l'y voir frayer, & de réuſſir à le multiplier.

Ce poiſſon groſſit beaucoup & promptement, même dans les baſcules. On a reconnu qu'en neuf mois, ceux peſant dix-huit livres, en peſoient vingt-ſix; ceux d'une livre ont peſé trois livres après un an de ſéjour dans les baſcules. On a cru à propos de les tranſporter vivans pendant les chaleurs, c'eſt au mois de Juillet que le ſieur Diers les a fait voyager.

J'ai donné, d'après les Auteurs, 150, même 200 livres, comme l'excédant de peſanteur auquel peut parvenir ce poiſſon. Je dois cependant ajouter que la perſonne qui a fait, en Hongrie, l'acquiſition des shaids pour le ſieur Diers, aſſure qu'il s'y en trouve qui pèſent juſqu'à quatre cents livres, qu'on les coupe comme de la viande, & qn'on les vend par livre au marché.

EXPLICATION *de la Planche repréſentant un Shaid, eſpèce de ſilure.*

Fig. 1. Le poiſſon, vu de côté, & ſuivant ſa longueur.
A; muſeau.
B, la queue.
C, l'ouïe.
D, l'anus.
L, parties charnues auxquelles nous avons donné le nom de *joues*.
M, origine des opercules.
P, nageoire brachiale.
Q, rayon de cette nageoire, qui eſt oſſeux.

R, ailerons ventrals.

S, grand aileron qui prend depuis l'anus, & se prolonge jusqu'à l'aileron de la queue.

T, aileron de la queue.

V, articulation de cet aileron de la queue.

X, seul aileron du dos.

Fig. 2. *E E,* éminences charnues, que nous avons nommées *joues.*

F F, ouverture des mâchoires.

I, petite ouverture garnie d'un tuyau.

K, les yeux.

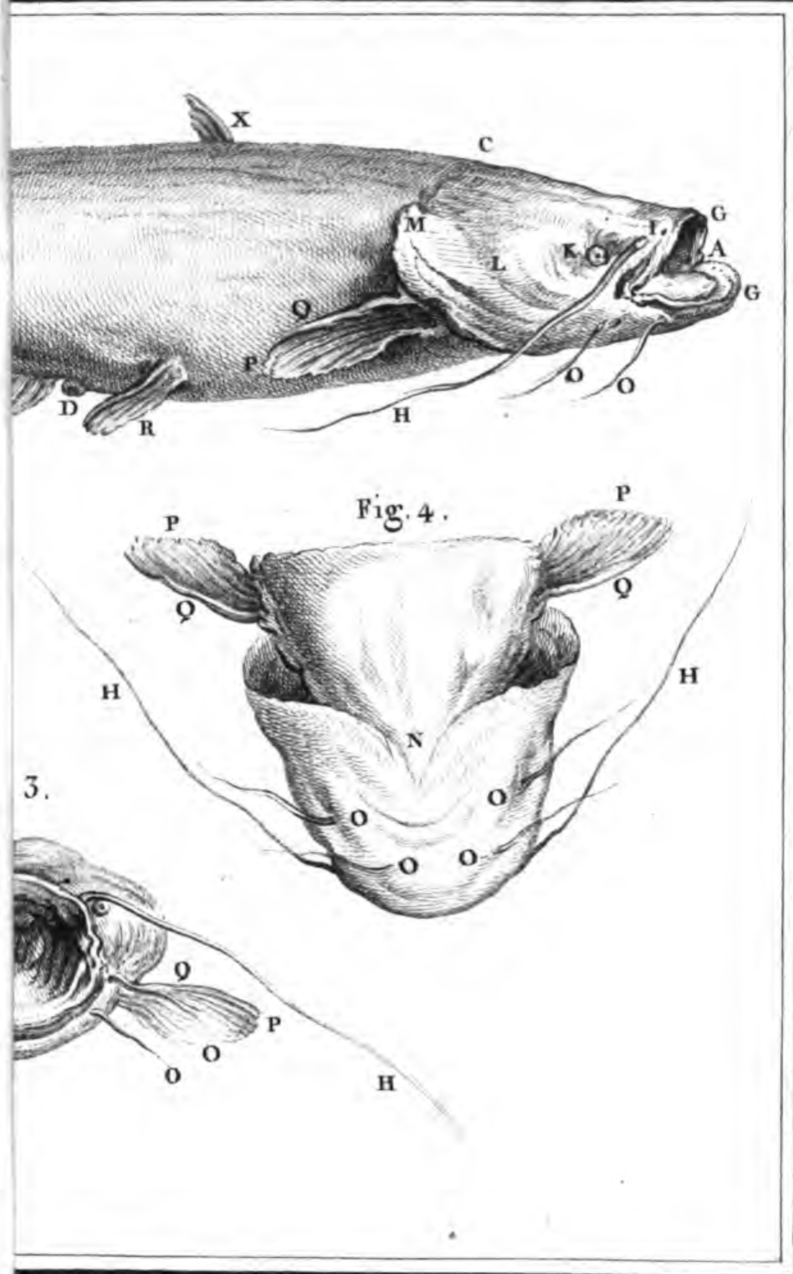
Fig. 3. *G,* lèvres qui bordent les mâchoires.

H, filet cartilagineux au bord de la lèvre supérieure, à un pouce de l'articulation des os de la mâchoire.

Fig. 4. *N,* réunion des opercules.

O, quatre filets cartilagineux & mous.





Y. le Gonaz sculp.

RECHERCHES THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTALES

Sur la force de torsion, & sur l'élasticité des fils de métal : Application de cette théorie à l'emploi des métaux dans les Arts & dans différentes expériences de Physique : Construction de différentes balances de torsion, pour mesurer les plus petits degrés de force. Observations sur les loix de l'élasticité & de la cohérence.

Par M. COULOMB.

I.

CE Mémoire a deux objets ; le premier, de déterminer la force élastique de torsion des fils de fer & de laiton, relativement à leur longueur, à leur grosseur, & à leur degré de tension. J'avois déjà eu besoin, dans un Mémoire sur les Aiguilles aimantées, imprimé dans le *neuvième volume des Savans étrangers*, de déterminer la force de torsion des cheveux & des soies ; mais je ne m'étois point occupé des fils de métal, parce que l'objet utile à mes recherches, n'étoit pour lors que de choisir, à forces égales, les suspensions les plus flexibles, & que j'avois trouvé que les fils de soie avoient incomparablement plus de flexibilité que les fils de métal. Le second objet de ce Mémoire, est d'évaluer l'imperfection de la réaction élastique des fils de métal, & d'examiner quelles sont les conséquences que l'on en peut tirer, relativement aux loix de la cohérence & de l'élasticité des corps.

Lû en 1784.

I I.

La méthode pour déterminer la force de torſion, d'après l'expérience, conſiſte à ſuſpendre par un fil de métal, un poids cylindrique, de manière que ſon axe ſoit vertical ou dans la direction du fil de ſuſpenſion. Tant que le fil de ſuſpenſion ne ſera point tordu, le poids reſtera en repos; mais ſi l'on fait tourner ce poids autour de ſon axe, le fil ſe tordra, & fera effort pour ſe rétablir dans ſa ſituation naturelle; ſi pour lors l'on abandonne le poids, il oſcillera plus ou moins de temps, ſuivant que la réaction élaſtique de torſion ſera plus ou moins parfaite. Si dans ce genre d'expérience, l'on obſerve avec ſoin la durée d'un certain nombre d'oſcillations, il ſera facile de déterminer, par les formules du mouvement oſcillatoire, la force de réaction de torſion qui produit ces oſcillations. Ainſi, en faiſant varier la peſanteur du poids ſuſpendu, la longueur des fils de ſuſpenſion, & leur groſſeur, l'on peut eſpérer de déterminer les loix de la réaction de torſion, relativement à la tenſion, à la longueur, à la groſſeur, & à la nature de ces fils.

I I I.

Si le fil de métal étoit parfaitement élaſtique, ſi la réſiſtance de l'air n'altéroit pas l'amplitude des oſcillations, le poids ſoutenu par le fil de métal, une fois en mouvement, oſcilleroit juſqu'à ce qu'on l'arrêtât. La diminution des amplitudes des oſcillations ne peut donc être attribuée qu'à la réſiſtance de l'air, & qu'à l'imperfection de l'élaſticité de torſion; ainſi, en obſervant la diminution ſucceſſive de l'amplitude de chaque oſcillation, & en retranchant la partie de l'altération qu'il faut attribuer à la réſiſtance de l'air, l'on pourra, au moyen des formules du mouvement oſcillatoire, appliquées à ces expériences, déterminer ſuivant quelles loix cette force élaſtique de torſion eſt altérée.

IV.

Ce Mémoire ſera diviſé en deux ſections; dans la première, l'on déterminera la loi des forces de torſion, en ſuppoſant les forces de torſion proportionnelles à l'angle de torſion, ſuppoſition conforme à l'expérience, lorſque l'on ne donne pas une trop grande amplitude à l'angle de torſion: l'on donnera quelques applications de cette théorie à la pratique.

Dans la ſeconde ſection, l'on cherchera, par l'expérience, ſuivant quelles loix la force élaſtique de torſion eſt altérée dans les grandes oſcillations: l'on fera uſage de cette recherche pour déterminer les loix de la cohérence & de l'élaſticité des métaux & de tous les corps ſolides.

V.

SECTION PREMIÈRE.

Formules du mouvement oſcillatoire, en ſuppoſant la réaction de la force de torſion proportionnelle à l'angle de torſion, ou altérée par un terme très-petit.

Un corps cylindrique B (*fig. I, n.° 1*) eſt ſoutenu par un fil RC, de manière que l'axe du cylindre eſt vertical, ou ſe trouve dans la prolongation du fil de ſuſpenſion; l'on fait tourner ce cylindre autour de ſon axe, ſans déranger cet axe de ſon à-plomb: il faut déterminer, dans la ſuppoſition des forces de torſion proportionnelles à l'angle de torſion, les formules du mouvement oſcillatoire.

Le *n.° 2, fig. I,* repréſente une ſection horizontale du cylindre; tous les élémens du cylindre ſont projetés ſur cette ſection circulaire en π, π', π'', &c. l'on ſuppoſe que l'angle primitif de torſion ſoit $ACM = A$, & qu'après le temps t, cet angle ſoit ACm, ou qu'il ſoit diminué de l'angle $MCm = S$, en ſorte que $ACm = (A - S)$.

Puiſque l'on ſuppoſe la force de torſion proportionnelle à l'angle de torſion, le *momentum* de cette force ſera

représenté par $n(A - S)$, n étant un coëfficient constant, dont la valeur dépendra de la nature du fil de métal, de sa longueur & de sa grosseur. Si l'on nomme v la vîtesse d'un point quelconque π, au bout du temps t, lorsque l'angle de torsion est ACm, l'on aura, par les principes de Dinamique,

$$n(A - S)\,dt = \int \pi r dv,$$

où r est la distance $C\pi$ du point π à l'axe de rotation G.

Mais si le rayon CA' du poids cylindrique $= a$, & que la vîtesse d'un point A' de la circonférence du cylindre, soit au bout du temps t, représentée par u, l'on aura $v = \frac{ru}{a}$; d'où résulte

$$n(A - S)\,dt = du \int \frac{\pi r^2}{a};$$

& comme $dt = \frac{adS}{u}$, l'on aura pour l'équation intégrée

$$n(2AS - SS) = uu \int \frac{\pi r^2}{a^2},$$

d'où l'on tire

$$dt = \frac{dS \int (\pi r^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(n)}\sqrt{(2AS - SS)}}.$$

Mais $\frac{dS}{\sqrt{(2AS - SS)}}$ représente un angle dont A est le rayon & S le sinus verse, qui s'évanouit lorsque $S = 0$, & qui devient égal à 90 degrés lorsque $S = A$.

Ainsi le temps d'une oscillation entière sera

$$T = \left(\int \frac{\pi r^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} 180^d.$$

VI.

POUR comparer la force de torsion avec la force de la gravité dans un pendule, il faut se ressouvenir que dans le

le pendule, le temps T d'une oſcillation entière

$$= \left(\frac{\lambda}{g}\right)^{\frac{1}{2}} 180^d,$$

où λ eſt la longueur du pendule, & g la force de gravité. Ainſi un pendule iſochrone aux oſcillations du cylindre, donne

$$\int \frac{\pi r^2}{n} = \frac{\lambda}{g};$$

de cette formule, l'on tirera facilement la valeur de n, d'après l'expérience, puiſque les dimenſions du cylindre ou du poids ſont données, ainſi que le temps d'une oſcillation qui détermine la valeur λ.

Si l'on vouloit enſuite chercher un poids Q, qui, agiſſant à l'extrémité du levier b, eût un *momentum* égal au *momentum* de la force de torſion, lorſque l'angle de torſion eſt $(A - S)$, il faudroit faire $Q\,b = n\,(A - S)$.

VII.

Il faut actuellement chercher, pour un cylindre, la valeur de $\int \pi r^3$, que l'on trouvera égale à $\frac{\varphi \delta L . a^4}{4}$, où φ eſt le rapport de la circonférence au rayon, δ eſt la denſité du cylindre & a ſon rayon. Mais comme la maſſe M du cylindre $= \frac{\varphi \delta L a^2}{2}$, l'on a $\int \pi r^3 = \frac{M a^2}{2}$, & conſéquemment $T = \left(\frac{M a^2}{2 n}\right)^{\frac{1}{2}} 180^d$: en comparant, comme à l'*article précédent*, avec le pendule iſochrone, il en réſulte $\frac{\lambda}{g} = \frac{M a^2}{2 n}$, & comme $g\,M$ eſt le poids P du cylindre, nous aurons $n = \frac{P a^2}{2 \lambda}$; ce qui donne une formule très-ſimple pour déterminer n d'après l'expérience.

VIII.

Si la force de torsion, que nous avons supposée $n(A - S)$, étoit altérée par une quantité R, la formule du mouvement oscillatoire donneroit pour lors

$$[n(A - S) - R]\,\partial t = \partial u \int \frac{\pi r^2}{a};$$

& mettant comme plus haut, à la place de ∂t, sa valeur $\frac{a\,dS}{u}$, l'on a pour l'intégration

$$n(2AS - SS) - 2\int R\,dS = uu\int \frac{\pi r^2}{aa}.$$

Si l'on veut étendre cette intégration à une oscillation entière, il faut la diviser en deux parties, la première depuis M jusqu'en A, où la force de torsion accélère la vîtesse u, tandis que la force retardatrice la diminue; la deuxième depuis A jusqu'en M, où toutes les forces concourent à retarder le mouvement.

Exemple I.er Supposons $R = \mu(A - S)^m$, l'on aura, pour l'état de mouvement dans la première portion MA,

$$n(2AS - SS) + \frac{2\mu(A-S)^{m+1}}{m+1} - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1} = uu\int \frac{\pi r^2}{aa};$$

ainsi, lorsque l'angle de torsion sera nul, ou que $(A - S) = 0$, l'on aura

$$nA^2 - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1} = UU\int \frac{\pi r^2}{aa};$$

Considérons actuellement l'autre partie du mouvement depuis A jusqu'en M', & supposons l'angle $AGm' = S'$, nous trouverons, en nommant U la vîtesse au point A;

$$\frac{nS'^2}{2} + \frac{\mu S'^{m+1}}{m+1} = \frac{UU - uu}{2}\int \frac{\pi r^2}{aa}.$$

Substituant à la place de U^2 sa valeur

$$\left(\frac{n A^2 - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1}}{\int \frac{\pi r^2}{a^2}}\right),$$

l'on aura pour l'intégration totale, lorsque la vîtesse deviendra nulle, ou lorsque l'oscillation sera achevée,

$$(A - S') = \frac{2\mu}{n(m+1)} \cdot \frac{(A^{m+1} + S'^{m+1})}{A + S'};$$

& si les forces retardatrices sont telles qu'à chaque oscillation, l'amplitude soit peu diminuée, l'on aura, pour valeur très-approchée de $(A - S')$,

$$(A - S') = \frac{2\mu A^m}{n(m+1)};$$

& si cette quantité $(A - S')$ étoit assez petite pour être traitée comme une différentielle ordinaire, l'on auroit pour lors, pour un nombre Z d'oscillations,

$$\frac{2\mu}{n(m+1)} Z = \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{S^{m-1}} - \frac{1}{A^{m-1}}\right),$$

où S représente ce que devient A après un nombre d'oscillations Z. Ainsi l'on aura

$$S = \frac{1}{\left[\frac{2\mu . m-1}{n(m+1)} Z + \frac{1}{A^{m-1}}\right]^{\frac{1}{m-1}}},$$

qui détermine la valeur de S, après un nombre quelconque Z d'oscillations.

EXEMPLE II. Si

$$R = \mu (A - S)^m + \mu' (A - S)^{m'},$$

μ' & m' ayant d'autres valeurs que μ & m, l'on aura, en suivant le procédé du dernier exemple,

$$n(A - S) = \frac{2\mu}{m+1}\left(\frac{A^{m+1} + S^{m+1}}{A + S}\right) + \frac{2\mu'}{m'+1}\left(\frac{A^{m'+1} + S^{m'+1}}{A + S}\right);$$

& si la force retardatrice est beaucoup moindre que la force de torsion, l'on aura pour valeur approchée,

$$n(A - S) = 2\mu \frac{A^m}{m+1} + \frac{2\mu' A^{m'}}{m'+1}.$$

En général, si

$$R = \mu(A-S)^m + \mu'(A-S)^{m'} + \mu''(A-S)^{m''} + \&c.$$

l'on aura toujours pour une oscillation, en supposant R beaucoup plus petit que la force de torsion,

$$n(A - S) = \frac{2\mu A^m}{m+1} + \frac{2\mu' A^{m'}}{m'+1} + \frac{2\mu'' A^{m''}}{m''+1} + \&c.$$

IX.

Expériences pour déterminer les loix de la force de torsion.

Préparation.

SUR une petite planche KA, soutenue par quatre pieds, s'élève une potence ABD: le poteau montant AB, a quatre pieds de hauteur, la traverse horizontale DE, glisse le long du montant, & se fixe au moyen d'une vis E: le cylindre ou le poids P, porte dans sa partie supérieure, dans la prolongation de son axe, un bout d'aiguille b, fixée à ce cylindre. Cette aiguille est saisie par la partie inférieure d'une double pince a, qui se serre par des vis; la partie supérieure de cette pince saisit l'extrémité inférieure du fil de suspension; la partie inférieure de cette même pince saisit l'extrémité de l'aiguille fixée au cylindre. L'extrémité supérieure du fil de suspension est prise par une autre pince g, attachée à la traverse DE. Sur la planche AK, qui sert de base à l'appareil, l'on pose un cercle divisé en degrés, dont le centre C doit être placé dans la prolongation de l'axe du cylindre: l'on attache au-dessous du cylindre un index eo, dont l'extrémité o réponde aux divisions du cercle.

X.

Expériences sur la torsion des fils de fer.

J'AI pris trois fils de clavecin, tels qu'on les trouve répandus dans le commerce, roulés sur des bobines, & numérotés.

Le fil de fer, *n.° 12*, supporte, avant de se rompre, 3 livres 12 onces; les six pieds de longueur pèsent 5 grains.

Le fil de fer, *n.° 7*, supporte, avant de se rompre, un poids de 10 livres; les six pieds de longueur pèsent 14 grains.

Le fil de fer, *n.° 1*, casse sous une tension de 33 livres; les six pieds de longueur pèsent 56 grains.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 12, *le cylindre pesant une demi-livre.*

L'ON a pris un cylindre de plomb pesant une demi-livre, que l'on a suspendu au fil de fer, *n.° 12;* ce cylindre avoit 19 lignes de diamètre & 6 lignes $\frac{1}{2}$ de hauteur; le fil de suspension avoit 9 lignes de longueur. L'on a fait tourner le cylindre autour de son axe, sans déranger cet axe de son à-plomb, & l'on a eu les résultats suivans:

Premier essai. Lorsque l'on fait tourner le cylindre autour de son axe, d'un angle plus petit que 180 degrés, il fait vingt oscillations sensiblement isochrones en... 120″.

Deuxième essai. Mais en tordant de trois cercles, les dix premières oscillations ont été de 2 à 3 secondes plus longues que les dix premières; & après les dix premières oscillations, l'amplitude des oscillations, qui étoit d'abord de trois cercles, se trouvoit réduite à cinq quarts de cercle.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 12, *cylindre pesant 2 livres.*

Premier essai. En suspendant au même fil de fer, *n.° 12,*

un cylindre qui pesoit 2 livres, ayant le même diamètre que le précédent, mais 26 lignes de hauteur, l'on a eu, pour un angle de torsion de 180 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en... 242".

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 7, *cylindre pesant une demi-livre.*

Premier essai. En suspendant au fil de fer, *n.° 7*, le cylindre d'une demi-livre, l'on a eu, pour une torsion de 180 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en.................... 42"

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 7, *cylindre pesant 2 livres*

Essai. En suspendant au même fil un poids de 2 livres, les vingt oscillations ont été achevées en...... 85"

CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 1, *cylindre pesant une demi-livre.*

Essai. Lorsque l'on suspend à ce fil de fer de 9 pouces de longueur, un poids de demi-livre, sa roideur est si considérable, que ce poids n'est pas suffisant pour le redresser; en sorte que les oscillations sont très-irrégulières, parce qu'elles dépendent, non-seulement de l'angle de torsion, mais encore de la courbure que le fil de fer conserve en sortant de dessus la bobine, quoiqu'il soit tendu par un poids de demi-livre.

SIXIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer n.° 1, *cylindre pesant 2 livres.*

Essai. Mais en suspendant à ce fil de fer de 9 pouces de longueur, un poids de deux livres, le fil est sensi-

blement redressé, & l'on a, pour un angle de torsion de 45 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en . . . . 23″.

Continuation des Expériences.

Fils de laiton.

L'on a pris trois fils de laiton, correspondans par le numéro & à peu-près par la grosseur, aux trois fils de fer que l'on vient de soumettre aux expériences.

Le fil de laiton, *n.° 12,* portoit, au moment de sa rupture, 2 livres 3 onces: les six pieds de longueur pèsent 5 grains.

Le fil de laiton, *n.° 7,* portoit, au moment de sa rupture, 14 livres: les six pieds de longueur pèsent 18 grains $\frac{3}{5}$.

Le fil de laiton, *n.° 1,* casse sous une tension de 22 livres: les six pieds de longueur pèsent 66 grains.

SEPTIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton n.° 12, *cylindre pesant une demi-livre.*

Essai. La longueur du fil de suspension étoit de 9 pouces, comme dans les expériences qui précèdent; l'on y a suspendu le cylindre pesant une demi-livre, & l'on a eu pour un angle de torsion de 360 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en . . . . 220″.

Mais avec un angle primitif de trois cercles de torsion, les vingt premières oscillations ont duré 225 secondes; & après ces vingt premières oscillations, l'angle de torsion étoit encore de deux cercles à peu-près.

HUITIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 12, *cylindre pesant deux livres.*

Essai. Le fil de suspension étant de 9 pouces, & le cylindre pesant 2 livres, l'on a eu pour un angle de 360 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement

isochrones en . . . . 442".

Avec un angle primitif de trois cercles de torsion, les vingt premières oscillations ont duré à peu-près 444 secondes, & l'angle primitif de torsion s'est trouvé réduit à deux cercles un quart.

NEUVIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 7, *cylindre pesant une demi-livre.*

Essai. La longueur du fil de suspension toujours de 9 pouces, l'angle primitif de torsion étant de 360 degrés & au-dessous, l'on a eu vingt oscillations sensiblement isochrones en . . . . 57".

DIXIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 7, *cylindre pesant 2 livres.*

Essai. La longueur du fil de suspension toujours de 9 pouces, l'angle primitif de torsion étant de 360 degrés & au-dessous, l'on a eu vingt oscillations sensiblement isochrones en . . . . 110".

Mais l'angle primitif de torsion étant de deux circonférences de cercle, l'on a eu les vingt premières oscillations en 111 secondes, & l'angle primitif de torsion qui étoit de deux circonférences, s'est trouvé réduit à une circonférence & demie.

ONZIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 1, *cylindre pesant une demi-livre.*

Essai. Sous une tension d'une demi-livre, le fil de suspension n'est pas entièrement redressé, & le temps des oscillations, dépendant en partie de sa courbure primitive, est incertain.

DOUZIÈME

DOUZIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 1, *cylindre pesant 2 livres.*

Essai. La longueur du fil de suspension toujours de 9 pouces, l'angle primitif de torsion étant de 50 degrés & au-dessous, l'on a eu vingt oscillations sensiblement isochrones en . . . . 32″.

Mais l'angle primitif de torsion étant de cinq quarts de cercle, l'on a eu les vingt premières oscillations en 33 secondes $\frac{1}{2}$; & au bout de ces oscillations, l'angle primitif étoit réduit à un quart de cercle.

TREIZIÈME EXPÉRIENCE

Fil de laiton, n.° 7, *cylindre pesant 2 livres.*

Essai. La longueur des fils de suspension dans toutes les expériences précédentes, étoit de 9 pouces: comme l'on avoit besoin de déterminer la force de torsion, relativement à la longueur des fils, l'on a donné 36 pouces de longueur à la suspension de cette expérience, & l'on a eu jusqu'à trois cercles de torsion & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en . . . . 222″.

X I.

Résultat des Expériences qui précèdent.

La force ou la réaction de la torsion des fils de métal, doit être relative à leur longueur, à leur grosseur, à leur tension. Ainsi, pour pouvoir déterminer généralement la loi de cette réaction, nous avons été obligés, dans les expériences qui précèdent, de suspendre différens poids à des fils de fer & de laiton, de grosseur & de longueur différentes: voici les résultats que ces expériences présentent.

Si l'on fait tourner autour de son axe le cylindre, sans

peu la force de torsion. L'on sent en effet qu'à mesure que la tension augmente, le fil s'alonge, son diamètre diminue, ce qui doit ralentir la durée des oscillations.

Nous n'avons pas pu comparer les fils de fer ou de laiton, *n.° 1*, sous les tensions d'une demi-livre & de deux livres, parce que, comme nous l'avons dit dans le détail des Expériences, la tension d'une demi-livre n'est pas suffisante pour redresser ces fils.

X I I.

De la force de torsion relativement aux longueurs des fils.

Nous venons de trouver, dans l'article qui précède, que le plus ou moins de tension des fils n'influoit que d'une manière insensible sur la force de torsion. Nous allons actuellement chercher, d'après les mêmes expériences, de combien, à angle égal de torsion, la longueur du fil de suspension augmente ou diminue cette force. Mais il est clair qu'à mesure que l'on augmente la longueur du fil de métal, l'on peut faire faire, dans la même proportion, un plus grand nombre de révolutions au cylindre, sans changer le degré de torsion; ainsi, la force de réaction de torsion doit être, pour un même nombre de révolutions, en raison inverse de la longueur du fil. Voyons si ce raisonnement s'accorde avec l'expérience.

La formule, de l'*article VII*, nous donne

$$T = \left(\frac{M a^2}{2 n}\right)^{\frac{1}{2}} . \ 180 \text{ degrés},$$

ou pour le même poids T proportionnel à $\frac{1}{(\sqrt{n})}$. Ainsi, si n est en raison inverse des longueurs, comme la théorie l'annonce, T sera comme les racines des longueurs des fils de suspension: comparons avec l'expérience.

Nous trouvons, *dixième expérience*, que le fil de laiton, *n.° 7*, de 9 pouces de longueur, étant tendu par le poids d'une demi-livre, fait 20 oscillations en....... 110".

Nous trouvons, *treizième expérience*, que le même fil de laiton, *n.° 7*, de 36 pouces de longueur, tendu par le poids de 2 livres, fait 20 oscillations en...... 222".

Ainsi les longueurs des fils sont entr'eux : : 1 : 4, tandis que les temps des oscillations des fils sont : : 1 : 2; ainsi l'expérience prouve que les temps d'un même nombre d'oscillations, sont, pour les mêmes fils tendus par les mêmes poids, comme la racine des longueurs de ces fils, ainsi que la théorie l'avoit annoncé.

Nous avons fait beaucoup d'expériences du même genre que les précédentes, qui ont toutes très-exactement confirmé cette loi. Nous n'avons pas cru nécessaire d'en grossir ce Mémoire.

XIII.

De la force de torsion relativement à la grosseur des fils.

Nous venons de déterminer les loix de la force de torsion relativement à la tension & à la longueur des fils; il ne nous reste qu'à les déterminer relativement à la grosseur des mêmes fils.

Nous avons, dans les six premières expériences, trois fils de fer de différentes grosseurs & de même longueur; & dans les six expériences suivantes, trois fils de laiton de même longueur & de grosseurs différentes: mais comme nous avons le poids d'une longueur de 6 pieds de chacun de ces fils, il est facile d'en conclure le rapport de leur diamètre. Voici ce que le raisonnement doit faire prévoir; le *momentum* de la réaction de torsion doit augmenter, avec la grosseur des fils, de trois manières. Prenons pour exemple deux fils de même nature & de même longueur, que le diamètre de l'un soit double de celui de l'autre, il est clair que dans celui qui a un diamètre double, il y a quatre fois plus de parties tendues par la torsion, que dans celui qui a un diamètre simple; & que l'extension moyenne de toutes ces parties sera proportionnelle au diamètre du fil, de même

que le bras moyen du levier relativement à l'axe de rotation. Ainsi nous sommes portés à croire, d'après la théorie, que la force de torsion de deux fils de métal, de la même nature, de la même longueur, mais d'une grosseur différente, est proportionnelle à la quatrième puissance de leur diamètre, ou pour une même longueur au carré de leur poids. Comparons avec l'expérience.

Nous ne prendrons ici que les expériences où la tension est de 2 livres, pour pouvoir comparer tous les *n.*^os, les fils du *n.*° 1 n'étant pas assez exactement tendus par le poids d'une demi-livre : nous avons

Fils de fer.

Deuxième expérience. Le fil de fer, *n.*° *12*, dont les 6 pieds de longueur pèsent 5 grains, donne 20 oscillations en. . . . . 242".

Quatrième expérience. Le fil de fer, *n.*° *7*, dont les 6 pieds de longueur pèsent 14 grains, donne 20 oscillations en. . . . . 85".

Sixième expérience. Le fil de fer, *n.*° *1*, dont les 6 pieds pèsent 56 grains, donne 20 oscillations en. . . 23".

Fils de laiton.

Huitième expérience. Le fil de laiton, *n.*° *12*, dont les 6 pieds pèsent 5 grains, a donné 20 oscillations en. . . 442".

Dixième expérience. Le fil de laiton, *n.*° *7*, dont les 6 pieds pèsent 18 grains $\frac{1}{2}$, donne 20 oscilliations en.. 110".

Douzième expérience. Le fil de laiton, *n.*° *1*, dont les 6 pieds pèsent 66 grains, donne 20 oscillations en... 32".

Pour déterminer, d'après ces expériences, la loi de la réaction de la force de torsion, relativement au diamètre du fil de suspension, supposons que

$$T : T' :: D^m : D'^m :: \varphi^{\frac{m}{2}} : \varphi'^{\frac{m'}{2}},$$

où l'on suppose que T & T' représentent le temps d'un certain nombre d'oscillations pour un fil de métal, dont le diamètre est D & D', & le poids pour une même longueur

φ & φ'; m étant la puiſſance que l'on cherche à déterminer. De cette proportion, nous tirerons

$$m = \frac{2 (\log. T - \log. T')}{\log. \varphi - \log. \varphi'},$$

formule qu'il faut comparer avec l'expérience.

La *deuxième expérience*, comparée avec la *quatrième*, donne... $m = - 1,82$.
La *deuxième expérience*, comparée avec la *ſixième*........ $m = - 1,95$.
La *huitième expérience*, comparée avec la *dixième*........ $m = - 2,04$.
La *huitième expérience*, comparée avec la *douzième*....... $m = - 2,02$.

D'où il réſulte que

$$T : T' :: \frac{1}{D^2} : \frac{1}{D'^2} :: \frac{1}{\varphi} : \frac{1}{\varphi'}.$$

Mais la formule du mouvement oſcillatoire

$$T = (\frac{M a^2}{2 n})^{\frac{1}{2}}\ 180 \text{ degrés},$$

donne, dans les expériences précédentes, à cauſe de l'égalité des poids de tenſion, n proportionnel à $\frac{1}{T^2}$; ainſi la force de torſion, pour des fils de même nature, de même longueur, mais de groſſeur différente, eſt comme la quatrième puiſſance du diamètre, ainſi que la théorie l'avoit annoncé.

X I V.

Réſultat général.

Il réſulte donc de toutes les expériences qui précèdent, que le *momentum* de la force de torſion, eſt, pour les fils du même métal, en raiſon compoſée de l'angle de torſion de la quatrième puiſſance du diamètre, & inverſe de la longueur du fil; en ſorte que ſi l'on nomme l la longueur du fil, D ſon diamètre, B l'angle de torſion, l'on aura, pour l'expreſſion qui repréſente la force de torſion, $\frac{\mu B D^4}{l}$, où μ eſt un coéfficient conſtant qui dépend de la roideur

naturelle de chaque métal : cette quantité μ, invariable pour les fils du même métal, peut se déterminer facilement par l'expérience, comme on va le voir dans l'article suivant.

X V.

Valeur effective des quantités n *&* μ.

NOUS avons vu, *article VII*, que $n = \frac{P . a^2}{2 \lambda}$, où *P* est le poids d'un cylindre, *a* son rayon, λ la longueur du pendule isochrone, avec les oscillations du cylindre, qui sont produites par la force de torsion.

Appliquons cette formule à la *deuxième expérience*, où le fil de fer, *n.° 12*, est tendu par un poids de 2 livres, dont le rayon est 9 lignes $\frac{1}{2}$, & où 20 oscillations se font en 242″.

Comme le pendule, qui bat les secondes à Paris, est de 440 lignes $\frac{1}{2}$, le pendule isochrone, avec les oscillations du cylindre, sera $440 \frac{1}{2} \left(\frac{242}{20}\right)^2$; ainsi

$$n = \frac{2 \text{ liv. } (9 \frac{1}{2})^2}{2 . 440 \frac{1}{2} \left(\frac{242}{20}\right)^2} = \frac{1 \text{ liv.}}{715.},$$

ainsi le *momentum* $n B$ du fil de fer, *n.° 12*, ayant 9 pouces de longueur, est égal à $\frac{1}{715}$ livres, multiplié par l'angle de torsion *B*, agissant à l'extrémité d'un levier d'une ligne de longueur.

Nous avons vu, dans les articles qui précèdent, que pour le même métal, il résultoit de la théorie & de l'expérience que les forces de torsion étoient en raison inverse de la longueur des fils de suspension & de la quatrième puissance du diamètre. Ainsi il est facile d'avoir une valeur déterminée, de la force de torsion d'un fil de fer, d'une longueur & d'une grosseur quelconque ; en voici le calcul.

Le

Le pied cube de fer, pesant à peu-près 540 livres, & les 6 pieds de longueur du fil de fer, *n.° 12*, pesant 5 grains, le diamètre de ce fil de fer est très-approchant d'un quinzième de ligne; ainsi le *momentum* de torsion d'un fil de fer, d'un quinzième de ligne de diamètre, est égal à $\frac{1}{7'5}$ livre, multiplié par l'angle de torsion, agissant à l'extrémité d'un lévier d'une ligne de longueur.

XVI.

Comparaison de la roideur de torsion de deux métaux différens.

L'ON déduira facilement, de la théorie & des expériences qui précèdent, quel est, dans deux métaux différens, le fer, par exemple, & le cuivre jaune, le rapport de roideur de torsion: prenons le fil de fer, *n.° 12*, que nous comparerons avec le fil de laiton, *n.° 12*.

Nous venons de calculer à l'*article précédent*, la quantité n, pour le fil de fer, & nous l'avons trouvée $= \frac{1}{7'5}$ livre, multiplié par un lévier d'une ligne. Mais comme le fil de laiton, chargé du poids de 2 livres, fait 20 oscillations en 442″, nous aurons, par la même formule pour le fil de laiton, $n' = \frac{1 \text{ liv.} (9 \frac{1}{2})^2}{440 \frac{1}{2} (\frac{442}{20})^2}$; ainsi $\frac{n}{n'} = (\frac{442}{242})^2 = 3{,}34$; ainsi la roideur du fil de fer, *n.° 12*, est à la roideur du fil de laiton, *n.° 12*, à peu-près : : $3 \frac{1}{3}$: 1.

Mais comme il y a peu de différence entre la pesanteur spécifique du fer & du cuivre, qui, suivant M. Musschembroek, sont : : 77 : 83, l'on peut supposer que le fil de fer, *n.° 12*, & celui de cuivre, *même numéro*, ont à peu-

près le même diamètre ; ainsi pour les fils de fer & de cuivre du même diamètre, tout étant d'ailleurs égal, les roideurs de torsion sont :: 3 $\frac{1}{3}$: 1, c'est-à-dire qu'en tordant le fil de fer d'un cercle, l'on aura la même réaction de torsion, qu'en tordant le fil de cuivre de 3 $\frac{1}{3}$ cercles.

Si l'on veut ensuite comparer la roideur de torsion avec la force de cohésion, l'on remarquera que notre fil de fer portoit, au moment de sa rupture, 60 onces, que celui de cuivre ne portoit que 35 onces; ainsi puisqu'ils ont à peu-près le même diamètre, leur force de cohésion étoit approchant :: 60 : 35, dans le temps que leur force de torsion vient d'être trouvée :: 3 $\frac{1}{3}$: 1.

Ce dernier résultat ne doit cependant être regardé que comme un cas particulier & non comme un résultat général. Nous verrons dans la deuxième section de ce Mémoire, que la force des métaux varie suivant le degré d'écrouissement & de recuit, & que toutes les expériences dont on s'est servi jusqu'ici pour déterminer la force des métaux, ne peuvent être regardées que comme des cas particuliers.

Mais ce que cette dernière observation semble indiquer, & ce que la pratique confirme, c'est que si l'on veut soutenir un corps mobile sur la pointe d'un pivot, il y a de l'avantage à préférer un pivot d'acier ou de fer, à un pivot de cuivre, puisque sous le même degré de pression le fer fléchit beaucoup moins que le cuivre; qu'ainsi le cercle de contact formé par la pointe du pivot, pressée par le corps qu'elle soutient, aura un moindre diamètre pour le fer que pour le cuivre, ce qui, tout étant d'ailleurs égal, diminue le *momentum* du frottement qu'il faut vaincre pour faire tourner un corps sur la pointe d'un pivot : nous aurons occasion par la suite de revenir sur cet article.

Par quelques expériences & par un calcul semblable à celui qui précède, nous avons trouvé qu'en suspendant un cylindre à un fil de soie, formé de plusieurs brins

réunis à l'eau bouillante, & assez fort pour porter jusqu'à 60 onces, ce fil de soie avoit 18 à 20 fois moins de roideur de torsion que le fil de fer qui portoit ce même poids au moment de sa rupture.

XVII.

Usage des expériences & de la théorie qui précède.

D'APRÈS la théorie qui précède, & les expériences sur lesquelles elle est fondée, l'on pourra mesurer des forces très-petites, qui exigent une précision que les moyens ordinaires ne peuvent pas fournir: nous allons en présenter un exemple.

XVIII.

Balance pour mesurer le frottement des fluides contre les solides.

LA formule qui exprime la résistance des fluides contre un corps en mouvement, paroît composée de plusieurs termes, dont les uns dépendent du choc des fluides contre le corps solide, & dont les autres sont dûs au frottement du fluide: parmi les termes dûs au frottement, il y en a un qui dépend de l'adhérence, & que l'on croit constant; mais ce terme est si petit, que confondu dans les expériences avec les autres quantités qui dépendent du choc, il est très-difficile de l'évaluer: l'on peut voir les expériences que M. Newton a faites pour découvrir cette quantité constante. (*Livre II des Principes mathématiques de la Philosophie naturelle, Scholie du vingt-cinquième théorème.*

La force de torsion donne un moyen facile de déterminer par l'expérience cette adhérence.

Dans un vase *ADBE*, *fig. 3*, rempli du fluide dont on veut déterminer l'adhérence, l'on suspend, au moyen d'un fil de cuivre, un cylindre *abcd*, de cuivre ou de

plomb; l'on place dessus le vase un cercle $A'Fb'$, divisé en degrés; ce cercle se trouve au niveau de l'extrémité d d'un index id attaché au cylindre.

Lorsque l'on fera tourner le cylindre autour de son axe vertical, sans le déranger de son à-plomb, l'on pourra observer, au moyen du petit index, de combien chaque oscillation est altérée: & comme la force de torsion du fil qui produit ces oscillations, est connue par les expériences qui précèdent; que l'on peut aussi connoître l'altération dûe à l'imperfection de l'élasticité, en faisant osciller le cylindre dans le vide ou même dans l'air; l'on peut espérer, par ce moyen, de trouver la quantité constante dûe à l'adhérence.

Exemple & Expérience.

J'AI suspendu dans un vase plein d'eau, à un fil de cuivre, *n.° 12*, de vingt-neuf lignes de longueur, le cylindre de plomb pesant deux livres, qui nous a servi dans les expériences précédentes: le cercle AB, sur lequel l'on observoit les oscillations, avoit quarante-quatre lignes de diamètre; l'on a attendu, avant de commencer les observations, que les amplitudes des oscillations fussent diminuées au point que l'extrémité d de l'index ne parcourût sur le cercle qu'un arc d'une ligne & demie, répondant à peu-près à $3^d\,55'$; & en observant la marche de l'index avec une loupe, l'on a aperçu distinctement quatorze oscillations avant que le mouvement fût éteint.

Résultat de cette Expérience.

Si la diminution successive de chaque oscillation est supposée constante, & qu'elle soit attribuée en entier à l'adhérence du fluide contre la surface du cylindre de plomb, l'on aura, *art. VIII,*

$$(A - S') = \left(\frac{2\mu}{n}\right).$$

où $(A - S')$ eſt la diminution de chaque oſcillation, $n(A - S)$ le *momentum* de la force de torſion, & μ le *momentum* de la force retardatrice dûe à l'adhérence.

Mais comme, d'après les obſervations des oſcillations, l'arc parcouru étoit diminué d'une ligne & demie en quatorze oſcillations, & que le rayon du cercle ſur lequel s'obſervoit cette diminution, étoit de vingt-deux lignes; en ſuppoſant cette diminution conſtante, l'on aura l'angle $(A - S)$ dont l'amplitude diminue à chaque oſcillation $= \frac{3}{2.22.14}$.

Mais nous avons trouvé, *art. XVI*, que pour un fil de laiton de neuf pouces de longueur, *n.° 12*,

$$n = \frac{1 \text{ livre}.(9\tfrac{1}{2})^2}{440\tfrac{1}{2}.(\frac{441}{20})^2};$$

& comme nous avons auſſi trouvé que les forces de torſion ſont proportionnelles à la longueur des fils de ſuſpenſion, l'on aura pour notre fil de vingt-neuf pouces de longueur.

$$\mu = \frac{1}{3,155,000} \text{ livre} \times 1 \text{ ligne},$$

c'eſt-à-dire, que le *momentum* de la force retardatrice conſtante μ, eſt à peu-près égal à un trois millionème de livre, ſuſpendu à un lévier d'une ligne: quantité qui auroit été inappréciable par tout autre moyen que celui que nous venons d'employer.

Pour avoir actuellement la valeur de l'adhérence d'après cette expérience, il faut remarquer que la hauteur du cylindre de plomb, ſubmergée par l'eau du vaſe, étoit de vingt-quatre lignes, & que le diamètre de ce cylindre étoit de dix-neuf lignes. Ainſi, en prenant $\frac{22}{7}$ pour le rapport de la circonférence au diamètre, la ſurface du cylindre ſubmergée, étoit égale à $\frac{22}{7}.19.24$; & comme le mouvement ſe fait ici autour de l'axe du cylindre,

dont le rayon est $9\frac{1}{2}$ lignes, si δ est l'adhérence, le *momentum* de l'adhérence autour de l'axe de rotation, sera $\delta\,\frac{22}{7}\,(19)^2\cdot 12$. Il faut encore ajouter à cette quantité le *momentum* de l'adhérence du cercle qui forme la base du cylindre plongé dans l'eau, dont le *momentum*

$$= \delta\ \frac{22}{7}\cdot 19^1\cdot\frac{19^1}{4}\cdot\frac{2}{3}\,\frac{19}{2},$$

en sorte que le *momentum* total de la résistance du fluide contre le cylindre sera

$$\delta\,\frac{22}{7}\,(19)^2\cdot\left(12+\frac{19}{12}\right)=\delta\cdot\frac{22}{7}\cdot(19)^2\left(\frac{163}{12}\right).$$

Mais l'expérience nous a fait trouver ce même *momentum* $= \frac{1 \text{ livre}}{3,155,000}\cdot 1$ ligne pour un pouce carré; ainsi

$$\delta = \frac{1\text{ livre}}{3155000}\cdot\frac{7\cdot 12}{22\cdot 163\cdot(19)^2},$$

& pour un pied carré l'adhérence sera

$$\delta\,(144)^2 = \frac{1\text{ livre}}{2345000},$$

en sorte que la résistance constante dûe à l'adhérence de l'eau pour une surface de 255 pieds, ne peut pas être évaluée à plus d'un grain; ainsi il y a peu de cas où cette altération constante, si elle a lieu, ne puisse être négligée dans l'évaluation du frottement de l'eau. Nous n'avons fait aucun essai sur les autres fluides.

En donnant au cylindre des oscillations de deux ou trois cercles d'amplitude, & comparant les diminutions successives des amplitudes des oscillations avec les formules du mouvement oscillatoire altéré, j'ai cru apercevoir que dans les très-petites vîtesses, ce frottement est comme les vîtesses, & dans les grandes vîtesses, comme le carré; mais ces expériences demandent un travail exprès, & d'être faites dans différens fluides.

XIX.

Depuis la lecture de ce Mémoire, j'ai construit, d'après la théorie de la réaction de torsion que je viens d'expliquer, une balance électrique & une balance magnétique; mais comme ces deux instrumens, ainsi que les résultats relatifs aux loix électriques & magnétiques qu'ils ont donnés, seront décrits dans les volumes suivans de nos Mémoires, je crois qu'il suffit ici de les annoncer.

XX.

Seconde Section.

De l'altération de la force élastique dans les torsions des fils de métal. Théorie de la cohérence & de l'élasticité.

Lorsque l'on tord les fils de fer ou de laiton, tendus, comme dans les expériences qui précèdent, par un poids, l'on observe deux choses; si l'angle de torsion n'est pas considérable, relativement à la longueur du fil de suspension, dans le moment où l'on lâche le poids, il revient à peu-près à la position qu'il avoit avant la torsion du fil de métal, c'est-à-dire, que le fil de suspension se détord de toute la quantité dont il a été tordu; mais si l'angle de torsion que l'on aura donné au fil de suspension, est très-grand, pour lors ce fil ne se détord que d'une certaine quantité, & le centre de réaction de torsion s'avancera de toute la quantité dont le fil ne sera pas détordu. C'est donc d'après ces deux considérations, qu'il faut diriger les expériences que nous devons faire dans cette section, ce qui demande deux suites d'expériences; la première, pour déterminer par la diminution des oscillations, de combien la force élastique de torsion est altérée dans le mouvement oscillatoire, quoique le centre de réaction de torsion ne soit pas déplacé; la seconde, pour déterminer le déplacement de ce centre de réaction, lorsque l'angle de torsion est assez grand pour que ce déplacement ait lieu.

XXI.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Fil-de-fer, n.° 1, *longueur, ſix pouces ſix lignes.*

L'ON a pris un fil de fer de ſix pouces ſix lignes de longueur, il a été chargé d'un poids de deux livres, le même qui a ſervi dans les expériences de la ſection précédente. L'on a cherché, en faiſant tourner ce cylindre autour de ſon axe pour tordre le fil de ſuſpenſion, à déterminer de combien de degré l'amplitude diminuoit à chaque oſcillation, & l'on a trouvé :

Premier eſſai, angle de torſion	90^d perd	10^d en	3 ½ oſcillat.
Deuxième eſſai	45	....	10 ½.
Troiſième eſſai	22 ½	....	23.
Quatrième eſſai	11 ¼	....	46.

Remarque ſur cette Expérience.

Les diminutions des amplitudes des oſcillations ont été très-incertaines, lorſque l'angle primitif de torſion a été de plus de 90 degrés; l'on a même obſervé que pour lors, en faiſant tourner le cylindre autour de ſon axe, il ne revient pas à ſa première poſition, & que la poſition reſpective des parties conſtitutives du fil a été altérée, & par conſéquent, que ſon centre de réaction de torſion a reſté déplacé: voici ce que l'expérience fournit ſur ce déplacement.

XXII.

Suite de la première Expérience.

Dans cette partie de la première expérience, l'on a cherché le déplacement du centre de torſion, ſuivant le degré de torſion que l'on a donné au fil de ſuſpenſion.

Premier

Premier essai, en tordant de.	$\frac{1}{2}$ C	l'index ou le centre de torsion a été déplacé de.....		.. 8[1]
Deuxième essai..........	1 C	....		50.
Troisième essai..........	2	....		310.
Quatrième essai..........	3	....	1 C +	300.
Cinquième essai..........	4	....	2 +	290.
Sixième essai..........	5	....	3 +	280.
Septième essai..........	6	....	4 +	260.
Huitième essai..........	10	....	8 +	240.

Neuvième essai. Ayant voulu continuer à tordre toujours dans le même sens de quinze nouveaux cercles, le fil a cassé au quatorzième. Après cette expérience, ce fil étoit droit & très-roide, il s'étoit séparé suivant sa longueur, en deux parties ; examiné à la loupe, cette séparation étoit très-sensible, & il avoit exactement la figure d'une corde formée de deux torons.

XXIII.

Remarque sur cette Expérience.

Cette première expérience & sa suite paroissent annoncer qu'au-dessous de 45 degrés, les altérations sont à peu-près proportionnelles aux amplitudes des angles de torsion, comme on le voit par les deuxième, troisième & quatrième essais de l'expérience première ; qu'au-dessus de 45^d, les altérations augmentent dans un rapport beaucoup plus grand ; que le centre de réaction de torsion ne commence à se déplacer que lorsque l'angle de torsion est à peu-près d'une demi-circonférence ; que ce déplacement croît à mesure que l'on tord le fil ; qu'il est assez irrégulier jusqu'à 1 cercle 10 degrés ; que, passé ce terme de torsion, la

réaction de torsion reste à peu-près la même pour tous les angles de torsion : ainsi, par exemple, en tordant, dans le quatrième essai, de trois cercles, le centre de réaction de torsion se déplace d'un cercle + 300 degrés, en sorte que la réaction de torsion n'a ramené le cylindre que d'un cercle 60 degrés. Dans le septième essai, nous voyons, qu'après avoir déjà éprouvé dans les essais antérieurs, un déplacement de plus de huit cercles, que six nouveaux cercles de torsion déplacent le centre de réaction de torsion de 4 C + 260 degrés, en sorte que pour plus de quatorze cercles de torsion, la réaction de torsion n'est encore que d'un cercle plus 100 degrés ; ainsi elle ne diffère que d'un dixième de la réaction de torsion pour trois cercles de torsion que le quatrième essai nous a donnés d'un cercle + 60 degrés : les expériences qui vont suivre éclairciront cette remarque.

XXIV.

Deuxième Expérience.

Fil de fer, n.° 7, *longueur*, 6 *pouces* 6 *lignes.*

L'on a cherché, dans la première partie de cette expérience, de combien les amplitudes des oscillations diminuoient à chaque oscillation, lorsque le centre de torsion n'étoit pas encore deplacé.

Premier essai, angle de torsion	180d perd 10d en...		$3\frac{1}{2}$ oscillat.
Deuxième essai............	90............		12.
Troisième essai............	45............		27.
Quatrième essai............	$22\frac{1}{2}$............		54.

Suite de cette deuxième Expérience.

Dans cette deuxième partie de la même expérience, l'on a cherché le déplacement du centre de torsion.

Premier essai, en tordant de	3 cercles	le centre de réaction de torsion déplacé de...........	300^d
Deuxième essai........	4................	1 C +	180.
Troisième essai........	6................	3 +	90.
Quatrième essai........	8................	5 +	90.
Cinquième essai........	12................	9 +	40.
Sixième essai........	20................	16 +	310.
Septième essai........	30................	26 C +	180.
Huitième essai........	50................	46 +	20.

Neuvième essai, au dix-septième cercle de torsion le fil a cassé.

XXV.

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 12, longueur, 6 pouces 6 lignes.

LA première partie de cette expérience a été faite sous le même point de vue que la première partie des deux expériences qui précèdent.

Premier essai, angle de torsion	360^d perd..	10^d en..	1 oscillat.
Deuxième essai............	180......	10....	2.
Troisième essai............	90......	10....	5.
Quatrième essai............	45......	10....	11.
Cinquième essai............	$22\frac{1}{2}$.....	10....	25.

Suite de cette troisième Expérience.

Déplacement du centre de torsion.

Premier essai, en tordant de	4 cercles	le centre de réaction de torsion déplacé de.............	300^d.
Deuxième essai..........	6................	2 C +	40.

Troisième essai, aux six autres tours le fil a cassé.

XXVI.

LES expériences précédentes ont été continuées avec des fils de laiton, employés aux expériences de la première section.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 1, *longueur, 6 pouces 6 lignes.*

Premier essai, en tordant de	180^d perd..	12^d en....	2 oscill.
Deuxième essai..........	90......	10......	6.
Troisième essai..........	45......	10......	16.
Quatrième essai..........	22$\frac{1}{2}$.....	10......	40.
Cinquième essai..........	11$\frac{3}{4}$.....	10......	80.

Suite de la quatrième Expérience.

Déplacement du centre de torsion.

Premier essai, en tordant de	2 cercles	le centre de torsion a été déplacé de..	160^d.
Deuxième essai..........	4...........	2 C +	0.
Troisième essai..........	6...........	3 C +	300.
Quatrième essai..........	10...........	7 C +	300.
Cinquième essai..........	20...........	17 C +	340.

Sixième essai, au vingt-huitième cercle de torsion le fil s'est rompu.

CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 7, *longueur, 6 pouces 6 lignes.*

Diminution des amplitudes dans les oscillations.

Premier essai, en tordant de	360^d perd..	10^d en...	2$\frac{1}{2}$ oscillat.
Deuxième essai..........	180......	10.....	6.
Troisième essai..........	90......	10.....	13.
Quatrième essai..........	45......	10.....	31.
Cinquième essai..........	22$\frac{1}{2}$.....	10......	72.

Suite de la cinquième Expérience.

Déplacement du centre de torsion.

En tordant de quatre cercles, le centre s'est déplacé de 220 degrés; mais en voulant tordre de six cercles, le fil a cassé.

XXVII.

DANS le fil employé à cette dernière expérience, la torsion altère moins les oscillations, & par conséquent la force élastique, que dans toutes les autres; c'est ce qui résulte du grand nombre d'oscillations qui a lieu ici avant que le mouvement oscillatoire soit détruit; c'est ce qui résulte également de la rupture soudaine de ce fil, sans pouvoir déplacer d'un cercle son centre de réaction. J'ai généralement trouvé que les fils de laiton, répandus dans le commerce, entre les *n.os* *5* & *8*, étoient ceux dont l'élasticité de torsion étoit la moins imparfaite: en comparant les fils de fer & de laiton sous les *mêmes numéros*, l'on trouve également que les fils de laiton ont une amplitude d'élasticité beaucoup plus étendue que les fils de fer.

Au surplus, l'expérience présente beaucoup d'irrégularités dans les résultats: deux bobines du même fil & du même numéro, ne donnent pas toujours le même déplacement au même angle de torsion, ce qui ne peut être attribué qu'à la manière dont les fils sont manufacturés, qu'à la plus ou moins grande pression qu'ils éprouvent en passant sous la lèvre de la filière, qu'au recuit qu'on leur fait éprouver pour réduire successivement le diamètre de numéro en numéro, du gros au petit.

XXVIII.

Première Remarque.

MALGRÉ l'incertitude qui règne dans les expériences des oscillations pour les amplitudes des étendues, il paroît

qu'en dedans de certaines limites, ces altérations sont à peu-près proportionnelles à l'amplitude de l'oscillation, comme nous l'avons annoncé dans les remarques sur la première expérience, & comme toutes les autres le confirment. La résistance de l'air ne peut altérer que très-peu, dans nos expériences, l'amplitude des oscillations, je m'en suis assuré par le moyen suivant. Le poids de deux livres, qui a servi aux expériences de cette section, avoit 26 lignes de hauteur & 19 lignes de diamètre; j'ai formé avec un papier très-léger, une surface cylindrique du même diamètre que ce poids, mais qui avoit 70 lignes de hauteur: je faisois entrer une partie du cylindre de plomb dans mon enveloppe de papier, & je formois ainsi un cylindre de 78 lignes de hauteur, ou trois fois plus long que le premier, ce qui auroit dû tripler, dans le mouvement oscillatoire, les altérations dûes à la résistance de l'air; mais je n'ai jamais trouvé que ces altérations fussent d'un dixième plus considérable dans ce second cas que dans le premier, le plus souvent elles étoient égales; ainsi la résistance de l'air n'entre dans nos expériences, que pour des quantités que l'on peut négliger.

XXIX.

Seconde Remarque.

POUR former une balance de torsion, il faut toujours choisir les fils qui ont l'elasticité la moins imparfaite; les fils de laiton sont de beaucoup préférables à ceux de fer: le choix de la grosseur dépend des forces que l'on veut mesurer. J'ai une balance magnétique, qui sera décrite dans nos Mémoires, où je me suis servi alternativement d'un fil de laiton de 3 pieds de longueur, des *n.os 12* & *7*; la force élastique de torsion est telle, qu'en tenant ces fils tordus de huit cercles, pendant trente heures, il n'y avoit pas un degré d'altération ou de déplacement dans le centre de torsion.

XXX.

Troisième Remarque.

DANS tous les fils de métal, la réaction de l'élasticité n'a qu'une certaine étendue: l'isochronisme des oscillations nous apprend que dans les premiers degrés de torsion, la force élastique est presque parfaite; mais au-delà de l'angle de torsion qui sert, pour ainsi dire, de mesure à la force élastique, le centre de réaction de torsion se déplace presque en entier de tout l'angle de torsion qui excède celui de la réaction de l'élasticité. Cependant, comme on peut le remarquer dans les expériences qui précèdent, l'amplitude de la réaction élastique n'est pas une quantité constante pour tous les angles de torsion, elle croît à mesure que la torsion augmente; moins l'élasticité première, dans le fil soumis à l'expérience, a d'étendue, plus cet accroissement est grand. Un fil de laiton, *n.° 1*, de 6 pouces & demi de longueur, rougi au feu, pour lui faire perdre par le recuit, la plus grande partie de son élasticité, ne donnoit après cette opération, pour le premier cercle de torsion, que 50 degrés de réaction d'élasticité; mais il avoit acquis, après 90 cercles de torsion, une étendue d'élasticité de près de 500 degrés dans cet intervalle; du 2 au 3.me cercle de torsion, la réaction de l'élasticité s'étoit accrue de 12 degrés; du 40 au 41.me cercle de torsion, la même réaction s'étoit accrue de 6 degrés; & du 90 au 91.me cercle de torsion, à peu-près d'un degré, en sorte que l'accroissement de la réaction élastique, après que le centre de réaction a été déplacé d'un certain angle, étoit à peu-près en raison inverse de l'angle de déplacement. Il faut avertir qu'après ces 90 cercles de torsion, j'ai voulu tordre de 50 autres cercles le même fil, mais qu'il s'est rompu au 49.me, en sorte que ce fil, avant de se rompre, pouvoit être tordu de 140 cercles. Si l'on

compare ce résultat avec la suite de la première expérience, où le même fil, *n.° 1*, n'avoit pas été recuit, l'on trouvera qu'après 25 cercles de torsion, la réaction de l'élasticité étoit de 480 degrés, qu'en tordant de 15 nouveaux cercles, le fil s'est cassé; ce dernier fil ne pouvoit donc éprouver, sans se rompre, que 40 cercles de torsion. En suivant dans cette expérience la marche de la réaction élastique, l'on en déduira qu'au point de rupture, cette réaction étoit à peu-près égale à celle du fil recuit dans le même point de rupture; d'où il paroîtroit que l'on est en droit de conclure que par la seule torsion l'on peut donner à un fil recuit toute l'élasticité dont il peut être susceptible, & que l'écrouissement ne peut rien y ajouter; en sorte que réciproquement, si en passant à la filière, ou par un autre moyen quelconque, l'on avoit pu donner à notre fil de laiton un écrouissement tel, que sa réaction d'élasticité eût été de 520 degrés, qui me paroît être celle de nos deux fils au moment de la rupture, pour lors la réaction élastique eût été portée à son *maximum* par cette première opération : il n'y auroit plus eu de déplacement possible dans le centre de réaction de torsion; mais toutes les fois que l'on auroit fait éprouver à ce fil une torsion de plus de 520 degrés, il se seroit rompu.

XXXI.

Quatrième Remarque.

D'APRÈS les expériences qui précèdent, voici, à ce qu'il paroît, comme l'on peut expliquer l'élasticité & la cohérence des métaux. Les parties intégrantes du fil de fer ou de laiton, ou d'un métal quelconque, ont une élasticité que l'on peut regarder comme parfaite, c'est-à-dire, que les forces nécessaires pour comprimer ou dilater ces parties intégrantes, sont proportionnelles aux dilatations ou compressions qu'elles éprouvent; mais elles ne sont liées entre elles

elles, que par la cohérence, quantité constante & absolument différente de l'élasticité. Dans les premiers degrés de torsion, les parties intégrantes changent de figure, s'alongent ou se compriment, sans que les points par où elles adhèrent entr'elles, changent de place, parce que la force nécessaire pour produire ces premiers degrés de torsion, est moins considérable que la force d'adhérence; mais lorsque l'angle de torsion devient tel, que la force avec laquelle ces parties sont comprimées ou dilatées, est égale à la cohérence qui unit ces parties intégrantes, pour lors elles doivent ou se séparer ou glisser l'une sur l'autre. Ce glissement de parties, a lieu dans tous les corps ductiles; mais si par ce glissement de parties les unes sur les autres, le corps se comprime, l'étendue des points de contact augmente, & l'étendue du champ d'élasticité devient plus grand. Cependant comme ces parties intégrantes ont une figure déterminée, l'étendue des points de contact ne peut augmenter que jusqu'à un certain degré, au-delà duquel ce corps se rompt; c'est ce qui explique les effets détaillés dans l'article qui précède. Ce qui prouve encore qu'il faut distinguer la cause de l'élasticité, de l'adhérence, c'est que l'on peut faire varier la cohérence à volonté par le degré de recuit, sans altérer pour cela l'élasticité. C'est ainsi que lorsque je faisois recuire à blanc mon fil de cuivre, *n.° 1* des expériences précédentes, il perdoit une grande partie de sa force de cohérence: avant d'être recuit, il portoit au point de rupture 22 livres, & après le recuit il portoit à peine 12 à 14 livres; mais quoique l'adhérence fût presque diminuée de moitié par le recuit, & que l'amplitude d'élasticité fût presque diminuée dans la même proportion, cependant dans toute l'étendue de réaction élastique qui restoit au fil recuit, l'élasticité étoit la même, à angle égal de torsion, que dans le même fil non recuit, puisqu'en suspendant à l'un & à l'autre le même poids, le temps d'un même nombre d'oscillations étoit exactement égal dans les deux cas.

XXXII.

UN effet aſſez curieux du rapprochement des parties dans la torſion des fils de métal, c'eſt celui qui a lieu lorſque l'on tord un fil de fer, qui par cette ſeule opération acquiert par le rapprochement des parties, la qualité de prendre le magnétiſme à un plus haut degré qu'il ne l'avoit auparavant. Voici ce que l'expérience m'a appris à ce ſujet; j'ai pris un fil de fer, tel qu'on les trouve répandus dans le commerce, de la groſſeur de ceux qui ſervent pour les petites ſonnettes; une longeur de ſix pouces, peſoit 57 grains; ce fil de ſix pouces, aimanté & ſuſpendu horizontalement par un fil de ſoie détordu & très-fin, faiſoit une oſcillation en 18 ſecondes: ce même fil de ſix pouces de longueur, tordu juſqu'au point de rupture, & aimanté comme la première fois à ſaturation, par la méthode de la double touche, faiſoit une oſcillation en 6 ſecondes; en ſorte que le *momentum* de la force directrice pour deux aiguilles égales & ſemblables, étant comme l'inverſe du carré du temps d'un même nombre d'oſcillations, le *momentum* magnétique de l'aiguille tordue, étoit neuf fois plus conſidérable que celui de l'aiguille non tordue: j'aurai occaſion de revenir ſur cet article dans un autre Mémoire.

XXXIII.

POUR confirmer toute la théorie qui précède relativement à la cohérence & à l'élaſticicité, j'ai fait l'expérience ſuivante.

L'on a fixé, *fig. 4*, au moyen d'une agrafe *CD*, avec une vis *V*, une lame d'acier *AB*, ſur le bord d'une table très-ſolide; cette lame étoit priſe & ſerrée dans ſa partie *Aa*, entre deux plaques de fer *E* & *F*, par la vis *V*: cette lame avoit 11 lignes de large, & demi-ligne d'épaiſſeur; depuis le point *a* juſqu'au point *B*, où étoit ſuſpendu le poids *P*, il y avoit ſept pouces de diſtance: l'on meſuroit ſur la règle verticale *rg*, de combien le poids *P*,

faisoit baisser la lame *AB* à son extrémité *B*. Voici le détail des résultats, qui ont eu lieu suivant les différens poids, dont la lame étoit chargée.

L'on a fait rougir la lame à blanc, & on lui a donné une trempe très-roide; ensuite l'on a attaché en *B* à sept pouces du point *a*, différens poids. L'extrémité *B* a baissé,

Avec un poids d'une demi-livre de........... 8 lignes.
Avec un poids d'une livre de............... $15\frac{1}{2}$.
Avec un poids d'une livre & demie de........ 23 +.

L'on a pris cette même lame, & on l'a fait chauffer jusqu'à ce qu'elle eût pris la couleur violette, & qu'elle fût revenue à la consistance d'un excellent ressort; & l'on a trouvé également, qu'en la chargeant comme la première, l'extrémité *B* a baissé,

Avec $\frac{1}{2}$ livre de....................... 8 lignes.
Avec 1 livre.......................... $15\frac{1}{2}$ +
Avec $1\frac{1}{2}$ livre......................... 23 +.

Enfin l'on a fait rougir cette même lame à blanc, & on l'a laissé refroidir très-lentement; & l'on a eu, en chargeant l'extrémité *B*, exactement les mêmes résultats que dans les deux expériences qui précèdent.

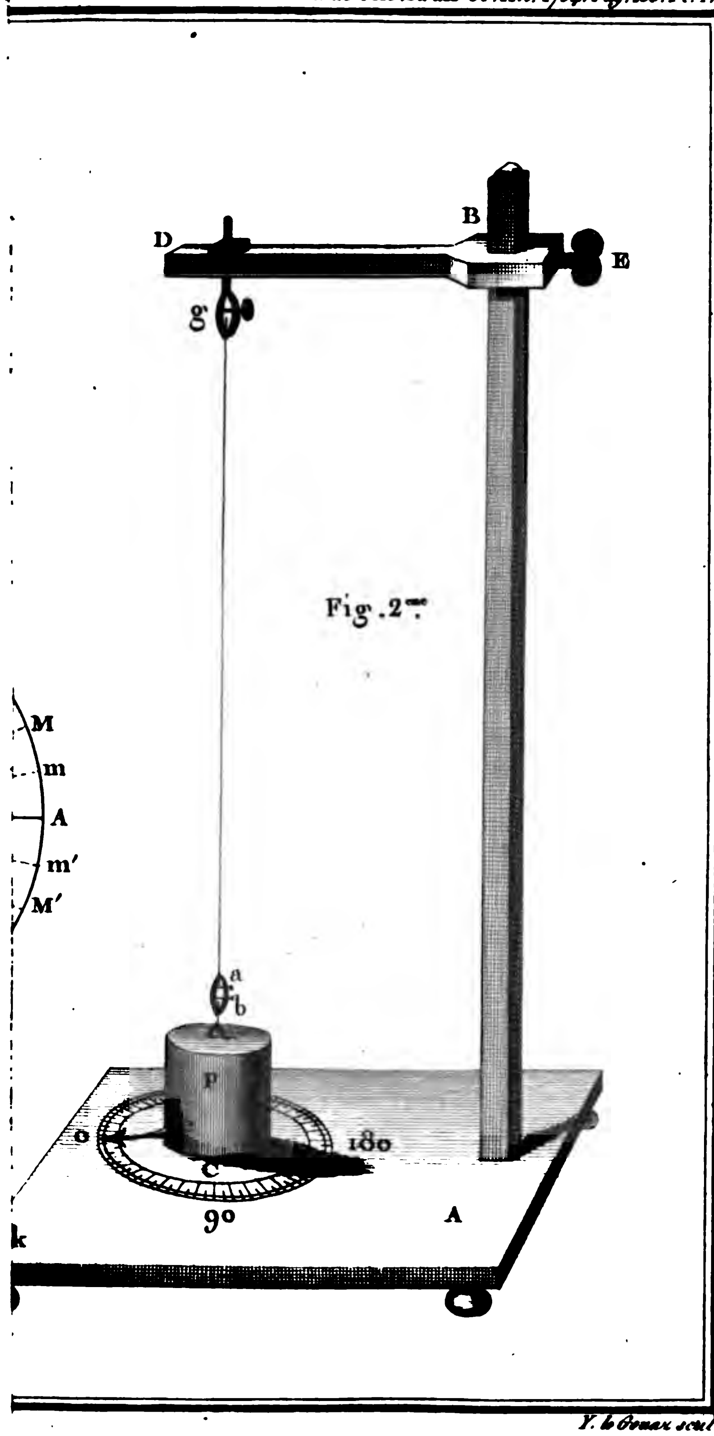
Il nous paroît que ces trois expériences prouvent d'une manière incontestable, que dans quelqu'état que se trouve la lame, les premiers degrés de sa force élastique ne sont nullement altérés; puisqu'en tenant compte du bras de lévier, qui diminue à mesure que la lame est chargée, les mêmes poids la fléchissoient dans les trois états également & proportionnellement à la charge; que lorsqu'on ôtoit ces poids, elle reprenoit exactement sa première position horizontale.

J'ai voulu voir ensuite, quelle étoit la force de cette lame dans ces trois états différens; & dans le cas où le

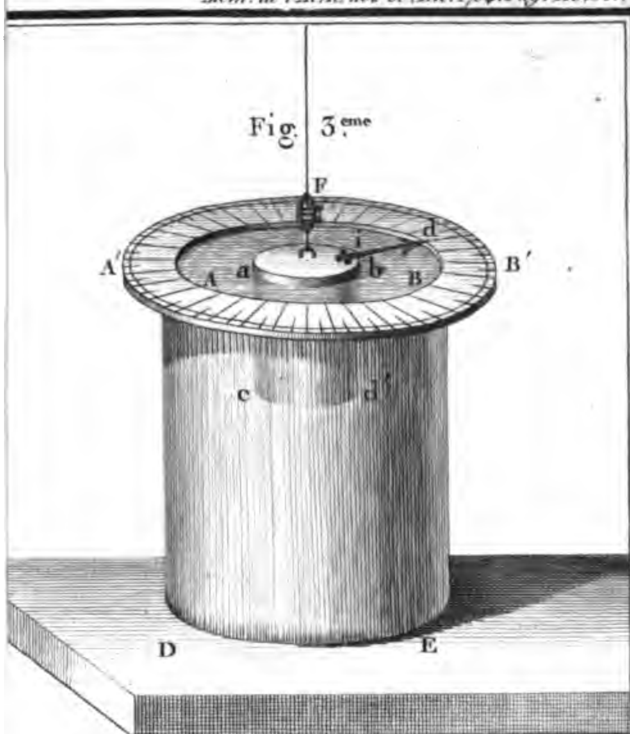
centre de flexion commenceroit à se déplacer, quel sero le degré de flexion où la lame commenceroit à être plié sans revenir à sa première position. Voici le résultat d cette expérience.

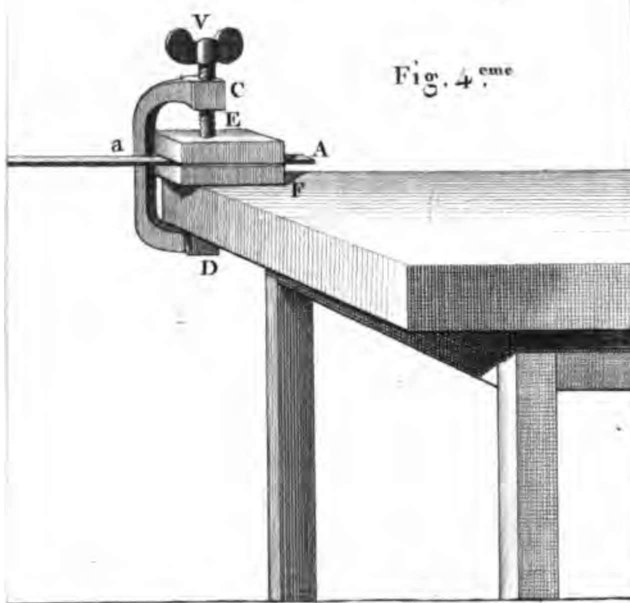
J'avois fait tirer d'une planche de tôle d'acier d'Ar gléterre, trois lames exactement semblables à celle d l'expérience qui précède : une de ces lames avoit ét trempée très-roide, la seconde étoit revenue à la consistanc d'un excellent ressort, & la troisième avoit été recuite blanc, & refroidie lentement. J'attachois, *fig. 4,* un peso en *d* à 2 pouces $\frac{1}{2}$ de distance du point *a*, & j'avois soi d'exercer la traction toujours perpendiculairement à l direction de la lame. Voici ce que l'on a observé.

La lame trempée très-roide, se rompoit sous une tra- tion de six livres; mais sous quelqu'angle qu'elle fı fléchie, au-dessous de celui de rupture, elle reprenc exactement sa première position. La lame revenue co leur violette, formant un excellent ressort, ne se rompo que sous une traction de dix-huit livres; elle se plio jusqu'au point de rupture, d'un angle à peu-près propor tionnel à l'angle de torsion, & sous quelques angles qu'ell fût fléchie avant celui de rupture, lorsqu'on la lâchoit, elle reprenoit sa première position. La lame recuite à blanc & refroidie lentement, se plioit jusqu'à une traction de cinq à six livres, proportionnellement à cette force de traction, & d'un angle absolument égal sous la même force que dans l'état de trempe & de ressort; mais en tiran ensuite toujours perpendiculairement à la direction de l lame, pour conserver le même lévier, avec une force d sept livres, on la plioit sous tous les angles, sans qu'il fû besoin d'augmenter cette force: en la lâchant, elle s relevoit seulement de la quantité dont elle avoit été pri- mitivement fléchie par une traction de six livres; en sorte que l'angle de réaction de flexion, se trouvoit changé de tout l'angle dont on l'avoit fléchi avec une force plus grande que sept livres.



Y. le Gouaz sculp.





Y. le Gouaz sculp.

Ces dernières expériences nous ramènent aux mêmes résultats que celles qui ont précédé. Il est clair que pour avoir une idée de ce qui arrive dans la flexion des métaux, il faut distinguer la force élastique des parties intégrantes, de la force d'adhérence qui réunit ces parties entr'elles: la force élastique dépend, comme nous l'avons déjà dit, de la compression ou dilatation que les parties intégrantes éprouvent, & est toujours proportionnelle aux tractions. Ces parties intégrantes ne sont altérées, ni par la trempe ni par le recuit, puisque nous venons de voir que dans ces différens états, l'élasticité est la même sous les mêmes degrés de flexion; mais ces parties intégrantes, ne sont liées entr'elles que par un certain degré d'adhérence qui dépend probablement de leur figure & de la portion respective des différens fluides dont leurs pores sont remplis, ce qui varie suivant la trempe & le recuit. Dans l'acier trempé roide, & dans les bons ressorts, les molécules intégrantes ne peuvent ni glisser l'une sur l'autre, ni éprouver le moindre déplacement, sans que le corps ne se rompe; mais dans les corps ductiles, dans les métaux recuits, ces parties peuvent glisser l'une sur l'autre, & se déplacer, sans que l'adhérence en soit sensiblement altérée.

Ce que nous venons d'expliquer pour les métaux, paroît pouvoir s'appliquer à tous les corps; leurs parties sont toujours d'une parfaite élasticité, mais les corps sont durs, mous ou fluides, suivant l'adhérence de ces parties intégrantes. Si dans les corps durs, elles peuvent glisser l'une sur l'autre, sans que leur distance soit sensiblement altérée, le corps sera ductile ou malléable; mais si elles ne peuvent pas glisser l'une sur l'autre, sans que leur distance respective soit sensiblement altérée, le corps se rompra lorsque la force avec laquelle le corps sera tiré ou comprimé, sera égale à l'adhérence.



OBSERVATIONS SUR LES SCHORLS.

Par M. l'abbé HAÜY.

Lû le 28 Juillet 1784.

ON a donné le nom de *Schorls* à une multitude de substances très-différentes les unes des autres par leur forme & leur aspect. La Minéralogie ne fournit aucun caractère extérieur qui puisse convenir à toutes ces substances. Plusieurs Chimistes célèbres, entr'autres M.rs Bergmann & Kirwen, nous ont donné l'analyse des schorls; mais comme ils n'ont point fait connoître par des descriptions nettes & précises les divers corps sur lesquels ils ont opéré, on ne peut savoir si les résultats de leur analyse s'étendent à tous les minéraux que l'on a compris sous le nom de *schorls*.

Je me suis occupé depuis quelque temps de la structure des cristaux de ce genre, & quoique je sois encore éloigné du terme de mon travail, qui exige une longue suite de recherches délicates, je crois cependant avoir déjà saisi quelques points fixes pour établir des distinctions marquées entre plusieurs des substances dont il s'agit. Je me bornerai à en citer ici deux des plus remarquables, savoir le schorl noir à six pans, terminé par des sommets à trois faces romboïdales; & le schorl blanc, qui se présente assez communément sous la forme d'un cristal à dix pans, terminé par des sommets à deux faces. Le premier de ces cristaux se divise nettement par des sections parallèles à quatre de ses pans, dont les inclinaisons respectives sont de 120d & 60d. Les cristaux, appelés *schorls blancs*, se divisent aussi parallèlement à quatre de leurs pans, sous les mêmes angles de 120 — 60d, ce qui semble d'abord

rapprocher ces criſtaux du ſchorl noir; mais, 1.° les deux coupes ſont également nettes & brillantes dans ce dernier criſtal, au lieu que dans le ſchorl blanc, l'une des deux réſiſte beaucoup plus que l'autre à l'inſtrument tranchant, & préſente un poli beaucoup plus terne; 2.° on peut faire, dans le criſtal appelé *ſchorl blanc*, des coupes très-faciles & d'un poli très-vif, parallèlement à l'une des faces du ſommet, tandis que le ſchorl noir n'admet point de pareilles coupes, ſur quoi je remarquerai que les ſections ne m'ont jamais paru varier dans toutes les ſubſtances d'un même genre dont j'ai examiné la ſtructure, quelque différentes que fuſſent leurs formes.

Ces obſervations m'ont fait préſumer d'abord, que les criſtaux, connus ſous le nom de *ſchorl blanc*, avoient une toute autre ſtructure que les criſtaux de ſchorl noir, d'où il ſuivroit qu'ils ſont auſſi très-vraiſemblablement d'une nature différente. J'ai cherché enſuite s'il n'y avoit point quelque ſubſtance dont la ſtructure eût déjà été expliquée, & à laquelle on pût rapporter les criſtaux dont il s'agit, & j'ai trouvé qu'ils admettoient les mêmes diviſions que les criſtaux de ſpath étincelant, & que leurs formes, dont quelques-unes s'écartent ſenſiblement de celles de ce même ſpath, pouvoient cependant y être ramenées d'après les loix de décroiſſement que j'ai reconnues dans un grand nombre de criſtaux, autant que j'ai pu en juger ſur de petits objets qui n'ont communément qu'une ou deux lignes d'épaiſſeur.

Quant aux autres qualités ſenſibles des criſtaux dont je viens de parler, elles concourent à favoriſer le rapprochement indiqué. Les criſtaux appelés *ſchorls blancs* ont à peu-près la même teinte, la même dureté & le même poli que des fragmens de ſpath étincelant blanchâtre, auxquels je les ai comparés.

Tels ſont les aperçus auxquels m'ont conduit mes premières recherches ſur les ſchorls. Je me propoſe de donner des Mémoires plus détaillés ſur cette matière, lorſque j'aurai pu me procurer des criſtaux en aſſez grand nombre & d'une forme aſſez prononcée, pour porter dans ce travail la préciſion géométrique, qui ſeule peut imprimer le caractère de la certitude à la nouvelle diſtribution que je propoſe.



MÉMOIRE

MÉMOIRE
SUR LA STRUCTURE
DES CRISTAUX DE FELD-SPATH.

Par M. l'Abbé HAÜY.

ON ſait que le Feld-ſpath, ou ſpath étincelant, eſt une des principales parties compoſantes de ces pierres mélangées, connues ſous le nom de *granits*, & répandues ſi abondamment dans la Nature, où l'on croit qu'elles forment le noyau des plus hautes montagnes. Comme ce ſpath ne ſe trouve communément que par fragmens dans le granit, ainſi que dans les porphyres, ſerpentins, &c. on ne lui a reconnu pendant long-temps d'autre forme que celle de ces fragmens dont Vallerius dit qu'ils ſont cubiques ou rhomboïdaux *(a)*, ſans doute parce qu'ils ont des faces rectangles, & d'autres en loſange. Ces figures avoient été remarquées ſur-tout dans les ſerpentins & les ophites travaillés par l'art, où le ſpath forme ſouvent des taches quadrilatères qui tranchent ſur la couleur de la matière enveloppante. Lû le 26 Juin 1784.

M. Deſmareſt, de cette Académie, parmi pluſieurs productions du règne minéral, inconnues juſqu'alors, qu'il a recueillies dans ſes voyages, rapporta, en 1770, deux variétés très-intéreſſantes du feld-ſpath, dont il avoit trouvé l'une parmi les laves de l'Auvergne, & l'autre dans le Limoſin. M. Deſmareſt a dépoſé au cabinet du Roi un très-beau criſtal de cette dernière variété, qui eſt en priſme à ſix pans; la première variété eſt auſſi priſmatique, mais ſes pans ſont au nombre de dix: l'une &

(a) *Syſtema mineralog.* tom. I, p. 204.

l'autre seront décrites plus au long dans ce Mémoire, comme formes secondaires du feld-spath.

En réunissant les formes dont il s'agit, à celles qui ont été indiquées & décrites par le P. Pini, Professeur d'histoire naturelle à Milan, dans le Mémoire qu'il a publié en 1779, on a l'une des plus nombreuses suites de variétés qui ait été encore observée dans les cristaux d'un même genre. Pour ne point m'engager dans un détail superflu, je réduis toutes les formes du feld-spath, à trois principales, je veux dire celle qui est en prisme à quatre pans, & les deux qui ont été découvertes par M. Desmarest. Il sera aisé, avec un peu d'observation & d'habitude, de ramener les autres à ces deux dernières, dont elles ne s'écartent souvent que par des dimensions respectives différentes, qui font anticiper quelques-unes des faces sur les voisines, & diversifient l'aspect de certains cristaux que l'on reconnoît, par un examen plus approfondi, pour avoir été travaillés en quelque sorte sur un modèle commun.

Outre que les cristaux de feld-spath méritent déjà de fixer l'attention des Naturalistes, pour cette seule raison qu'ils appartiennent à l'une des substances les plus intéressantes du règne minéral, j'ai été encore excité à faire part à l'Académie de mon travail sur cet objet, par les nouvelles preuves qu'il m'a paru fournir des principes que j'ai exposés dans l'essai d'une théorie sur la structure des cristaux, publié vers la fin de l'année 1783.

Je n'ai pas encore vu le feld-spath sous sa forme primitive simple & dégagée de toutes facettes accidentelles. Cette forme seroit celle d'un prisme quadrilatère dont les pans feroient, par leurs inclinaisons respectives, des angles de 120^d — 60^d, & dont les bases seroient perpendiculaires sur deux pans opposés du prisme, & inclinées sur les deux autres pans, de $111^d 29' 30''$, d'une part; & de $68^d 30' 30''$, de l'autre, ainsi que je le prouverai plus bas.

FORMES SECONDAIRES.

Feld-ſpath en priſme oblique, quadrangulaire & rectangle.

Développement. Deux rectangles ſitués aux deux baſes du priſme; deux nouveaux rectangles, formant deux des pans oppoſés du même priſme; deux parallélogrammes obliquangles *MRKL (fig. 1)*, qui en forment les deux autres pans.

Angles des parallélogrammes obliquangles;

$$RML = LKR = 115^d\ 0'\ 8'',$$
$$MRK = MLK = 64^d\ 59'\ 52''.$$

Les priſmes que je viens de décrire, ſe diviſent; 1.° parallèlement à leurs baſes & à ceux de leurs pans qui ſont des rhombes alongés; 2.° parallèlement à deux plans qui feroient avec ces rhombes, des angles de $120^d - 60^d$: ces dernières ſections ſont beaucoup plus difficiles à obtenir que les quatre autres, & préſentent un poli beaucoup plus terne & plus mat. Nous verrons bientôt les conſéquences qui réſultent de cette obſervation, relativement aux dimenſions reſpectives des faces de la molécule conſtituante.

Quant à la loi de décroiſſement, qui a lieu dans ce criſtal, il ſera aiſé de la déterminer d'après la ſtructure des variétés ſuivantes.

Feld-ſpath à 10 pans, avec des ſommets à deux faces & deux facettes (b). Fig. 3.

Développement. Deux hexagones irréguliers, tels que *girkme;* quatre trapèzes, *oirn, edqm*, &c. diſpoſés des deux côtés des hexagones *girkme*, de manière que leurs

(b) Je ſupprime ici, pour ne point trop compliquer la deſcription du criſtal, deux autres facettes, que l'on obſerve très-ſouvent à la place des angles ſolides *e, z;* je reviendrai dans la ſuite ſur ces facettes.

angles, reſpectivement égaux, ſont tournés en ſens contraire; quatre autres trapèzes *ſonp*, *dxlq*, &c. diſpoſés pareillement dans des ſituations renverſées; deux pentagones, tels que *zasoc*, ſitués chacun à l'un des ſommets du criſtal & parallèles entr'eux; deux ennéagones, tels que *zbfhxdege*, formant les facettes en biſeau des ſommets.

Angles de l'hexagone *girkme*, *ige* = *rkm* = 99^d.41'.8".*rig* = *kme* = 115^d.0'.8".*kri* = *gem* = 145^d.18'.44".

Angles des trapèzes *oirn*, *edqm*.*ion* ou *dgm* = 81^d.35' 32".*oir* ou *emq* = 98^d.24' 28".*irn* ou *dem* = 38^d.37'.58".*onr* ou *edq* = 141^d.22'.2".

Angles des trapèzes *ſonp*, *dxlq*.*ſon* ou *dql* = 76^d.52'.28".*oſp* ou *xlq* = 103^d.7' 32" *onp* ou *xdq* = 54^d.9' 22".*npſ* ou *dxl*.125^d.50' 38".

Angles du pentagone *zaſoc*. *aſo* = 115^d.0'.8".*ſaz* = *ſoe* 122^d.29' 56".*azc* = *ocz* = 90^d.

Angles de l'ennéagone *zbfhxdegc*. *dxh* = 89^d.10' 32".*edx* = *fhx* = *ged* = *bfh* = 157^d.42'.22" *cge* = *zbf* = 135^d.24'.42".*gcz* = *bzc* = 134^d 35'.18"..

Angles des trapèzes *coig*. *cgi* = 83^d.7' 3".*gio* = 135^d.36'.45".*coi* = 44^d.23'.15".*gco* = 96^d.52'.57".

Les criſtaux de cette forme ſe diviſent parallèlement aux hexagones *girkme*, aux pentagones *zaſoc*, & aux trapèzes *dxlq*: ces dernières diviſions ſont les moins nettes. On voit par-là ce qu'il y auroit à faire pour mettre à découvert le noyau priſmatique qui repréſente la forme primitive. Je ne m'arrêterai point ici à décrire la ſtructure des différentes lames que l'on détache à l'aide des ſections indiquées. Il ſera aiſé, d'après ce que je dirai dans la ſuite,

de concevoir que chacune de ces lames n'eſt qu'un aſſemblage de molécules conſtituantes parfaitement ſemblables entr'elles, comme cela a lieu pour tous les autres criſtaux dont j'ai expoſé la ſtructure dans l'ouvrage cité.

Cherchons maintenant les dimenſions reſpectives des molécules & les loix de décroiſſement qu'elles ſubiſſent dans les lames appliquées ſur le noyau. Les plans des hexagones *igemkr*, & ceux des trapèzes *dxlq*, *ſonp*, &c. étant cenſés prolongés juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent, forment une eſpèce de priſme hexagone, dans léquel tous les pans adjacens ont leurs inclinaiſons reſpectives égales entr'elles. De plus, les pans *oirn*, *edqm*, &c. font avec les pans voiſins, des angles pareillement égaux de part & d'autre. Cela poſé, ſoit *acdgefmymno* (*fig. 4*), la coupe horizontale géométrique du priſme. Les angles *oac*, *yfe*, & ceux qui ſont formés par *ac*, avec *dg*, par *ao*, avec *nm*, &c. étant tous ſenſiblement égaux entr'eux, auront chacun pour meſure 120 degrés: de plus, puiſque l'on a $acd = dge = gef$, &c. chacun de ces derniers angles ſera de 150 degrés. D'après ces données, la ſuppoſition la plus naturelle & qui m'a paru la plus propre à expliquer, par des loix regulières de décroiſſement, les poſitions des diverſes faces du criſtal, & en même-temps à rendre raiſon de la différence de poli entre les coupes que l'on peut y faire, eſt celle où le grand côté *su* du rhombe alongé *krus*, eſt double du petit côté *ru*. Dans cette hypothèſe, la poſition des côtés *ca*, *fy*, réſulte d'une loi de décroiſſement par deux rangées de molécules en allant de *f* vers *B*, & de *a* vers *C*; celle des côtés *on*, *ge*, eſt donnée par une ſemblable loi; celle des côtés *cd*, *my*, réſulte d'une loi de décroiſſement double de la précédente, c'eſt-à-dire, par quatre rangées de molécules (*c*). Enfin les côtés

(*c*) J'ai remarqué en général, que ces décroiſſemens moins communs, ſe faiſoient le plus ſouvent ſur les faces latérales des criſtaux : mais le rapport que j'ai adopté ici entre *su* & *ru*, donne

ao, mn, fe, dg, étant parallèles aux faces mêmes des molécules, ne sont sujets à aucune loi de décroissement: On voit par-là, que tout est parfaitement semblable dans les parties du cristal, situées sur les parallélogrammes *fBAa* d'une part, & *fDCa* de l'autre, quoique les décroissemens qui donnent les côtés correspondans entr'eux se fassent suivant des loix différentes. L'uniformité qui en résulte, est une suite des propriétés des angles de 120^d & 60^d *(d)*..

En effet, dans le triangle *acp*, nous avons $cap = 60^d$ r.$cp = pa$; d'où il suit, que $acp = 60$ degrés: d'ailleurs, on a aussi $pcx = 60^d$, & $dcx = 30^d$, à cause de $cx = 2xd$; donc, l'angle *acd* sera de $60^d + 60^d + 30^d = 150^d$. On trouvera de même, que les angles *aon, nmy, fym, feg* sont de 150 degrés, & que les angles *oac, yfe* sont de 120 degrés, comme les donne l'observation.

Il suit de-là, que l'épaisseur *rc* d'une des molécules, est à sa largeur *ru*, dans le rapport de $\sqrt{(3)}$ à 1, ou de 3 à $\sqrt{(3)}$. Supposons que la *figure 2* représente cette molécule qu'il faut concevoir située par rapport au cristal, *fig. 3*, de manière que *GOBR* soit parallèle à *zasoc*, *GOAD* parallèle à *igemkr*, & *BOAH* parallèle à *dxlq*: ayant mené les lignes *Gp, pL, CS*, perpendiculaires, l'une sur *OA*, l'autre sur *BH*, & la troisième sur *GO*, on aura, suivant ce qui vient d'être dit, $GP = \sqrt{(3)}$, $CS = 3$, & $PL = 2\sqrt{(3)}$.

Cherchons maintenant la valeur de *CA*. hauteur du parallélogramme *GOAD*. J'ai observé que l'angle formé

---

pour toutes les faces des sommets, dans les différentes variétés du feld-spath, des loix ordinaires de décroissement, par une & par deux rangées de molécules.

(d) **Dans le cristal de la première variété, la position des faces inclinées par rapport aux bases du prisme, est indiquée par la ligne *oc*, perpendiculaire sur *oy*; d'où l'on conclura aisément que les décroissemens qui donnent ces mêmes faces, se font par une rangée de molécules.**

par le pentagone *zasoc* (*fig. 3*) avec le trapèze *coig*, étoit ſenſiblement égal à celui que forme ce même trapèze avec le plan de l'hexagone *girkme*. Suppoſons que les décroiſſemens qui donnent le trapèze *coig*, ſe faſſent par des ſouſtractions d'une ſimple rangée de molécules (nous verrons bientôt cette hypothèſe ſe vérifier par l'accord des calculs avec l'obſervation) : d'après l'égalité des angles cités, il eſt facile de voir que l'on aura la hauteur *CA* du rhombe *GOAD* (*fig. 2*) égale à la hauteur *CS* du rhombe *GOBR*; donc $CA = 3$.

Il faudroit maintenant connoître un des angles du rhombe *GOAD*, d'où l'on déduiroit tous les autres angles-plans de la molécule conſtituante, ainſi que ceux du criſtal, *fig. 3*. Soit *OGD* l'angle qu'il s'agit de déterminer: cet angle eſt le même que *rig* (*fig. 3*); or, d'après les meſures priſes ſur le criſtal, l'angle *rig* eſt ſenſiblement égal à l'angle *osa* (*fig. 5*) au ſommet du pentagone *zasoc*. Concevons que *aso* (*fig. 5*) ſoit le même triangle iſocèle que l'on auroit, en faiſant paſſer une droite par les points *a*, *o*, (*fig. 3*). Le priſme du criſtal étant ſuppoſé dans une ſituation verticale, imaginons un ſecond plan triangulaire iſocèle, dont le ſommet ſoit en *s*, & qui s'abaiſſe au-deſſous du plan *aso*, en prenant une poſition horizontale; ſoit *tsu* (*fig. 5*) ce dernier plan, dans lequel il faut concevoir *tu* égale à la baſe *ao* du triangle *aso*. Menons les hauteurs *ſy*, *ſk* des deux triangles; menons auſſi *ky*: il eſt aiſé de voir que l'angle *ſyk* eſt égal au ſupplément de *gir* (*fig. 3*); donc, cet angle ſera auſſi le ſupplément de *aso* (*fig. 5*); donc, ayant prolongé *as* indéfiniment, & mené la perpendiculaire *on*, on aura $syk = osn$: d'ailleurs, les deux triangles *sky*, *son* ſont rectangles; donc, ils ſont ſemblables. Remarquons maintenant que l'angle *ust* étant égal à celui que forment ſur le priſme de la *figure 3*, les pans qui donnent l'hexagone régulier, on a $ns = 2sk$; d'où l'on tire $sk = ku\sqrt{(\frac{1}{3})}$.

Cela poſé, à cauſe des triangles ſemblables *ksy*, *son*,

on a $on : os :: sk : sy$, ou bien $on : os :: ku\sqrt{(\frac{1}{3})} : sy :: \frac{1}{3} ao \sqrt{(\frac{1}{2})} : sy$. De plus, $os = \sqrt{[(on)^2 + (ns)^2]}$; ſubſtituant, & élevant tout au carré, $(on)^2 : (on)^2 + (ns)^2 :: (\frac{1}{12}) . (ao)^2 : (sy)^2$.

D'ailleurs, $(ns)^2 = (os)^2 - (on)^2$: donc, $(on)^2 : (os)^2 :: \frac{1}{12} (ao)^2 : (sy)^2$. Maintenant, $on \times os = sy \times ao$; donc, $(on)^2 = \frac{(sy)^2 \times (ao)^2}{(os)^2}$: ſubſtituant, la proportion deviendra $\frac{(sy)^2 \times (ao)^2}{(os)^2} : os :: \frac{1}{12} (ao)^2 : sy^2$; d'où l'on tire $sy = os \sqrt[4]{(\frac{1}{12})}$.

Maintenant, ſi l'on prend pour le rayon r la ligne os, alors sy ſera le ſinus de l'angle soy; donc log. ſin. soy $=$ log. r $+ \frac{1}{4}$. log. $\frac{1}{12} = 97302047$, qui répond à $32^d . 29' . 56''$; donc, puiſque le triangle aos eſt iſocèle, on aura $aso = 115^d . 0' \ 8''$. Cette valeur ſera auſſi celle de l'angle OGD (*fig. 2*), & l'une & l'autre ſe trouvent confirmées par les meſures priſes ſur le criſtal.

D'après ces données, il ſera facile de trouver le développement de la molécule conſtituante, & l'on aura $OGD = 115^d . 0' 8''$. $GOA = 64^d . 59' 52''$. $GOB = 122^d . 29' 56''$. $OBR = 57^d . 30' 4''$ $BOA = 103^d . 7' 32''$. $OBH = 76^d . 52' 28''$.

Quant aux dimenſions reſpectives des faces de la même molécule, nous avons $GOAD = GO \times AC = GO \times 3 R . OG = GO \times CS = GO \times 3$, c'eſt-à-dire, que les deux faces dont il s'agit, ſont parfaitement égales. De plus, $GOAD = AO \times GP = AO \times \sqrt{(3)}$, & $BOAH = AO \times PL = AO \times 2\sqrt{(3)}$; d'où il ſuit que la face $BOAH$ eſt double de chacune des deux autres, ce qui explique la différence des coupes que l'on fait dans le criſtal, parmi leſquelles celles qui répondent aux deux faces égales des molécules ſont nettes & d'un beau poli, tandis que celles qui ſe font parallèlement à la plus grande face n'offrent qu'un poli terne & mat, ainſi que je l'ai dit plus haut, parce que les molécules adhèrent

adhèrent entr'elles de ce côté par un plus grand nombre des points.

Maintenant, ayant mené OK, OT, perpendiculaires ſur BO, imaginons un plan coupant qui paſſe par ces deux lignes; ce plan interceptera, ſur la face de la molécule, un parallélogramme obliquangle, dont OK, OT ſeront deux côtés. Il faut prouver que OK eſt double de OT.

$AC \times GO = GP \times AO$; or, $AC = 3 . GP = \sqrt{(3)}$; donc, $3 GO = \sqrt{(3)} AO$; donc, $GO : AO :: \sqrt{(3)} : 3$: d'ailleurs $CS = 3 . PL = 2 \sqrt{(3)}$: donc, $GO \times CS : AO \times PL :: 3 . \sqrt{(3)} : 3 . 2 \sqrt{(3)}$: donc, $AO \times PL = 2\, GO \times CS$; donc, auſſi $OK \times BO = 2 OT \times BO$; donc, $OK = 2\, OT$. Cette propriété nous ſera néceſſaire dans la ſuite.

Un plan coupant qui paſſeroit par GPL, intercepteroit un autre parallélogramme obliquangle, dont le grand côté ſeroit pareillement double du petit côté; mais ſi l'on faiſoit paſſer un troiſième plan coupant par ACS, on auroit un carré.

Cherchons maintenant la loi des décroiſſemens qui donnent l'ennéagone $zbfhxdegc$ (*fig. 3*). Soit $girkme$ (*fig. 6*) le même hexagone que celui de la *fig. 3*, l'angle ige repréſentera celui que forme le pentagone $zasoc$ (*fig. 3*), par ſon inclinaiſon ſur l'ennéagone $zbfhxdegc$. Or, l'arête cz étant perpendiculaire ſur co & za, il eſt aiſé de voir que les décroiſſemens ſe font parallèlement à ro, uz (*fig. 4*), c'eſt-à-dire, ſur les angles des lames compoſantes. Soit gof (*fig. 6*) le triangle menſurateur; la ligne gf eſt plus inclinée ſur gk, que ne l'eſt celle qui fait la même fonction dans un autre variété que nous conſidérerons plus bas, ce qui annonce des décroiſſemens par une ſeule rangée de molécules pour le criſtal de la *fig. 3*, & par deux rangées pour l'autre criſtal. Dans le triangle fgo, nous avons $go = OA$ (*fig. 2*), & par la ſuppoſition, $of = DA$ ou GO. Or, à cauſe des triangles ſemblables GOP, CAO; $OA : GO :: CA : GP :: 3 : \sqrt{(3)}$;

donc nous pouvons faire *go* (*fig. 6*) $=$ 3,0000, & *of* $= \sqrt{3} = 1,7320$. De plus, l'angle *gof* eſt de 64^{d} $59'$ $52''$, comme on l'a vu plus haut. D'après ces données, on trouve, pour la valeur de l'angle *ogf*, $34^{d}.41'$ $16''$; partant, l'angle *igf* qui meſure l'inclinaiſon reſpective de deux faces de chaque ſommet, eſt de $64^{d}.59'$ $52'' + 34^{d}$ $41'$ $16'' = 99^{d}.41'$ $8''$, ce qui s'accorde avec l'obſervation.

J'ai dit que les deux angles ſolides, *c*, *z* (*fig. 3*), étoient ſouvent remplacés par des facettes, dont une eſt repréſentée par le quadrilatère $\mu\,\varphi\,\xi\,\delta$ (*fig. 7*). Pour expliquer cette facette, j'obſerve d'abord que la ligne $\mu\varphi$ eſt parallèle au côté *ſa*; or, ce côté étant dans le ſens d'une des diviſions que l'on peut opérer dans le criſtal, il s'enſuit que la facette dont il s'agit, réſulte d'une loi de décroiſſemens ſur les bords des lames compoſantes. Reprenons le priſme de la *fig. 2*, qui repréſente une des molécules conſtituantes. Le parallélogramme *GOBR* eſt cenſé être ſitué parallèlement à la face *zaſoc* du criſtal, *fig. 3*, & le parallélogramme *BOAH* eſt parallèle au pan *dxlq*. De plus, l'angle *TOK* meſure l'inclinaiſon de *GOBR* ſur *BOAH*. Soit *TOKM* (*fig. 10*), le parallèlogramme formé par les ſections d'un plan coupant qui paſſeroit par *TO*, *OK*, *fig. 2*: En faiſant uſage des données indiquées ci-deſſus, on trouvera l'angle *TOK* de $68^{d}.30'$ $30''$. Suppoſons maintenant que les décroiſſemens qui donnent la facette dont il s'agit, ſe faſſent par des ſouſtractions de deux rangées de molécules. Soit *tmz* (*fig. 8*) le triangle menſurateur dans lequel on aura $tm = TM$ (*fig. 10*), $tmz = TMK = 68^{d}.30'.30''$, & par la ſuppoſition $mz = 2MK = TM$, comme je l'ai prouvé plus haut; donc l'angle *mzt*, ou ſon égal *mtz*, ſera de $55^{d}.44'$ $45''$. Ajoutant à cet angle la valeur de *TOK* (*fig. 10*) $= 68^{d}.30'$ $30''$, on a l'angle total de $124^{d}.15'$ $15''$ pour la meſure de l'inclinaiſon que forme la facette $\mu\varphi\xi\delta$ (*fig. 7*), ſur le plan *zaſo*μ, ce que confirme l'obſervation.

Quant à l'autre facette qui remplace l'angle ſolide *z*, quoiqu'elle ſoit différemment ſituée par rapport aux molécules intégrantes, elle a cependant, à l'égard du criſtal entier, la même poſition que la facette *μφξδ*, à laquelle elle eſt tout-à-fait ſemblable. Pour le concevoir, obſervons que les décroiſſemens qui donnent la facette *μφξδ*, étant rapportés au plan horizontal *DCAB (fig. 4)*, ſe font parallèlement à des lignes *ao*, *it*, *pω*, qui interceptent entr'elles deux rangées de molécules. Maintenant, ſi l'on mène *bz* parallèle à *ca*, la portion *cbza* de l'aſſortiment de rhombes, compriſe entre ces deux lignes, ſera égale & ſemblable aux parties *iaot*, *pitω*, renfermées entre les lignes qui meſurent les décroiſſemens relatifs à la facette *μφξδ (fig. 7)*: d'où l'on conclura que la facette correſpondante réſulte d'un décroiſſement ſur les angles des lames compoſantes, qui ſe fait parallèlement à *ca (fig. 4)*, par des ſouſtractions de deux rangées de molécules, & de plus que cette facette a la même inclinaiſon que l'autre. Je me borne ici à donner la poſition des facettes dont il s'agit; je m'abſtiendrai auſſi de donner le calcul des angles plans du criſtal. Ceux qui voudront vérifier les valeurs de ces angles, indiquées ci-deſſus dans le développement, trouveront toutes les données néceſſaires, parmi celles qui m'ont ſervi à déterminer les loix de décroiſſement auxquelles eſt aſſujettie la ſtructure du même criſtal.

Feld-ſpath à 6 pans, avec des ſommets à deux faces (fig. 9.).

Développement. Deux hexagones irréguliers *octqfh*; quatre trapèzes *oſgh*, *trlq*, diſpoſés des deux côtés de chaque hexagone; deux pentagones *zaſoc*, formant chacun l'une des faces ſituées au ſommet du priſme; deux autres pentagones *zertc*, formant chacun l'autre face du ſommet correſpondant.

Angles de l'hexagone *octgfh*. *oct* = *hfq* = 128^{d}

55'.40".*coh* = *fqt* = 115^{d}.0' 8".*o h f.* = *ctq* = 116^{d}.4' 12".

Angles du trapèze *ſohg*. *o ſ g* = 103 .7' 32". *ſoh* = 76^{d}.52'.28".*ohg* = 76^{d}.15'.17".*ſgh* = 103^{d}.44' 43".

Angles du pentagone *zaſoc*. *aſo* = 115^{d}.0' 8". *ſaz* = *ſoc* = 122^{d}.29' 56".*azc* = *ocz* = 90^{d}.

Angles du pentagone *zertc*. *ert* = 114^{d}.32' 30". *zer* = *ctr*.122^{d}.43' 45". *ezc* = *tcz* = 90^{d} *(e)*.

Il eſt facile de ſe former une juſte idée de ce criſtal, en le comparant avec celui de la *fig. 3*, qui eſt l'objet de l'*article précédent*. Suppoſons que dans ce dernier criſtal, les biſeaux *c o i g*, *z a v b*, &c. ſe trouvent ſupprimés, ainſi que les trapèzes *o i r n*, *e d q m*, & les deux qui leur correſpondent dans la partie oppoſée. On aura un ſolide à 6 pans, terminé par des ſommets à deux faces pentagones. Concevons de plus que le pentagone qui remplace l'ennéagone

(e) Les angles du trapèze *t r l q* ſont diſpoſés dans une ſituation renverſée par rapport à ceux du trapèze *ſ o h g*, comme cela a lieu pour le criſtal de la *figure 3*, c'eſt-à-dire, par exemple, que l'angle ſupérieur *o* du trapèze *ſ o h g* eſt égal à l'angle inférieur *q* du trapèze *t r l q*. On voit ici que les angles *c*, *h*, ſur la baſe de l'un quelconque des trapèzes dont il s'agit, ne diffèrent guère entr'eux de plus d'un demi-degré: il en eſt de même de quelques autres des angles cités, entre leſquels il ſe trouve des différences ſi légères, qu'il ſeroit difficile de les ſaiſir à l'aide d'un inſtrument; en ſorte qu'il ſemble qu'on auroit pu regarder ces angles comme égaux, & prendre les égalités pour données, ce qui ne laiſſeroit plus ſubſiſter les autres égalités que j'ai adoptées plus haut, comme baſe des calculs. Mais celles-ci m'ont paru s'accorder plus rigoureuſement avec la meſure des autres angles du criſtal, & d'ailleurs nous avons vu qu'une partie de ces égalités conduiſoit à déterminer des étendues égales, relativement à deux des faces de la molécule conſtituante, & une étendue double pour la troiſième; ce qui fournit une raiſon de préférer les égalités dont il s'agit, à celles qui ne ſont relatives qu'à des quantités ſecondaires, telles que des meſures d'angles qu'une nouvelle loi de décroiſſement peut faire varier.

bzcgedxhf, ſoit moins incliné ſur le pentagone adjacent que dans le cas préſent, en ſorte que les décroiſſemens qui donnent le pentagone dont il s'agit, ſe faſſent par deux rangées de molécules, au lieu de ſe faire par une rangée ſeulement; le criſtal qui réſultera de cette modification de ſtructure, ſera parfaitement ſemblable à celui de la *figure 9*.

Il n'y a donc ici autre choſe à faire que de chercher l'inclinaiſon reſpective des deux pentagones *zaſoc*, *zertc*, d'après la loi de décroiſſement indiquée. Soit *ogn* (*fig. 6*) le triangle menſurateur dans lequel nous aurons toujours $go = 3{,}000$. Quant à la ligne *on*, qui meſure la loi des décroiſſemens, elle ſera double de *of*, c'eſt-à-dire, que $on = 2\sqrt{(3)} = 3{,}4640$: d'ailleurs l'angle $gon = 64^{d}.\ 59'\ 52''$. Le triangle *ogn*, réſolu d'après ces valeurs, donne pour la meſure de l'angle *ogn*, $63^{d}.\ 55'\ 48''$, & par conſéquent l'angle *ign*, qui meſure l'inclinaiſon des deux faces du ſommet, dans le criſtal dont il s'agit ici, eſt de $64^{d}.\ 59'.\ 52'' + 63^{d}\ 55'\ 48'' = 128^{d}\ 55'\ 40''$, conformément à l'obſervation.

Il y a des criſtaux dans leſquels la partie du pentagone *zertc*, ſituée vers ſon extrémité *r*, eſt remplacée par un triangle qui a préciſément la même inclinaiſon que l'ennéagone *zbfhxdegc* (*fig. 3*). Cette modification qui réunit les deux loix de décroiſſement obſervées dans les criſtaux de forme ſecondaire que nous venons de conſidérer, eſt une des plus intéreſſantes que j'aie rencontrée, parmi les variétés nombreuſes que nous offre le feld-ſpath (*f*).

(*f*) *Nota.* J'ai dit, vers le commencement de ce Mémoire, que les coupes parallèles à *BOAH* (*fig. 2*) étoient très-difficiles à obtenir : on ſeroit même tenté de croire, d'après l'aſpect de quelques fragmens qui ſe détachent des feld-ſpaths de certains granits, que la face *BOAH* eſt perpendiculaire ſur *GOAD*, & j'ai été moi-même quelque temps dans cette opinion. Mais

ayant depuis répété mes épreuves un grand nombre de fois sur des cristaux qui avoient un certain degré de pureté, j'y ai observé des lames continues, & qui avoient un poli assez sensible, situées de la même manière que je l'ai indiqué dans l'explication de la *figure 2*. Au reste, les formes des cristaux du feld-spath ont cette propriété particulière, que la molécule dans laquelle les faces *BOAH, GOAD*, seroient perpendiculaires l'une sur l'autre, satisfait elle-même à la théorie; & si l'on se donne la peine d'en faire le calcul, on trouvera que les cristaux secondaires se déduisent de cette forme, par des loix simples & régulières de décroissement: mais l'observation détermine ici notre choix entre les deux formes dont il s'agit.



Fig. 2.

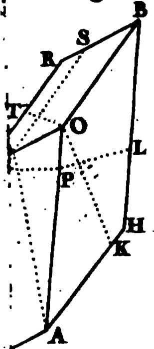


Fig. 3.

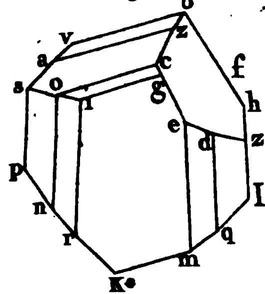


Fig. 5.

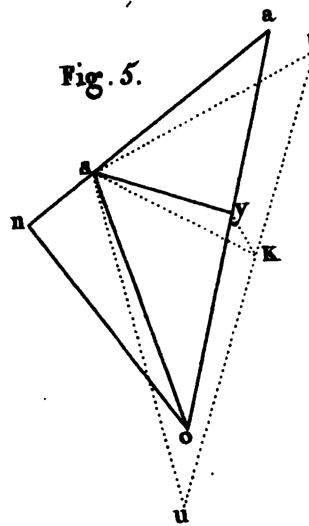


Fig. 7.

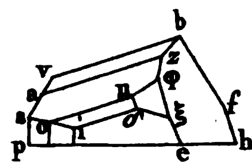


Fig. 10.

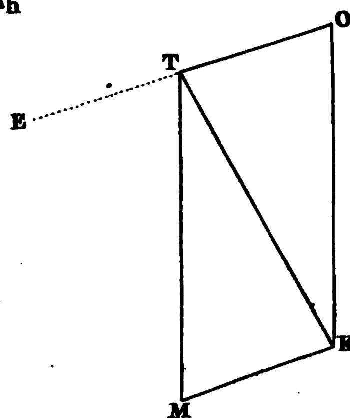
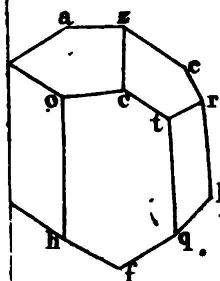


Fig. 9.



le G. sculp.

MÉMOIRE
SUR L'EFFET DE L'AIR INFLAMMABLE SUR LES CORPS ORGANISÉS.

Par M. SAGE.

ON ſavoit que l'air inflammable n'étoit point propre à entretenir la vie des animaux, mais on ignoroit qu'il eût la propriété de détruire & de diſſoudre le tiſſu animal. C'eſt à M. Charles que je dois la connoiſſance de ce fait: ce Phyſicien ayant mis des grenouilles dans des flacons remplis d'air inflammable, elles y perdirent promptement la vie, & au bout de quinze jours ou trois ſemaines, il les trouva réſoutes en un fluide d'un gris-rougeâtre. Les parties cartilagineuſes avoient auſſi été détruites, puiſque les os étoient tous ſéparés, comme on peut le reconnoître en regardant le flacon que je mets ſous les yeux de l'Académie. Lû le 24 Mars 1784.

Deſirant répéter l'expérience de M. Charles, j'ai mis une grenouille dans un flacon rempli d'air inflammable, le 15 Février de cette année; elle s'eſt tuméfiée, & il en ſortit une liqueur ſanguinolente dont la quantité augmente tous les jours. Si la diſſolution de cette grenouille eſt beaucoup plus lente que celle de M. Charles, c'eſt qu'il a fait ſes expériences dans le mois de Juillet.

M. Charles a reconnu que des grenouilles miſes dans des flacons remplis d'air nitreux, d'acide méphitique & d'air déphlogiſtiqué, y périſſoient, mais conſervoient leur forme ſans ſe réſoudre en fluide.

La diſſolution des corps organiſés, par le moyen de l'air inflammable, ſervira peut-être à faire connoître d'où proviennent les maladies dont on eſt attaqué, lorſqu'on habite des pays marécageux, dans des temps chauds.

Je terminerai cette obſervation en haſardant une conjecture ſur le mécaniſme de la digeſtion. Nous avalons, avec les ſubſtances qui nous ſervent d'aliment, une grande quantité d'air atmoſphérique qui ſe décompoſe dans l'eſtomac; l'air déphlogiſtiqué, qui en eſt principe, s'y convertiroit-il en air inflammable, ou modifieroit-il en air inflammable une portion de la matière huileuſe, principe des alimens? dans ce cas, l'air inflammable diſſolvant les viandes & les alimens, ne les rend-il point propres à ſe convertir en chyle?



EXPÉRIENCES

EXPÉRIENCES

Qui font connoître la néceſſité d'employer une grande quantité de Plomb pour extraire l'Argent contenu dans des terres.

Par M. SAGE.

DE toutes les opérations métallurgiques, ce ſont celles qui ont pour but l'extraction de l'or ou de l'argent, auxquelles on a porté le plus d'attention, à cauſe de la valeur de ces métaux. Ayant préſidé à une fonte qui a rendu pour quatre cents mille livres d'argent mêlé d'or, on fut obligé de faire uſage de beaucoup de creuſets de Paris, & d'autres de plombagine. Le nitre qui fut employé pour accélérer la fuſion du brûlé, détruiſoit promptement ces creuſets qui retenoient dans leurs pores des grenailles de fin; pour les extraire, on commença par pulvériſer & laver ces creuſets, enſuite on les paſſa au mercure, il reſta environ dix quintaux de cendrées; les ayant eſſayées, je trouvai qu'elles contenoient encore ſix marcs d'argent par quintal, tandis qu'après avoir paſſé au mercure, elles ne retiennent ordinairement guère plus d'une once de fin. Lû le 20 Nov. 1784.

Ceux qui font métier de fondre ces cendrées, n'ayant offert que deux ou trois louis de ces dix quintaux de cendrées, qui contenoient, d'après mes eſſais, environ pour mille écus d'argent mêlé d'or, je me déterminai à les traiter par la ſcorification & la coupellation.

Pour ſcorifier ces cendrées, j'en fis mêler dix quintaux avec quinze cents livres de chaux de plomb, huit cents livres de ſcories vitreuſes, & cinquante livres de chaux éteinte: je fis fondre ces trois mille cinq cents livres de matière dans un fourneau à manche, qui avoit ſix pieds de haut, huit pouces de large & dix-huit de long. Ce

mélange fut fondu en cinquante heures, & produisit six cents livres de plomb d'œuvre; il y a, comme on voit, plus de moitié de plomb de perdu, dont une partie s'est exhalée pendant la fonte, sous forme de massicot, l'autre s'est combinée avec les terres des creusets, & a déterminé leur vitrification.

Les six cents livres de plomb ayant été coupellées au fourneau allemand, rendirent quarante-huit marcs d'argent; mais ce produit n'étant pas relatif à celui que j'avois obtenu des cendrées, je m'assurai par l'essai, de la quantité de fin que contenoient les scories vitreuses, & je reconnus qu'elles produisoient quatre onces d'argent par quintal.

Les trois mille six cents livres du mélange de la première scorification, m'ayant fourni vingt quintaux de scories, je les fis mêler avec trois cents livres de litharge & quatre cents livres de crasse de plomb; cette seconde scorification fut faite en vingt-quatre heures, & produisit quatre cents livres de plomb d'œuvre: les scories étoient à l'état de verre verdâtre, semblable à celui des bouteilles de Sève.

Ces quatre cents livres de plomb ayant été coupellées, rendirent neuf marcs quatre onces d'argent: ces deux quantités réunies offrent un produit net, conforme à l'essai des cendrées.

Il résulte de ces expériences & de celles que j'ai faites en petit, qu'il faut au moins trois parties de chaux de plomb pour enlever l'argent qui se trouve mêlé avec une partie de terre.

Je dois prévenir qu'il faut préférer dans la scorification, la litharge à la crasse des plombiers, qui est une chaux de plomb souvent mêlée d'étain. Lorsque ce dernier métal se trouve avec le plomb, dans la proportion d'un quart, il est impossible de lithargirer le plomb, parce que la coupelle se hérisse, & quand on enlève la chaux d'étain avec le rincart, elle entraîne toujours une portion d'argent; d'ailleurs, le plomb qui reste sur la coupelle avec l'argent, retient toujours de l'étain qui empêche la coupelle de

passer. M'étant trouvé dans un cas semblable, j'ai affiné l'argent en le fondant à diverses reprises avec du nitre qui a calciné & scorifié le plomb & l'étain qui restoient dans le gâteau d'argent.

ANALYSE

D'une Mine de plomb terreuse, jaunâtre, antimoniale & martiale, en masse formée de différens lits, se trouvant par filons à Bonvillars en Savoie, à six lieues de Chambéri, sur la route de Piémont.

Par M. SAGE.

CETTE mine ayant été exposée au feu dans un têt, n'exhala aucune odeur; après avoir été tenue rouge pendant une demi-heure, elle a perdu dix livres par quintal. Dans cette expérience, il n'y a que l'eau qu'elle contient qui se dégage; on peut l'obtenir si l'on distille cette mine dans une cornue au fourneau de réverbère.

Si l'on mêle cette mine de plomb terreuse antimoniale avec de la poudre de charbon, & si on la calcine ensuite dans un têt, il s'en dégage de l'arsenic sous forme de vapeurs blanches; il s'exhale ensuite de l'acide sulfureux & des fleurs blanches d'antimoine. Cette expérience fait connoître que, dans cette mine, les terres métalliques y sont combinées avec les acides arsenical & vitriolique; acides qui sont fixes au feu, quand ils sont engagés dans des terres, & qu'ils ne sont pas combinés avec du phlogistique.

Ayant distillé de la mine de plomb terreuse antimoniale, avec de la poudre de charbon, il s'est sublimé dans

le col de la cornue un peu de régule d'arsenic mêlé d'orpin.

La mine de plomb terreuse antimoniale, ayant été réduite avec du flux noir & de la poudre de charbon, a produit, par quintal, cinquante-quatre livres d'un régule gris à facettes; il s'étend un peu sous le marteau, & s'y pulvérise.

Ce régule mixte, composé d'environ parties égales de plomb & d'antimoine, ayant été coupellé, l'antimoine a été rejeté, & a fait un bourlet d'un jaune-brunâtre * sur le bassin de la coupelle où il est resté une minicule d'argent.

* Il doit cette couleur à du fer.



OBSERVATION
SUR UNE SUBSTANCE
Ramaſſée aux pieds de jeunes Peupliers d'Italie.

Par M. l'abbé TESSIER.

LE 4 Juillet dernier, j'allai viſiter, ſur le ſoir, une pépinière royale qui eſt à une demi-lieue de la ville de Tours. En parcourant les différentes ſortes d'arbres qu'elle renfermoit, j'aperçus, dans un carré rempli de jeunes peupliers d'Italie, la ſurface de la terre couverte en partie d'une matière blanche, aſſez ſemblable de loin au greſil: c'étoit ſur-tout autour des pieds des plus jeunes peupliers que cette matière étoit en plus grande quantité; pour peu qu'on la touchât, ſes parties ſe diviſoient & ſe réuniſſoient comme des globules de mercure. Je ne lui trouvai qu'une foible odeur de miel, mais elle avoit la ſaveur ſucrée, & s'attachoit aux doigts ſi on la preſſoit. Lû le 28 Février 1784.

Les peupliers avoient ſept à huit pieds de hauteur au plus; leurs feuilles, à la partie ſupérieure, étoient pour la plupart enduites de la même matière qui paroiſſoit luiſante. Il s'y étoit formé un grand nombre de gales d'un rouge vermeil extérieurement, & remplies d'inſectes vivans, & d'une grande quantité de la matière que j'avois vue aux pieds des tiges.

J'ai remarqué que les rangées de peupliers, qui étoient le plus expoſées au ſoleil, étoient auſſi le plus environnées & couvertes de la ſubſtance dont il s'agit. Les autres arbres de la pépinière, de jeunes peupliers de la Caroline, des peupliers d'Italie même à tiges élevées, n'en avoient pas autour de leurs pieds.

Le temps ne me permit de ramaſſer que quelques gros

ou environ de cette ſubſtance; je les enfermai, avec la terre & les feuilles qui s'y étoient jointes, dans du papier qui eſt reſté ſur ma table pendant plus de quatre mois, ſans que la ſubſtance en ait reçu la moindre altération. M. Berthollet a bien voulu l'examiner; après l'avoir gardée auſſi quelque temps, il l'a fait diſſoudre dans l'eau & évaporer à petit feu. Sa couleur blanche, moins ſenſible dans le papier, où elle étoit mêlée à de la terre & à des inſectes, qu'aux pieds des arbres & ſur leurs feuilles, s'eſt perdue entièrement par l'évaporation, en ſorte que la matière qui en a réſulté eſt d'un brun-foncé: la concentration a rendu l'odeur de miel plus forte & la ſaveur plus douce. C'eſt une ſubſtance ſucrée, mêlée, à ce qu'il paroît, d'un peu de gomme; mais cette ſubſtance ſucrée a les caractères du véritable miel. On aperçoit quelquefois pendant l'été, ſur les feuilles de diverſes plantes, une matière blanche, pareille à celle qui fait l'objet de cette obſervation; on lui a donné le nom de *miellat.* Les melons & autres cucurbitacées élevées ſur des couches, y ſont particulièrement ſujets, comme j'ai eu occaſion de le voir, ſur-tout le matin; mais je ne crois pas que cette matière ſe rencontre en auſſi grande abondance que je l'ai trouvée dans la pépinière de Tours, ſur les feuilles & aux pieds des peupliers d'Italie, puiſque les feuilles de ces arbres, & la terre qui environnoit leurs tiges, en étoient pour ainſi dire couvertes.

C'eſt à la chaleur ſans doute qu'on doit attribuer cette extravaſion de la matière ſucrée des peupliers d'Italie; car elle a paru dans un pays dont la latitude eſt propre à cauſer une chaleur aſſez forte. La Touraine, comme on ſait, produit des fruits plus ſucculens que n'en produiſent les provinces qui s'écartent de ſa poſition; l'alberge & les prunes y ſont meilleures qu'ailleurs; le cardon, le chou-fleur & l'anis, plantes originaires des pays chauds, y donnent de bonnes graines: d'ailleurs, c'étoit au mois de Juillet, & dans une année regardée comme plus chaude que beaucoup d'autres. La matière ſucrée s'eſt trouvé mêlée à une

partie gommeuſe, ce qui n'eſt pas étonnant, vu l'analogie & les rapports de ces ſubſtances contenues dans les vaiſſeaux des arbres. Des inſectes, aſſurés d'une nourriture convenable pour leurs petits, ayant piqué les feuilles des peupliers en cet état, ont formé les gales que j'y ai vues.

Les abeilles ſont très-avides de la matière ſucrée qui s'extravaſe & s'amaſſe ſur les feuilles des végétaux; c'eſt un miel tout fait qui leur coûte moins à recueillir que celui qu'elles pompent dans les nectaires des fleurs. Auſſi voit-on, dans les momens où cette matière eſt abondante, leur activité au travail ſe renouveler; alors elles vont aux champs de grand matin, & ne ceſſent d'y aller que très-tard, comme ſi elles avoient du regret de ne pas tout ramaſſer. Les perſonnes qui ſoignent des ruches s'en aperçoivent, & ont ſoin d'y mettre des hauſſes que les abeilles rempliſſent en peu de temps. C'eſt ſans doute dans une circonſtance favorable par l'abondance du miellat répandu ſur les plantes, que le Curé du Tillay-le-Péleux, au rapport de M. Duhamel, retira quatre cents livres de miel d'un ſeul eſſaim, dont la ruche étoit poſée ſur un cuvier percé qui ſe trouva tout rempli de gâteaux.



OBSERVATION

Sur les ſuites d'une Grêle tombée le 25 Mai 1783, dans un canton de la Beauce.

Par M. l'Abbé TESSIER.

Lû en 1784.

LA grêle eſt un des fléaux que les cultivateurs redoutent le plus; elle leur enlève en un inſtant le fruit de leurs peines, les moyens de ſubſiſter & d'entretenir leurs beſtiaux; elle les met dans l'impuiſſance de ſatisfaire à leurs engagemens. C'eſt au vigneron, propriétaire de vignes, qu'elle fait le plus grand tort, parce que les vignes frappées de grêle, ſont quelquefois pluſieurs années ſans rapporter, ou ne rapportent que très-peu les années ſuivantes: le laboureur y perd ſeulement ſa récolte de l'année, perte toujours trop conſidérable pour lui. Les orages qui lancent la grêle, ont lieu le plus ſouvent, un mois ou environ avant le temps de la moiſſon, parce que c'eſt la ſaiſon des plus grandes chaleurs. Les grains, à cette époque, ſont formés dans les épis, les tiges fortes & capables de réſiſtance; auſſi la grêle les coupe-t-elle preſque toutes, ſi elle n'eſt pas accompagnée de beaucoup de pluie, & réduit des campagnes belles & riches, à l'état le plus triſte & le plus malheureux.

L'année dernière, qui fut remarquable par ſes brouillards, le fut encore par les orages multipliés & funeſtes qu'ils occaſionnèrent: on vit même avant que les brouillards paruſſent, la grêle exercer ſes ravages dans différens pays. Celle qui fait l'objet de cette obſervation, tomba le 25 Mai, dans un canton de la Beauce, que j'habite ſouvent; elle étoit groſſe & abondante; en quelques minutes, la plus grande partie des ſeigles & des fromens fut détruite entièrement: il ne reſta que quelques débris de paille, comme

comme après la récolte faite. Les autres grains, tels que les avoines, les orges, & ceux des prairies artificielles, n'étoient pas assez avancés pour en souffrir.

Les premières idées qui se présentèrent, furent de labourer les champs grêlés, & d'y semer des grains d'une végétation rapide; mais en y réfléchissant, on pensa que la terre, fortement battue par la grêle & par la pluie qui la suivit, ne pourroit être assez-tôt ameublie pour être ensemencée avec avantage: quelques particuliers seulement le tentèrent. Les laboureurs qui avoient de grandes exploitations, abandonnèrent ce projet, & préférèrent de ne point interrompre leurs autres travaux, espérant d'ailleurs que l'année suivante ils en seroient dédommagés en partie par une augmentation de produit en avoine dans ces mêmes champs.

Bientôt après on vit de nouvelles tiges s'élever à la place de celles qui avoient été détruites, & en plus grand nombre même que les premières. En un mois elles parvinrent à la hauteur ordinaire, & l'on ne s'aperçut plus des effets de la grêle dans les champs de froment, où elle n'avoit rien épargné; dans ceux où une partie des tiges avoit été conservée, les repousses formoient avec elles un contraste de vert & de jaune, capable d'étonner le voyageur. Il n'y avoit pas une seule repousse dans les champs de seigle, trop avancés quand la grêle survint, pour fournir de nouvelles tiges; on sait d'ailleurs que le seigle a moins de facilité pour taller, que le froment.

Le temps fut favorable à la végétation des repousses de froment; de fréquens orages amenèrent des pluies chaudes très-avantageuses; chaque souche produisit trois ou quatre tiges, plus fines que les premières. Il s'y forma des épis aussi beaux, qui fleurirent à la fin de Juin & au commencement de Juillet, c'est-à-dire, un mois après le terme ordinaire de la floraison du froment.

Ce seroit ici le lieu de peindre la satisfaction du laboureur, dont l'espérance renaissoit à la vue d'une récolte inattendue: on se la représente facilement, & je dois m'occuper

plus particulièrement des faits physiques. Les laboureurs, dont les champs avoient été le plus maltraités, se regardoient comme les mieux partagés, parce que tout ayant repoussé, ils ne devoient pas craindre, en attendant la maturité des nouveaux épis, de perdre le grain contenu dans les anciens, plus hâtifs de beaucoup; c'étoit ce que craignoient avec raison ceux dont les champs n'avoient été grêlés qu'à moitié ou au quart.

Tout se passa bien jusqu'au 1.er Août; ce jour-là, & les suivans, il fit une chaleur considérable, accompagnée d'un vent du sud, qui en accélérant trop promptement la dessiccation des tiges de repousses, échauda les grains, qui restèrent petits & retraits. On commença à les couper vers le 18 Aout.

Persuadé qu'il seroit intéressant de suivre jusqu'au bout cette observation que je me suis trouvé à portée de faire, j'ai comparé entr'eux les produits des récoltes des champs de même nature, dont les uns ont repoussé de nouvelles tiges, après avoir été ravagés par la grêle, & les autres ont été à l'abri de ce fléau.

Un arpent de terre qui n'a point été exposé à la grêle, communément l'année dernière, année moins abondante qu'on ne l'a cru, a produit vingt douzaines de gerbes, qui ont rendu par douzaine deux boisseaux de froment, mesure de Paris, ou trois setiers & un tiers de setier. Un arpent de terrein grêlé a fourni à peu-près la même quantité de gerbes, mais on n'en a obtenu qu'un boisseau de froment par douzaine, ou un setier & demi & un sixième de setier par arpent.

Chaque gerbe d'un champ non grêlé, contenoit environ neuf livres de paille; chaque gerbe d'un champ grêlé, n'en contenoit que sept: celle-ci étoit beaucoup plus fine, plus tendre & plus agréable aux bestiaux. J'observerai ici que les bêtes à laine ne veulent ni la paille de blé, ni les herbes des prairies hachées par la grêle, quelque soin qu'on prenne pour les y forcer.

Quatre boiſſeaux & un quart de froment non grêlé, peſoient quatre-vingt-cinq livres, ou vingt livres par boiſſeau; la même meſure de froment grêlé, étoit du poids de quatre-vingt-deux livres, c'eſt-à-dire, peſoit trois livres de moins; ce qui fait par ſetier une différence de ſept à huit livres: ce dernier froment étoit plus petit & plus maigre.

J'ai fait moudre, avec toute l'attention poſſible, les quatre-vingt-cinq livres de froment non grêlé; ils ont produit cinquante-ſix livres de farine blanche, huit livres & demie de farine biſe, huit livres de recoupe & huit livres de ſon. Le froment grêlé, peſant quatre-vingt-deux livres, a auſſi été moulu de la même manière; on en a retiré cinquante-ſix livres de farine plus blanche que la précédente, huit livres de farine un peu plus biſe que la précédente, dix livres de recoupe & ſept livres de ſon: les gruaux des farines blanches ont été moulus deux fois, & ceux des farines biſes une fois.

Les pains que j'ai fait faire avec deux livres de chacune de ces quatre farines & ſix onces de levain, étoient, pour la blancheur, conformes à celle des farines dont ils avoient été formés. La farine blanche du blé grêlé eſt celle qui, au pétriſſage, a abſorbé le plus d'eau; il lui en a fallu une once & demie & un demi-gros de plus, c'eſt-à-dire, une livre ſix onces & cinq gros & demi, au lieu d'une livre cinq onces & un gros qu'on a employés pour chacune des autres. Je ne ſuis pas aſſez ſûr du poids des pains pour en faire mention ici; ils étoient bien levés & de bon goût: les deux blancs m'ont paru avoir une ſaveur égale.

Cette obſervation n'a rien ſans doute de très-important en ſoi, mais elle offre un fait phyſique obſervé avec attention, & mieux ſuivi peut-être qu'il ne l'a encore été; ſous ce point de vue, j'ai cru qu'il méritoit d'être conſervé. On en peut conclure que, quand la grêle ravage des champs avant l'époque où les grains ſont formés dans les épis, il y a lieu d'eſpérer que ſi le temps eſt favorable, il repouſſera d'autres tiges qui produiront du grain de bonne qualité: alors les vaiſſeaux des racines ne ſont pas encore oblitérés,

& peuvent élever de la terre les ſucs ou l'humidité néceſſaires à la formation de nouvelles tiges; ce qui ne peut avoir lieu que dans un bon terrein comme celui dont il s'agit dans cette obſervation, un terrein de mauvaiſe qualité ſeroit trop épuiſé pour procurer le même avantage. Il faut encore ſe rappeler que l'année dernière a été ſingulièrement favorable à une ſeconde végétation, par les pluies chaudes & fréquentes qui ſont tombées; en ſorte que dans une année sèche, telle que celle-ci, par exemple, où, dans quelques endroits du pays Chartrain, on n'a pas eu de pluie depuis plus de quatre mois, les repouſſes euſſent été foibles, & n'euſſent vraiſemblablement porté que des épis imparfaits. Des particuliers ont retourné leurs champs immédiatement après la grêle, pour y ſemer de l'orge, ils n'en ont preſque pas récolté, parce que la ſaiſon étoit trop avancée; d'autres ont préféré d'y ſemer de la veſce, qu'ils ont fait manger en herbe à leurs beſtiaux; mais ceux qui ont tout abandonné à la Nature, me paroiſſent avoir gagné davantage, puiſque indépendamment du fourrage, ils ont retiré une certaine quantité de froment.



EXAMEN

DE LA DERNIÈRE RÉVOLUTION DE JUPITER,

Et des élémens actuels de son orbite.

Par M. DE LA LANDE.

DEPUIS l'impression de mes Tables astronomiques, en 1771, j'ai continué d'examiner les oppositions des Planètes, pour constater les élémens que j'avois adoptés, ou reconnoître les variations qui pourroient y arriver. Jupiter & Saturne, sont les deux Planètes les plus susceptibles de dérangement à cause de la lenteur de leur mouvement; il y faudra joindre la planète de Herschel, lorsque nous l'aurons observée assez long-temps pour apercevoir ses inégalités. Celles de Jupiter, produites par l'action de Saturne, ont été calculées par M. Euler (*Prix de 1752*), & par Mayer, (*Connoissance des Temps, 1763 & 1764* *). M. Wargentin, avoit employé dans ses Tables de Jupiter, ces inégalités, & en les publiant dans mon *Astronomie*, en 1771, j'avois adopté, comme M. Wargentin, une augmentation de 2′ 15″ par siècle, dans l'équation de l'orbite de Jupiter, avec des perturbations produites par l'action de Saturne, dont la plus forte étoit de 4′ 38″, & dont la somme va jusqu'à 10′ 14″; mais je vois que tout cela ne sauve point les inégalités, & je trouve encore 5′ d'erreur dans l'opposition de 1784. Je crois donc qu'il est plus naturel de laisser encore aux Tables leur ancienne simplicité, & de chercher les élémens de l'orbite de Jupiter en la supposant purement elliptique; mais en variant & combinant un grand nombre d'oppositions dans les divers

Lû le 24 Nov. 1784.

* Dans le volume de 1763, *page 128*, il faut changer les signes des Tables II & III.

points de l'orbite, & les différentes configurations avec Saturne. La méthode que j'ai donnée dans les *Mémoires de 1775, page 232*, est si simple, si courte & si commode, elle donne tous les élémens de l'orbite en si peu de temps, que l'on ne doit pas négliger de repasser souvent les orbites des Planètes; c'est ainsi que l'on parviendra à déterminer les valeurs moyennes des élémens, indépendamment des perturbations, & qu'on reconnoîtra les dérangemens qui pourroient y survenir.

Celui que j'ai indiqué dans le mouvement de Saturne, (*Mémoires de l'Académie, 1765, page 361*), est si considérable, qu'il est à craindre que nous n'en trouvions par la suite un pareil dans le mouvement de Jupiter; c'est ce que M. Wargentin me paroissoit soupçonner dans une lettre qu'il m'écrivit le 12 Janvier 1781, où il me disoit: *une irrégularité dans le lieu de Jupiter lui-même, qui a lieu depuis 1773, est en partie cause de l'irrégularité apparente des Satellites.* C'est ce que j'ai voulu vérifier par les recherches dont je rendrai compte dans ce Mémoire, où l'on verra que l'irrégularité est peu sensible.

Voici trois oppositions observées dans les deux apsides, & dans un des points de la plus grande équation.

ANNÉES.	MOIS & JOURS.	TEMS MOYEN de l'opposit.	LONGITUDE sur L'ÉCLIPTIQUE.	Réduct.	CORRECT. des TABLES.	ANOMALIE moyenne des TABLES.	MOUVEMENS OBSERVÉS.
		H. S.	S. D. M. S.	S.	M. S.	S. D. M. S.	S. D. M. S.
1773.	Sept. 26	15. 17	0. 4. 16. 49	+ 4	+ 0. 52	5. 24. 5. 33	3. 15. 55. 51.
1777.	Janv. 9	12. 28	3. 20. 12. 33	+ 11	— 1. 13	9. 3. 52. 11	3. 2. 0. 57.
1780.	Avril 11	1. 40	6. 22. 13. 54	— 13	— 4. 8	0. 12. 32. 20	
							6. 17. 56. 48.

A la suite des longitudes observées par rapport à l'écliptique, j'ai mis les réductions qu'il faut employer pour les réduire à l'orbite de Jupiter; ensuite la correction de mes Tables, ou la quantité qu'il faut y appliquer pour avoir les longitudes observées, mais sans avoir égard aux perturbations, ni à l'augmentation de l'équation, depuis 1760.

J'ai mis ensuite l'anomalie moyenne de Jupiter, suivant mes Tables, pour servir à mes différentes hypothèses; enfin les mouvemens observés, ou les différences des longitudes vraies sur l'orbite, qui doivent être représentées exactement, & servent à vérifier mes hypothèses.

Première hypothèse. Avec des anomalies & les équations qui sont dans mes Tables, je trouve le mouvement total de 1773 à 1780, trop fort de 4′ 54″, comme on le voit par la somme des erreurs des Tables qui sont en sens contraire.

En diminuant l'aphélie, ou augmentant les anomalies moyennes, de 20′, je trouve cet excès diminué de 3′ 51″.

Ainsi, pour le faire disparoître en entier par le seul changement de l'aphélie, il faut ajouter 25′ 27″ aux anomalies; la plus grande équation étant supposée comme dans mes Tables, de 5^d 34′ 1″.

Seconde hypothèse. Avec les anomalies augmentées de 25′ 27″, & les Tables d'équations qui sont dans Halley, je ne trouve plus le mouvement trop fort que de 12″, entre 1773 & 1780. Pour corriger cet excès, je trouve qu'il suffit d'ajouter encore 1′ 2″ de plus aux anomalies, c'est-à-dire, en total, 26′ 29″; la plus grande équation étant comme dans Halley, 5^d 31′ 36″.

Troisième hypothèse. Ayant calculé la seconde observation, ou la longitude pour 1777, dans chacune de ces deux hypothèses qui satisfont au mouvement total, 6^f 17^d 56′ 48″; je trouve dans la première hypothèse, que le mouvement de 1773 à 1777, seroit trop petit de 51″,

& dans la seconde hypothèse, de 3′ 36″, ce qui fait 1′ 45″ de plus. Ainsi ces deux hypothèses qui diffèrent de 1′ 2″ pour les anomalies, & de 2′ 23″ pour la plus grande équation, produisent 2′ 45″ de différence pour le mouvement de 1773 à 1777. Par le moyen de deux petites proportions, je trouve que, pour augmenter de 51″, ce mouvement, & corriger l'erreur de la première hypothèse, il faut augmenter l'équation de 45″, & diminuer de 19″ la correction de l'aphélie; & par-là on satisfera au mouvement 3ˢ 15ᵈ 55′ 51″, comme au mouvement total, 6ˢ 17ᵈ 56′ 48″.

Pour calculer les trois longitudes avec des anomalies augmentées de 25′ 8″, & avec la plus grande équation 5ᵈ 34′ 46″, il faut augmenter les trois équations de 5″, de 45″ & de 9″, à proportion de la différence qu'il y a entre les Tables de Halley & les miennes. C'est le moyen le plus facile d'avoir promptement les équations comme on le voit dans la Table ci-dessous, où j'ai mis pour trois degrés d'anomalie moyenne, les équations de Jupiter, suivant mes Tables & suivant celles de Halley.

ANOMAL. MOYENNE.	ÉQUATIONS. Mes TABLES.	ÉQUATIONS. HALLEY.	POUR 45 secondes de DIFFÉRENCE.
S. D.	D. M. S.	D. M. S.	S.
5. 24	0. 37. 9	0. 36. 52	5.
9. 4	5. 31. 14	5. 28. 51	45.
0. 13	1. 10. 54	1. 10. 26	9.

Par les quantités dont ces équations diffèrent, on trouve aisément de combien différeroient celles qui supposeroient pour

pour la plus grande équation 45″ de plus que ma Table; par exemple, pour $5^{s}\ 24^{d}$, les équations diffèrent de 17″ dans les deux Tables, où la plus grande équation diffère de 2′ 23″; donc pour 45″, il y auroit 5″, & l'équation seroit 37′ 14″ dans une nouvelle Table que l'on auroit dressée d'après cette plus grande équation, 5^{d} 34′ 46″.

Ayant ainsi calculé les trois longitudes, je les trouve plus grandes de 1′ 39″ que celles qui ont été observées; c'est ce qu'il faudroit ôter des époques de Jupiter, dans mes Tables, pour satisfaire aux trois oppositions que je viens d'employer, en même temps qu'on ajouteroit 45″ à la plus grande équation, & qu'on ôteroit 24′ 57″ de l'aphélie.

Voici trois autres oppositions de Jupiter, dont les lieux sont assez voisins des apsides & du point de la plus grande équation, pour pouvoir donner assez bien les mêmes élémens.

ANNÉES.	MOIS & JOURS.	TEMPS MOYEN de l'opposit.	LONGITUDE sur L'ÉCLIPTIQUE.	REDUCT.	CORRECT. des TABLES.	ANOMALIE moyenne de JUPITER.
		H. M.	S. D. M. S.	S.	M. S.	S. D. M. S.
1779.	Mars 12	12. 31	5. 22. 18. 37	+ 14	− 4. 0	11. 9. 40. 28.
1782.	Juin 14	17. 14	8. 24. 6. 40	− 14	− 0. 31	2. 18. 33. 49.
1784.	Août 25	2. 21	11. 2. 54. 4	+ 26	+ 2. 37	4. 25. 13. 51.
		2. 10½	11. 2. 53. 40.	M. MALLET.		

En faisant les mêmes calculs avec ces trois longitudes, j'ai trouvé qu'il faudroit ôter 47″ des époques de mes Tables, 1′ 6″ de la plus grande équation, & 33′ 12″ du lieu de l'aphélie.

Si l'on prend un milieu entre ces deux résultats, on aura les élémens qui répondent le mieux à la dernière

révolution de Jupiter, en ôtant 1′ 12″ des époques de mes Tables, 11″ de la plus grande équation & 29′ de l'aphélie. Cette dernière correction est un peu forte; elle peut produire trois minutes d'erreur sur le lieu de Jupiter; mais on ne peut guère assurer, quant à présent, que ce soit une irrégularité survenue dans le mouvement de Jupiter, puisque les meilleures Tables ne représentoient pas les révolutions précédentes avec une plus grande exactitude.

Les deux principales corrections de mes Tables, sont en sens contraire de celles de Halley, comme on le peut voir par la comparaison suivante; d'où il résulte que mes Tables sont plus exactes pour Jupiter, que celles de ce grand Astronome, en négligeant comme lui les perturbations de cette Planète.

	LONGITDUE MOYENNE en 1780.	APHÉLIE.	ÉQUATION.
	S. D. M. S.	S. D. M.	D M. S.
Dans les Tables de Halley..	6. 15. 4. 14	6. 11. 10	5. 31. 36.
Dans mes Tables........	6. 15. 2. 1	6. 10. 54	5. 34. 0.
Suivant ce Mémoire.....	6. 15. 0. 49	6. 10. 24	5. 33. 49.

Je prouverai ailleurs la même supériorité pour mes Tables des autres Planètes; cela n'est pas surprenant, puisque j'ai été à portée d'employer des observations plus nombreuses & plus récentes.

Pour qu'on puisse mieux juger des inégalités de Jupiter, je vais donner ici la comparaison de mes Tables, avec les quatre-vingt-quinze oppositions observées depuis un siècle, c'est-à-dire, la quantité qu'il faut appliquer au calcul pour l'accorder avec l'observation. J'y ai joint l'anomalie de Jupiter & sa distance vraie à Saturne. Par ce moyen, l'on

verra l'influence que peuvent avoir sur le progrès de ces erreurs, & les élémens de l'orbite de Jupiter, & l'attraction de Saturne. Cette Table est le premier secours qu'on doit se préparer pour discuter les élémens de la Planète qui nous occupe.

ERREURS des Tables de Jupiter, en négligeant les perturbations.

ANNÉES.	ERREURS.		ANOMALIES de JUPITER.			DISTANCES de JUPITER à Saturne.		
	M.	S.	S.	D.	M.	S.	D.	M.
1680.	− 2.	13	7.	27.	25	10.	23.	41.
1682.	− 2.	6	9.	0.	31	11.	13.	1.
1683.	− 1.	4	10.	3.	29	0	0.	12.
1684.	+ 0.	36	11.	6.	21	0.	16.	34.
1685.	+ 1.	6	0.	9.	13	1.	2.	41.
1686.	+ 1.	2	1.	12.	9	1.	19.	24.
1687.	− 0.	17	2.	15.	2	2.	7.	32
1688.	− 2.	34	3.	18.	26	2.	27.	38.
1689.	− 4.	46	4.	21.	50	3.	21.	2.
1690.	− 5.	7	5.	25.	18	4.	14.	15.
1691.	− 4.	33	6.	28.	43	5.	8.	41.
1692.	− 1.	22	8.	1.	59	6.	2.	9.
1694.	+ 0.	55	9.	5.	4	6.	23.	46.
1695.	+ 2.	39	10.	8.	1	7.	13.	32.
1696.	+ 2.	46	11.	10.	53	8.	2.	1.
1697.	+ 1.	56	0.	13.	45	8.	19.	53.
1698.	+ 1.	27	1.	16.	41	9.	7.	51.
1699.	− 0.	50	2.	19.	46	9.	27.	2.
1700.	− 3.	17	3.	23.	2	10.	17.	35.
1701.	− 2.	1	4.	26.	26	11.	9.	50.
1202.	+ 0.	27	5.	29.	55	0.	3.	0.
1703.	+ 0.	40	7.	3.	19	0.	25.	47.
1704.	+ 1.	58	8.	6.	33	1.	16.	53.
1706.	+ 2.	27	9.	9.	37	2.	5.	44.
1707.	+ 1.	30	10.	12.	32	2.	23.	35.
1708.	+ 0.	25	11.	15.	24	3.	8.	14.

ANNÉES.	ERREURS.	ANOMALIES de JUPITER.	DISTANCES de JUPITER à Saturne.
	M. S.	S. D. M.	S. D. M.
1709.	+ 0. 16	0. 18. 16	3. 23. 3.
1710.	+ 0. 22	1. 21. 14	4. 8. 48.
1711.	+ 2. 6	2. 24. 20	4. 25. 50.
1712.	+ 3. 31	3. 27. 38	5. 14. 59.
1713.	+ 4. 39	5. 1. 4	6. 6. 16.
1714.	+ 5. 57	6. 4. 32	6. 29. 1.
1715.	+ 3. 3	7. 7. 54	7. 21. 47.
1716.	+ 2. 17	8. 11. 7	8. 13. 32.
1718.	+ 0. 48	9. 14. 9	9. 3. 38.
1719.	− 1. 51	10. 17. 4	9. 22. 20.
1720.	+ 2. 7	11. 19. 55	10. 10. 14.
1721.	+ 4. 16	0. 22. 48	10. 28. 8.
1722.	+ 2. 55	1. 25. 47	11. 16. 43.
1723.	+ 4. 8	2. 28. 55	0. 6. 46.
1724.	+ 2. 10	4. 2. 13	1. 8. 43.
1725.	+ 6. 8	5. 5. 40	1. 22. 33.
1726.	+ 1. 37	6. 9. 8	2. 17. 4.
1727.	− 3. 12	7. 12. 29	3. 11. 2.
1728.	− 0. 57	8. 15. 40	4. 3. 13.
1730.	− 2. 50	9. 18. 41	4. 23. 10.
1731.	− 2. 20	10. 21. 35	5. 11. 13.
1732.	− 1. 13	11. 24. 26	5. 27. 59.
1733.	+ 0. 14	0. 27. 20	6. 14. 18.
1734.	+ 3. 3	2. 0. 20	7. 1. 4.
1735.	+ 4. 14	3. 3. 29	7. 18. 53.
1736.	+ 2. 39	4. 6. 49	8. 8. 23.
1738.	− 0. 19	6. 13. 43	9. 21. 12.
1739.	− 0. 56	7. 17. 4	10. 12. 23.
1740.	− 1. 22	8. 20. 13	11. 2. 4.
1742.	− 1. 8	9. 23. 13	11. 20. 0.
1743.	− 0. 9	10. 26. 7	0. 6. 46.
1744.	+ 0. 28	11. 28. 58	0. 23. 30.
1745.	+ 1. 3	1. 1. 52	1. 9. 32.
1746.	− 1. 36	2. 4. 53	1. 27. 12.
1747.	− 5. 0	3. 8. 3	2. 16. 45.

ANNÉES.	ERREURS.	ANOMALIES de JUPITER.	DISTANCES de JUPITER à Saturne.
	M. S.	S. D. M.	S. D. M.
1748.	— 7. 19	4. 11. 24	3. 8. 34.
1749.	— 8. 49	5. 14. 52	4. 2. 20.
1750.	— 7. 17	6. 18. 19	4. 27. 50.
1751.	— 5. 33	7. 21. 38	5. 21. 27.
1752.	— 0. 51	8. 24. 47	6. 13. 8.
1754.	+ 1. 34	9. 27. 45	7. 3. 28.
1755.	+ 1. 46	10. 0. 38	7. 22. 14.
1756.	+ 1. 4	0. 3. 30	8. 10. 9.
1757.	— 0. 19	1. 6. 24	8. 28. 2.
1758.	— 2. 49	2. 9. 26	9. 16. 58.
1759.	— 5. 30	3. 12. 38	10. 6. 35.
1760.	— 6. 37	4. 16. 0	10. 28. 14.
1761.	— 4. 8	5. 19. 29	11. 21. 9.
1762.	4. 19	6. 22. 55	0. 14. 5.
1763.	— 1. 52	7. 26. 13	1. 5. 43.
1765.	— 0. 56	8. 29. 19	1. 25. 10.
1766.	— 1. 3	10. 2. 17	2. 12. 30.
1767.	— 1. 58	11. 5. 9	2. 28. 19.
1768.	— 2. 54	0. 8. 1	3. 13. 23.
1769.	— 3. 31	1. 10. 56	3. 28. 46.
1770.	— 3. 52	2. 14. 0	4. 15. 20.
1771.	— 2. 9	3. 17. 14	5. 3. 49.
1772.	— 0. 9	4. 20. 37	5. 24. 45.
1773.	+ 0. 55	5. 24. 6	6. 17. 6.
1774.	+ 0. 18	6. 27. 31	7. 10. 10.
1775.	+ 0. 40	8. 0. 47	8. 2. 27.
1777.	— 1. 4	9. 3. 54	8. 23. 7.
1778.	— 2. 45	10. 6. 49	9. 12. 19.
1779.	— 3. 58	11. 9. 40	10. 0. 23.
1780.	— 4. 11	0. 12. 32	10. 18. 15.
1781.	— 2. 24	1. 15. 31	11. 7. 37.
1782.	— 0. 32	2. 18. 34	11. 27. 6.
1783.	— 3. 24	3. 21. 54	0. 17. 37.
1784.	+ 2. 37	4. 25. 14	1. 10. 49.
1785.	+ 0. 43	5. 28. 42	2. 5. 21.

J'ai supposé 20′ d'erreur dans la longitude de 1727, rapportée par M. Cassini, comme l'indique le temps de l'opposition.

En comparant les années 1725 & 1784, dans lesquelles Jupiter & Saturne étoient à peu-près à pareilles situations, on voit que l'erreur des Tables a diminué de 4′, ce qui indiqueroit une diminution à faire sur le moyen mouvement de Jupiter, employé dans mes Tables.

En comparant 1690 & 1749, 1714 & 1773, on trouve aussi une différence de 4′; ainsi depuis un siècle, le mouvement de Jupiter paroît toujours le même. Il n'y a qu'une seule erreur qui passe 7′, c'est celle de 1749; il est vrai qu'il n'y a pour cette opposition, qu'une seule observation du passage de Jupiter *(Mém. de 1754, p. 326)*. Mais l'erreur surpasse à peine de 4′ celle qui avoit lieu cinquante-neuf ans auparavant; ainsi elle diminueroit si l'on faisoit le mouvement plus petit. Cependant, on augmenteroit par-là celle de 1725, qui est déjà très-forte, mais elle seroit au moins la seule. Ainsi cela n'empêche pas que je ne regarde le mouvement de Jupiter comme étant réellement plus petit que dans mes Tables, du moins dans ce siècle-ci, quoique Halley l'ait fait un peu plus grand.

Enfin, on ne voit rien dans ces erreurs, qui ne puisse être attribué, soit au défaut dans les élémens de Jupiter, soit à l'attraction de Saturne, & rien n'indique une altération sensible dans le mouvement de Jupiter, dans la dernière révolution, ni même dans ce siècle-ci.

Depuis la lecture de ce Mémoire, M. de la Place a reconnu, en 1786, par la théorie, une équation d'environ vingt minutes, dont la période est de huit cents soixante-dix-sept ans, & qui est produite par l'action de Saturne. Elle servira probablement à expliquer, non-seulement, l'équation séculaire de Jupiter, mais encore une partie des inégalités qu'on aperçoit dans la Table précédente.

Je terminerai ce Mémoire, en rapportant le calcul que

j'ai fait des anciennes obſervations de Jupiter, qui ſont dans l'Almageſte, pour en conclure le mouvement moyen de Jupiter, en faiſant aux obſervations les corrections que j'ai expliquées *(Mémoires de 1766, page 467.)* J'y ai ajouté la parallaxe annuelle & l'équation de l'orbite, afin d'avoir la longitude moyenne déduite de l'obſervation & la quantité dont elle diffère de celle des Tables. Cette quantité que l'on a appelée juſqu'ici *équation ſéculaire*, eſt produite, ſuivant M. de la Place, par cette équation de 20′, dont la période eſt d'environ huit cents ſoixante-dix-ſept ans; mais en attendant qu'on puiſſe appliquer cet élément aux obſervations anciennes, j'ai mis dans la dernière colonne de la Table ſuivante, le nombre de ſecondes qu'il faudroit ôter du mouvement annuel de mes Tables, $30^d\,20'\,37'',68$, ſuivant chacune de ces obſervations.

ANNÉES.	MOIS & JOURS.	TEMPS moyen à PARIS.	LIEU OBSERVÉ corrigé.	Parallaxe annuelle.	ÉQUAT. de l'ORBITE.	LONGIT. MOYENNE déduite de l'Obſervation.	DIFF. des Tables	Chang. du mouv. ann.
		H. M.	S. D. M.	D. M.	D. M.	S. D. M.	D. M.	S.
Av. J. C. 240	Sept. 3	13. 45	3. 7. 6	— 9. 25	— 4. 31	2. 23. 10	3. 9	5,67.
Ap. J. C. 133	Mai 17	9. 8	7. 24. 13	+ 0. 4	+ 4. 45	7. 29. 2	2. 10	4,79.
136	Août 31	8. 8	11. 8. 57	— 0. 28	+ 0. 20	11. 8. 49	1. 55	4,23.
137	Oct. 7	15. 8	0. 15. 26	— 0. 20	— 2. 35	0. 22. 31	2. 10	4,78.
139	Juill. 10	15. 8	2. 16. 49	— 5. 34	— 4. 57	2. 6. 18	2. 34	5,66.

Le milieu, entre les cinq réſultats eſt 5″,02, ce qui donne pour le mouvement annuel moyen $1^f\,0^d\,20'\,32'',66$, plus petit de 1″ ⅓ ſeulement, que dans les Tables de M. Caſſini.

Le mouvement annuel que j'ai conclu de ces obſerva-

tions, exigera quelques corrections relativement aux perturbations, mais c'est du moins la quantité qu'il faut employer d'abord pour connoître la période de la nouvelle équation; sauf à rectifier le moyen mouvement lorsqu'on connoîtra les changemens de l'aphélie, de l'excentricité & de la longitude moyenne, que l'action de Saturne a dû produire dans le mouvement de Jupiter.

J'ai fait de semblables calculs pour le mouvement annuel de Saturne, que j'ai trouvé par les anciennes observations, 12^d 13′ 34″,48. Cinq fois ce mouvement & deux fois celui de Jupiter, donnent des quantités qui ne diffèrent que de 26′ 47″, ce qui ne feroit 360^d qu'au bout de huit cents six ans; telle est à peu-près la période de l'équation qui peut résulter de cette configuration des deux Planètes, ou de cinq fois le mouvement de Saturne, moins deux fois celui de Jupiter. Ce n'est-là qu'un premier essai, puisque l'équation dont il s'agit est le résultat de plusieurs autres, & qu'elle dépend de l'excentricité, qui est variable, du mouvement de l'aphélie, qui n'est pas uniforme; mais les observations que je viens de rapporter avec les corrections que j'y ai faites, sont les données auxquelles il faudra tâcher de satisfaire par la théorie.



MÉMOIRE

MÉMOIRE
CONTENANT LES OBSERVATIONS DE LA PREMIÈRE COMÈTE DE 1784,
Observée à Paris, de l'observatoire de la Marine (a); & de la seconde Comète observée à Malte (b).

Par M. MESSIER.

M. LE COMTE DE CASSINI découvrit cette Comète à la simple vue, le 24 Janvier, vers les 6 heures & demie du soir, près de la queue de la Baleine, formant un triangle à peu-près isocèle avec β & l'étoile ι de la queue: elle paroissoit alors dans le voisinage de la Lune, qui étoit dans son premier quartier. La Comète avoit une queue de deux degrés environ de longueur; le diamètre du noyau avoit une demi-minute.

Le lendemain 25, M. le Comte de Cassini me fit part de la découverte de cette Comète, & des circonstances que je viens de rapporter.

Le mouvement de la Comète, le 24, par une seule observation, n'avoit pu se reconnoître, de manière qu'on ignoroit la direction de la route qu'elle devoit tenir dans le ciel.

Depuis le 24, jour où elle fut découverte, jusqu'au 3 Février suivant, le ciel fut constamment couvert le jour & la nuit d'un brouillard très-épais: pendant cet intervalle

(a) C'est la vingt-deuxième des Comètes que j'ai observées de l'observatoire de la Marine, à l'hôtel de Clugny; & la soixante-neuvième Comète, dont l'orbite ait été calculée, en suivant la Table des Comètes, qui est rapportée dans l'Astronomie de M. de la Lande, *tome III, page 366; & tome IV, page 704.*

(b) Qui est la soixante-dixième dont l'orbite a été calculée.

de temps, il tomba une assez grande quantité de neige, le froid avoit également augmenté. Le 31 Janvier, à 7 heures 30′ du matin, le thermomètre, à mon observatoire, marquoit onze degrés 3 quarts au-dessous de zéro ou de la glace, & le 1.er Février au matin, la rivière fut gelée en plusieurs endroits.

Le 3 Février, le ciel s'éclaircit pendant la journée, le soir, il n'y avoit plus qu'un peu de brouillard dans l'air, & la Lune, qui approchoit de son plein, répandoit une grande lumière. La Comète n'avoit pas été vue depuis le 24 Janvier, à cause du mauvais temps, & comme on ignoroit son mouvement & le lieu du ciel où il falloit la chercher, je plaçai ma grande lunette achromatique dans le plan du méridien, & je lui fis parcourir une grande partie du ciel, dans tout l'espace où la Comète pouvoit se trouver, si par son mouvement depuis le 24 Janvier elle s'étoit élevée au-dessus de l'horizon. Après bien des recherches, je la découvris, vers 5 heures 54 minutes du soir, sur le parallèle de l'étoile λ des Poissons, cinquième grandeur; je la comparai trois fois à cette Étoile, une fois à la 506.e du catalogue zodiacal de feu M. l'Abbé de la Caille, & à deux Étoiles de septième grandeur, dont les lieux n'avoient pas encore été déterminés; mais je les comparai à λ des Poissons.

A cause du brouillard qui étoit répandu dans l'air, & de la grande lumière de la Lune, la Comète ne pouvoit se voir à la simple vue, mais elle se voyoit très-bien avec une petite lunette de nuit de 15 pouces de foyer: en la voyant dans la grande lunette achromatique, on lui soupçonnoit une queue fort courte, & dirigée vers la partie du ciel E. S. E.

Je mesurai, au moyen du micromètre à fils qui étoit adapté à la lunette, le diamètre du noyau de la Comète, qui avoit beaucoup de lumière; je le trouvai de 40 secondes, & celui de l'atmosphère qui environnoit le noyau, de 1′ 31″.

La comparaison de la Comète avec l'étoile λ des Poissons,

m'a donné sa position. Le 3 Février, à $6^h\ 5'\ 9''$ de temps vrai, la Comète suivoit l'Étoile au fil horaire du micromètre, de $1^d\ 46'\ 30''$; la Comète étoit plus au nord que l'Étoile, de 13 secondes: ainsi l'ascension droite de la Comète étoit de $354^d\ 32'\ 14''$, & sa déclinaison $35'\ 57''$, boréale.

Je ne rapporte ces détails que pour la première observation; on trouvera les autres positions de la Comète, & celles des Étoiles qui ont servi à sa détermination, dans deux Tables que je rapporte à la suite de ce Mémoire. La première contient les déterminations de la Comète en ascension droite & en déclinaison pour chaque jour d'observation, avec les différences de passage entre la Comète & les Étoiles avec lesquelles la Comète a été comparée, ainsi que les différences en déclinaison. La seconde Table contiendra la position des Étoiles, soit celles qui étoient déjà connues, soit celles que j'ai déterminées par de nouvelles observations: la plupart de ces Étoiles ont été employées à la détermination des lieux de la Comète, à chaque jour où elle a été observée.

Le 4 Février au soir, le ciel qui avoit été couvert toute la journée d'un brouillard élevé, s'éclaircit vers les quatre heures du soir, les Étoiles parurent; mais la Lune qui approchoit de son plein, répandoit une lumière qui empêchoit de bien juger des apparences de la Comète; on la voyoit cependant un peu plus belle, & la queue plus sensible que le 3, ce qui pouvoit provenir de ce que la Lune étoit plus éloignée de la Comète que le jour précédent. Je déterminai le lieu de la Comète par trois étoiles des Poissons; les positions sont rapportées dans la première Table, & celles des trois Étoiles dans la seconde.

Depuis le 4 Février jusqu'au 10 du même mois, le ciel fut couvert les soirs d'un brouillard épais & constant; le 10 au soir, le ciel s'éclaircit en grande partie, il étoit sans Lune; la Comète se faisoit voir à la simple vue, avec une queue de 2 degrés $\frac{1}{2}$ de longueur, d'une lumière très-

foible; le noyau étoit brillant, environné de nébulosité. Auprès de la Comète étoit une Étoile de septième grandeur, qui n'avoit pas encore été déterminée; je trouvai sa position, en la comparant directement à l'étoile C^2 des Poissons, ainsi qu'une autre Étoile de même grandeur: la Comète fut comparée à ces deux nouvelles Étoiles & aux étoiles connues C^1, C^2 des Poissons. Les positions de la Comète, qui ont résulté de ces observations, sont rapportées dans la première Table, & celles des Étoiles dans la seconde.

Les 11, 12 & 13 Février, il ne fut pas possible de voir la Comète, à cause du brouillard. Le 14, vers les sept heures du soir, le ciel s'éclaircit en partie, mais l'horizon étoit tellement couvert de brouillard, qu'il ne fut pas possible de voir la Comète. Le ciel continua d'être couvert jusqu'au 23, qu'il commença à s'éclaircir, le Soleil parut le matin & l'après-midi; après son coucher, le ciel se couvrit d'un léger brouillard qui affoiblissoit la lumière des Étoiles. Je cherchai la Comète assez long-temps dans l'endroit du ciel où elle devoit se trouver d'après mes précédentes déterminations; je la vis enfin, mais près de l'horizon où le ciel étoit devenu le plus clair: on la voyoit assez bien à la lunette; mais le peu de temps qui me restoit, ne me permit d'en faire qu'une observation. J'observai le passage de la Comète au fil horaire du micromètre, & j'attendis, après ce passage, celui de quelqu'Étoile. Il en passa une qui ne m'étoit pas connue, & sa lumière se trouvoit fort affoiblie par le brouillard; elle laissa une petite incertitude à son passage au fil horaire, de manière que cette détermination de la Comète doit être regardée comme un peu douteuse. Je recherchai ensuite l'Étoile, & je la comparai, le 7 Mars, à la soixante-seizième de Pégase, suivant Flamstéed; ayant obtenu sa position, je déterminai celle de la Comète: on la trouvera dans la première Table qui est à la suite de ce Mémoire.

Depuis le 23 Février jusqu'au 29, le ciel couvert ne

permit pas de revoir la Comète; mais le 29, le ciel devint parfaitement beau toute la journée: ce jour sembloit être le seul de l'hiver qui fût presque sans brouillard. Je cherchai, malgré un grand crépuscule, l'étoile γ (algenib) de l'aile de Pégase, qui me servit à trouver la Comète; ses apparences étoient bien diminuées depuis ma dernière observation; on ne faisoit plus que lui soupçonner une queue bien foible; on distinguoit encore fort bien la nébulosité, le noyau étoit très-apparent. La Comète paroissoit entre les deux étoiles S & φ de Pégase, j'estimai cette dernière Étoile de cinquième grandeur; Flamstéed, dans son Catalogue, la rapporte de la sixième. Je comparai la Comète à ces deux Étoiles, & à deux autres Étoiles de septième grandeur, qui n'étoient pas connues; leurs positions furent déterminées en les comparant à l'étoile S. De ces observations j'ai conclu le lieu de la Comète en ascension droite & en déclinaison; on les trouvera dans la première Table.

Le 1.er Mars au soir, le ciel étoit assez beau au couchant. Je cherchai avec la grande lunette l'étoile φ de Pégase, près de laquelle la Comète étoit le jour précédent; je ne tardai pas à voir la Comète, elle fut comparée trois fois à cette Étoile: les positions en sont rapportées dans la première Table. Les apparences de la Comète étoient bien affoiblies, soit par les vapeurs de l'horizon, soit par la grande lumière de la Lune; le noyau avoit encore de la lumière, il étoit environné d'une nébulosité sensible, mais sans aucune apparence de queue.

Le 2 Mars au soir, je vis la Comète un moment sans pouvoir l'observer; elle étoit près de l'horizon & dans les vapeurs.

Depuis le 2 jusqu'au 8, je ne pus revoir la Comète, à cause du mauvais temps; mais le 8 au soir, le ciel fut très-beau. Pour trouver la Comète, je cherchai les étoiles φ & r de Pégase, la Comète devoit être sur le parallèle de cette dernière; mais le crépuscule alors étoit encore

de la Comète qui a résulté de ces observations, est rapportée dans la première Table, celles des Étoiles sont dans la seconde.

Le 26 de Mai au matin, par un beau temps, le ciel pur, j'observai la Comète pour la dernière fois; elle avoit perdu depuis la dernière observation presque toute sa lumière, on ne faisoit plus que la soupçonner dans le champ de la lunette, quoique les fils du micromètre ne fussent point éclairés; ce n'étoit plus qu'une tache de lumière très-foible & égale, sans aucune apparence de noyau; son passage au fil horaire du micromètre ne fut qu'estimé. L'observation fut répétée plusieurs fois avec des Étoiles, & j'ai pris un milieu pour avoir sa position; on la trouvera dans la première Table, & celles des Étoiles dans la seconde: cette observation est la dernière que j'aie pu faire sur cette Comète. Mes observations vont depuis le 3 Février au soir jusqu'au 26 de Mai au matin, ce qui fait cent quatorze jours. Pendant cet intervalle de temps, j'ai eu huit jours d'observations le soir, avant que la Comète entrât dans les rayons du Soleil; & cinq le matin, après sa conjonction, ce qui fait treize jours: ces treize jours d'observations m'ont donné cinquante-sept déterminations du lieu de la Comète, en ascension droite & en déclinaison; elles sont rapportées dans la Table qui suit.

La première Table contient les lieux de la Comète en ascension droite & en déclinaison, avec les différences de passage entre la Comète & les Étoiles au fil horaire du micromètre, & les différences en déclinaison entre la Comète & l'Étoile, à laquelle elle a été comparée. Ces différences sont marquées des signes + & —; le premier, indique qu'il faut ajouter ces différences observées, aux positions des Étoiles, avec lesquelles la Comète a été comparée, pour avoir celles de la Comète; le second qu'il faut ôter, & l'on aura l'ascension droite & la déclinaison de la Comète.

La seconde Table renferme les ascensions droites & les déclinaisons

déclinaiſons des Étoiles qui ont été employées à la détermination du lieu de la Comète, tant celles qui ont été priſes en différens Catalogues, que les nouvelles Étoiles que j'ai déterminées : ces nouvelles Étoiles ſont au nombre de vingt-quatre. Leurs poſitions ſont réduites au temps des obſervations ; je n'y ai fait d'autre réduction que celle qu'on trouve dans les Catalogues, ſous le titre de *Variation annuelle.*

Je joins auſſi à ce Mémoire une Carte céleſte que j'ai conſtruite d'après mes obſervations. Cette Carte eſt diviſée en degrés d'aſcenſion droite & de déclinaiſon; j'y ai rapporté les poſitions & la route apparente de la Comète parmi les Étoiles fixes: à l'inſpection de cette Carte, il ſera aiſé de juger de la poſition de la Comète obſervée & de celles des Étoiles qui ont ſervi à ſa détermination ; je les ai renfermées dans un cercle. J'ai rapporté auſſi, ſur cette Carte, la première obſervation, de M. le Comte de Caſſini, du 24 Janvier. On verra par cette Carte, que la Comète a commencé à paroître près de la queue de la Baleine ; qu'elle a traverſé l'Écliptique & l'Équateur dans les premiers jours de Février; qu'elle a paſſé dans les Poiſſons, traverſé Pégaſe, & qu'elle a ceſſé de paroître entre le Lézard & la main droite d'Andromède.

Cette Comète avoit été vue, à l'Iſle-de-Bourbon le 15 Décembre 1783; au Cap de Bonne-eſpérance, le 10 Janvier ſuivant; le 16, à la Guadeloupe, par M. Tondu; le 20, à Malte, par M. le Chevalier d'Angos: aucune de ces obſervations ne m'eſt parvenue.

M. Méchain a calculé les élémens de l'orbite de cette Comète, d'après ſes obſervations, depuis le 24 Janvier juſqu'au 26 de Mai : les voici comme il les a donnés dans la Connoiſſance des Temps de 1788, *page 334.*

Lieu du nœud aſcendant.	$1^s\ 26^d\ 49'\ 21''$
Inclinaiſon de l'orbite.	51. 9. 12.
Lieu du périhélie.	2. 20. 44. 24.
Logarithme de la diſtance périhélie.	9,849946.

Paſſage au périhélie, 21 Janv. 1784, à $4^h\ 56'\ 47''$, t. moyen à Paris,
Sens du mouvement, rétrograde.

TABLE I.

Des Lieux apparens de la première Comète de 1784, comparée aux Étoiles fixes.

1784.	TEMPS VRAI.	ASCENSION droite de la Comète observée.	DÉCLINAIS. de la Comète observée. Boréale	DIFFÉRENCE en ascens. dr. de la Comète avec les Étoiles.	DIFFÉRENCE en déclinaif. entre la Comète & les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres & N.° des Étoiles.	ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.			
Février 3	6. 5. 9	354. 32. 14	0. 35. 57	+ 1. 46. 30	+ 0. 13	5	λ	des Poissons.
	6. 5. 9	354. 32. 14	0. 35. 57	+ 0. 5. 45	— 24. 51	7	17	déterminée.
	6. 5. 9	354. 32. 14	0. 35. 57	— 0. 28. 37	— 26. 12	7	19	déterminée.
	6. 36. 13	354. 32. 14	0. 37. 1	+ 1. 46. 30	+ 1. 17	5	λ	des Poissons.
	6. 36. 13	354. 32. 21	0. 37. 1	— 0. 58. 15	— 17. 22	6	506	de la Caille.
	6. 36. 13	354. 32. 14	0. 37. 14	+ 0. 5. 45	— 23. 29	7	17	déterminée.
	6. 36. 13	354. 32. 6	0. 37. 16	— 0. 28. 45	— 24. 53	7	19	déterminée.
	7. 3. 55	354. 32. 14	0. 38. 29	+ 1. 46. 30	+ 2. 45	5	λ	des Poissons.
4	6. 19. 12	354. 32. 26	1. 40. 52	+ 0. 41. 52	— 36. 23	5	501	de la Caille.
	6. 23. 18	354. 32. 26	1. 40. 44	+ 0. 41. 52	— 36. 31	5	501	la même.
	6. 57. 10	354. 32. 18	1. 42. 32	+ 8. 2. 45	— 23. 54	4	γ	des Poissons.
	7. 1. 24	354. 32. 41	1. 42. 40	+ 0. 42. 7	— 34. 35	5	501	de la Caille.
	7. 6. 37	354. 32. 34	1. 42. 43	+ 0. 42. 0	— 34. 32	5	501	
	7. 6. 37	354. 32. 34	1. 42. 43	— 0. 41. 30	— 1. 23	6	22	des Poissons.
10	6. 39. 31	354. 23. 24	7. 1. 26	+ 0. 6. 0	— 1. 30	7	16	déterminée.
	6. 47. 13	354. 23. 16	7. 1. 36	— 3. 28. 30	— 15. 27	5.6	c^2	des Poissons.
	6. 47. 13	354. 23. 47	7. 1. 45	— 3. 26. 30	— 43. 10	6	c^1	
	6. 47. 13	354. 23. 16	7. 1. 36	— 1. 44. 45	0. 0	7	20	déterminées.
	6. 47. 13	354. 23. 16	7. 1. 36	+ 0. 5. 52	— 1. 20	7	16	
	7. 17. 33	354. 23. 1	7. 2. 56	+ 0. 5. 37	0. 0	7	16	
	7. 17. 33	....	7. 2. 49	....	— 14. 14	5.6	c^2	des Poissons.
23	6. 14. 11	353. 47. 59	14. 45. 7	— 4. 3. 45	— 17. 57	7	23	déterminée.
29	6. 46. 38	353. 29. 42	17. 20. 54	+ 1. 45. 0	+ 9. 18	6	S	de Pégase.
	6. 46. 38	353. 29. 46	17. 20. 58	+ 0. 37. 0	— 6. 19	7	13	déterminée.
	6. 55. 40	353. 30. 4	17. 20. 58	+ 1. 45. 22	+ 9. 22	6	S	de Pégase.
	6. 55. 40	353. 30. 1	17. 21. 0	+ 0. 37. 15	— 6. 18	7	13	déterminées.
	6. 55. 40	353. 30. 4	17. 20. 58	+ 1. 10. 30	+ 20. 18	7	12	
	6. 59. 53	353. 30. 10	17. 21. 59	— 1. 51. 30	— 32. 55	5	φ	de Pégase.
	7. 9. 36	353. 29. 55	17. 22. 9	— 1. 51. 45	— 32. 45	5	φ	
Mars... 1	6. 37. 25	353. 27. 10	17. 45. 11	— 1. 54. 30	— 9. 43	5	φ	

Suite de la Table des Lieux apparens de la première Comète, &c.

1784.	TEMPS vrai.	ASCENSION droite de la Comète observée.	DÉCLINAIS. de la Comète observée, Boréale.	DIFFÉRENCE en ascens. dr. de la Comète avec les Étoiles.	DIFFÉRENCE en déclinais. de la Comète avec les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres & N.° des Étoiles.	ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.			
Mars... 1	6. 46. 49	353. 27. 33	17. 45. 17	— 1. 54. 7	— 9. 37	5	φ	
	6. 56. 17	353. 27. 40	17. 45. 23	— 1. 54. 0	— 9. 31	5	φ	de Pégase.
8	6. 54. 22	353. 12. 8	20. 21. 56	— 2. 12. 37	— 10. 7	6	r^2	
	6. 54. 22	353. 12. 8	20. 21. 56	— 2. 8. 37	— 5. 38	6	r^1	
	6. 54. 22	353. 12. 12	20. 21. 52	— 0. 19. 45	+ 10. 32	7	15	déterminée.
	7. 6. 54	353. 11. 45	20. 22. 14	— 2. 13. 0	— 9. 49	6	r^2	de Pégase.
	7. 6. 54	353. 11. 45	20. 22. 8	— 2. 9. 0	— 5. 26	6	r^2	
	7. 6. 54	353. 11. 42	20. 22. 18	— 0. 20. 15	+ 10. 58	7	15	
11	7. 13. 20	353. 6. 30	21. 25. 20	— 1. 29. 0	— 14. 13	7	18	déterminées.
	7. 13. 20	353. 6. 30	21. 25. 13	— 3. 19. 0	— 1. 46	7	22	
Mai... 15	14. 9. 39	346. 22. 33	41. 28. 20	+ 3. 22. 15	+ 18. 5	3.4	0	
	14. 9. 39	346. 22. 33	41. 28. 20	+ 3. 12. 0	— 7. 46	6	2	
	14. 9. 39	346. 22. 33	41. 28. 20	— 1. 2. 0	+ 34. 15	6	10	
17	14. 3. 41	345. 48. 10	42. 4. 41	+ 2. 37. 37	— 28. 35	6	2	d'Andromède.
	14. 3. 41	345. 48. 10	42. 4. 41	— 6. 5. 30	+ 0. 8	4	1	
	14. 3. 41	345. 47. 49	42. 5. 5	+ 0. 40. 45	— 18. 29	6.7	6	
	14. 3. 41	345. 48. 10	42. 4. 41	— 3. 23. 15	+ 20. 59	6	13	
20	13. 24. 46	344. 49. 21	42. 59. 26	— 0. 25. 7	+ 29. 36	7	6	déterminée.
	14. 10. 20	344. 48. 49	42. 59. 54	— 0. 18. 15	+ 36. 20	6.7	6	d'Andromède.
	14. 34. 17	344. 48. 19	42. 59. 50	— 0. 18. 45	+ 36. 16	6.7	6	
22	13. 32. 27	344. 6. 35	43. 36. 5	+ 6. 22. 0	+ 26. 13	5	11	du Lézard.
	13. 42. 41	344. 7. 20	43. 36. 32	— 0. 25. 30	+ 12. 13	8	5	déterminées.
	13. 50. 10	344. 7. 28	43. 36. 33	— 0. 25. 22	+ 12. 14	8	5	
	14. 0. 2	344. 7. 35	43. 36. 58	— 8. 18. 45	+ 28. 6	4	χ	
25	13. 11. 11	342. 59. 53	44. 30. 13	— 1. 27. 45	— 43. 44	6	4	d'Andromède.
	13. 58. 19	342. 59. 38	44. 30. 14	— 1. 28. 0	— 43. 43	6	4	
	14. 19. 36	342. 59. 46	44. 30. 17	— 1. 27. 52	— 43. 40	6	4	

TABLE II.

Des Ascensions droites & des Déclinaisons des Étoiles avec lesquelles la première Comète de 1784 a été comparée.

Leurs positions sont réduites au temps de l'Observation.

ASCENSION droite des Étoiles. D. M. S.	DÉCLINAISON Boréale des Étoiles. D. M. S.	Grandeur des Étoiles.	N.° des Étoiles.	NOMS DES ÉTOILES. qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
337. 44. 35	43. 9. 52	5	11	du Lézard, comparée à l'Étoile nouvelle *n.° 5*. Comète comparée le 22 Mai.
339. 8. 5	43. 26. 22	6	1	nouvelle, comparée à la onzième du Lézard.
340. 58. 35	43. 36. 49	6	2	nouvelle, déterminée par la onzième du Lézard.
342. 42. 38	44. 13. 53	8	3	nouvelle, dét. la Comète en étoit près le 25 Mai.
343. 0. 18	41. 10. 15	3.4	o	d'Andromède, déduite de la Caille. Comète comparée le 15 Mai.
343. 10. 33	41. 36. 6	6	2	d'Andromède, comparée à *o*. Comète comparée les 15 & 17 Mai.
344. 22. 8	44. 54. 46	7	4	nouvelle, déterminée par le *n.° 4* d'Andromède.
344. 27. 38	45. 13. 57	6	4	d'Andromède, déduite de Flamstéed. Comète comparée le 25 Mai.
344. 32. 50	43. 24. 19	8	5	nouvelle, déterm. par x d'Andromède. Comète comparée le 22 Mai.
345. 7. 4	42. 23. 34	6.7	6	d'Andromède, comparée au *n.° 2*. Comète comp. les 17 & 20 Mai.
345. 14. 28	42. 29. 50	7	6	nouvelle, déterminée par x d'Andromède. Comète comparée le 20 Mai.
346. 15. 53	45. 21. 26	7	7	nouvelle, comparée à l'Étoile *n.° 4* d'Andromède.
346. 29. 33	2. 6. 26	4	γ	des Poissons, déduite de Mayer. Comète comparée le 4 Février.
347. 24. 33	40. 54. 5	6	10	d'Andromède, comp. à *o*. Com. comp. le 15 Mai.
347. 37. 20	42. 55. 52	7	8	nouvelle, comparée à la nouvelle Étoile *n.° 6*.
349. 11. 25	41. 43. 42	6	13	d'Andromède, comparée au *n.° 2*. Comète comp. le 17 Mai.
349. 47. 23	45. 17. 4	6	9	nouvelle, déterm. par l'étoile *n.° 4* d'Andromède.
350. 40. 0	21. 18. 56	6	y	Pégase, déterminée par son passage au Méridien.
350. 51. 30	45. 29. 52	6	10	nouvelle, déterm. par l'Étoile *n.° 4* d'Andromède.
351. 44. 28	43. 14. 42	5	11	nouvelle, déterminée par l'Étoile x d'Andromède.
351. 44. 42	17. 11. 36	6	S	Pégase, déduite de Flamstéed. Comète comparée le 29 Février.
351. 53. 40	42. 4. 33	4	ι	d'Andromède, déd. de l'étoile *n.° 2* d'Andromède. Comète comparée le 17 Mai.
352. 19. 34	17. 0. 40	7	12	nouvelle, comparée à S de Pégase. Comète comparée le 29 Février.

Suite de la Table des Ascensions droites, &c.

ASCENSION droite des Étoiles.	DÉCLINAISON Boréale des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	N.° des Étoiles.	NOMS DES CONSTELLATIONS qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
352. 26. 20	43. 8. 52	4	x	d'Andromède, déduite de Flamstéed. Comète comparée le 22 Mai.
352. 45. 44	0. 35. 44	5	λ	Poissons, déduite de Mayer. Comète comparée le 3 Février.
352. 52. 46	17. 27. 18	7	13	nouvelle, déterminée par ς de Pégase. Comète comparée le 29 Février.
352. 55. 44	15. 8. 1	6	76	de Pégase, déduite du catalogue de Flamstéed.
353. 30. 27	42. 33. 36	7	14	nouvelle, déterminée par l'Étoile x d'Andromède.
353. 31. 57	20. 11. 20	7	15	nouvelle, déterminée par r^1 de Pégase. Comète comparée le 8 Mars.
353. 50. 34	2. 17. 15	5	501	de la Caille, milieu pris avec Mayer. Comète comparée le 4 Février.
354. 17. 24	7. 2. 56	7	16	nouvelle, déterminée par c^2 des Poissons. Comète comparée le 10 Février.
354. 26. 29	1. 0. 48	7	17	nouvelle, déterminée par λ des Poissons. Comète comparée le 3 Février.
354. 35. 30	21. 39. 33	7	18	nouvelle, déterminée par y de Pégase. Comète comparée le 11 Mars.
355. 0. 51	1. 2. 9	7	19	nouvelle, déterminée par λ des Poissons. Comète comparée le 3 Février.
355. 14. 4	1. 44. 6	6	22	Poissons, Flamstéed, comp. à la cinq cent-unième de la Caille. Comète comparée le 4 Février.
355. 20. 45	20. 27. 34	6	r^1	de Pégase, déterm. par r^2. Com. comp. le 8 Mars.
355. 21. 40	17. 54. 54	5	φ	Pégase, déduite de Flamstéed. Comète comparée les 29 Février & 1.er Mars.
355. 24. 45	20. 32. 3	6	r^2	Pégase, déduite de Flamstéed. Comète comparée le 8 Mars.
355. 30. 36	0. 54. 23	6	506	de la Caille, milieu avec Flamstéed. Comète comparée le 3 Février.
356. 8. 1	7. 1. 36	7	20	nouvelle, déterminée par c^2 des Poissons. Comète comparée le 10 Février.
356. 14. 7	19. 52. 20	6	21	nouvelle, déterminée par r^1 de Pégase.
356. 25. 30	21. 26. 59	7	22	nouvelle, déterminée par y de Pégase. Comète comparée le 11 Mars.
357. 50. 17	7. 44. 55	6	c^1	Poissons, déduite de Flamstéed. Comète comparée le 10 Février.
357. 51. 44	15. 3. 4	7	23	nouvelle, déterminée par la soixante-seizième de Pégase. Comète comparée le 23 Février.
357. 51. 46	7. 17. 3	5.6	c^3	Poissons, déduite de Flamstéed & de la Caille, milieu. Comète comparée le 10 Février.
1. 46. 4	2. 35. 25	7	24	nouvelle, déterminée par l'Étoile cinq cent unième de la Caille.

Nota. L'étoile r^1 de Pégaſe, ſixième grandeur, ne ſe trou dans le grand catalogue de Flamſtéed, mais il l'a rapportée 1 Cartes : j'ai déterminé ſa poſition par r^2. Pour l'étoile *o*, la pr d'Andromède, dans le catalogue de Flamſtéed, la diſtance a eſt rapportée de 40^d 19′ 30″; on doit lire 49^d 19′ 30″ : l'aſc droite de cette Étoile eſt bonne quoique j'aie mis *(Mém. de l année 1775, page 458)* qu'il y avoit 12′ 15″ d'erreur.

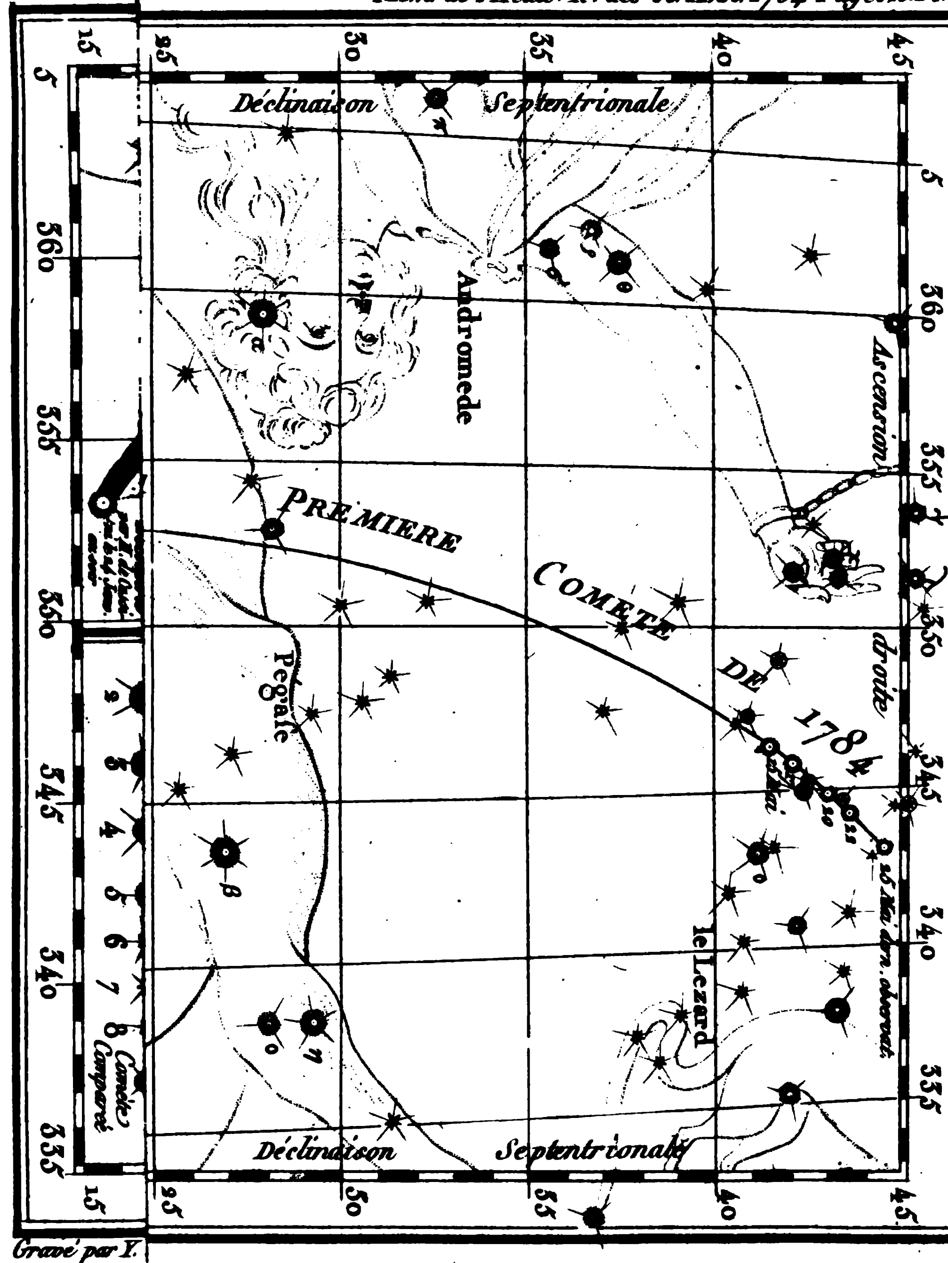
SECONDE COMÈTE de 1784

CETTE ſeconde Comète, de 1784, fut découve Malte, dans la conſtellation du Renard, le 11 A par M. le chevalier d'Angos.

Le 14 du mois de Mai ſuivant, je reçus une Le datée de Malte, le 15 Avril, dans laquelle il me nonçoit : voici l'extrait de ſa Lettre.

« J'ai découvert une nouvelle Comète, le 11 A » dans la conſtellation du Renard; elle eſt fort petite, » queue, & n'a qu'une légère apparence de nébuloſité : » pris pour une nébuleuſe ; cependant je déterminai » tement ſa poſition. Je ne pus la voir le lendemain à » du brouillard. Le 13 je fus aſſuré que c'étoit une Con » mais les nuages m'empêchèrent de l'obſerver : le 14 » fus pas plus heureux, je vis ſeulement à peu-près la d » tion de ſon mouvement; mais je l'ai bien obſervée au » d'hui 15, je l'ai jugée un peu plus lumineuſe; peut » cela vient-il de ce que l'atmoſphère étoit plus pure ; » mes premières obſervations de chaque jour ».

ANNÉE 1784.	TEMPS VRAI.	ASCENSION. DROITE.	DÉCLIN. BORÉALE.
	H. M.	*D. M.*	*D. M.*
Avril 11	2. 31	315. 18	22. 21.
15	3. 18	307. 55	15. 28.


Mém. de l'Acad. R. des Sc. Ann. 1784 Page 326. Pl.
Déclinaison Septentrionale
Andromede
PREMIERE COMETE DE 1784
Ascension droite
Pégase
le Lezard
Comète Comparée
Gravé par Y.

Le lendemain de la réception de sa Lettre, le 15 Mai, par un ciel parfaitement beau & pur, je cherchai cette Comète avec ma grande lunette achromatique; je parcourus non-seulement toute la constellation du Renard, mais aussi une grande partie du ciel. Je fis ces recherches non-seulement le 15, mais plusieurs autres nuits, & il ne me fut pas possible de l'apercevoir; je ne trouvai, dans le Renard, que la belle nébuleuse, sans étoile, & sous une forme ovale que j'avois découverte le 12 Juillet 1764, qui avoit alors $297^d\ 21'\ 41''$ d'ascension droite, & $22^d\ 4'$ de déclinaison boréale. Cette nébuleuse est rapportée dans mon Mémoire imprimé dans le volume de l'Académie, *année 1771, page 435*, sous le *N.° 27*. C'est dans le voisinage de cette belle nébuleuse, que M. le chevalier d'Angos a découvert cette Comète.

Cette Comète a été sans doute très-petite & de peu de durée, & il ne paroît pas qu'aucun Astronome de l'Europe l'ait observée. Il n'en est parvenu aucune observation à l'Académie, ni à ma connoissance, & M. le chevalier d'Angos paroît être le seul qui l'ait observée. Il a eu assez d'observations pour calculer les élémens de son orbite: les voici comme il me les a envoyés, & comme M. Pingré les a donnés à l'Académie, le 7 Décembre 1784.

Lieu du nœud ascendant	$2^s\ 26^d\ 52'\ 9''$
Inclinaison de l'orbite	47. 55. 10.
Lieu du périhélie	10. 28. 54. 57.
Logarithme de la distance périhélie	9,8132683.

Passage par son périhélie, le 9 Avril 1784, à $21^h\ 16'\ 46''$, temps moyen, méridien de Paris.

Sens du mouvement . . . . rétrograde.

M. le chevalier d'Angos ne nous a envoyé d'autres observations de cette Comète, que les deux déterminations de son lieu, que je viens de rapporter.



OBSERVATION
DE L'ÉCLIPSE DE LUNE,
Faite à l'obſervatoire de la Marine, hôtel de Clugny, la nuit du 6 au 7 Mars 1784.

Par M. MESSIER.

LA Lune, avant le commencement de l'éclipſe, paroiſſoit à travers des nuages rares, & ſa lumière en étoit affoiblie; ces nuages continuèrent d'exiſter, de manière que le commencement de l'éclipſe fut douteux, on ne pouvoit juger des limites de l'ombre que très-imparfaitement. Les obſervations du commencement de l'éclipſe, des immerſions des taches, & la meſure de la grandeur de l'ombre, furent incertaines juſqu'à $14^h 45' 27''$, que la Lune ſe découvrit; l'ombre alors ſur la Lune, paroiſſoit belle, brune & bien terminée : on obſervoit que l'ombre étoit plus foncée au bord, que dans la partie intérieure qui couvroit déjà une partie de la Lune. Les obſervations qui furent faites pendant le temps que la Lune parut claire, durèrent juſqu'à $15^h 31' 50''$; des nuages alors très-épais s'élevèrent de l'horizon, pouſſés par un vent aſſez fort du Sud-eſt, & couvrirent la Lune entièrement : vers 16^h, il commença à pleuvoir. La Lune ayant reparu dans un intervalle de nuage, j'obſervai la grandeur de l'ombre; enſuite des nuages épais la couvrirent de nouveau juſqu'à la fin : la pluie augmenta, & elle tomboit très-fort à 6 & à 7 heures du matin, le 7.

J'ai employé à cette obſervation, une grande lunette achromatique de 40 lignes d'ouverture, & un groſſiſſement de quarante fois; elle étoit garnie d'un micromètre à fils, qu'on pouvoit incliner dans tous les ſens.

L'éclipſe

L'éclipse commença entre les taches de *Aristarchus* & *Harpalus*.

TABLE des Observations des Taches.

TEMPS VRAI.	N.os des Taches.	TACHES OBSERVÉES.
H. M. S.		
14. 16. 1	....	Pénombre foible.
14. 22. 0	....	Pénombre plus forte.
14. 25. 0	....	Commencement de l'éclipse, douteux.
14. 31. 53	7	*Harpalus* au bord de l'ombre.
14. 36. 13	8	*Heraclides* au bord de l'ombre.
14. 38. 32	12	*Helicon* au bord de l'ombre.
14. 39. 48	3	*Aristarchus* au bord de l'ombre.
14. 45. 27	17	*Plato* au bord de l'ombre.
14. 46. 36	17	*Plato* entré.
15. 2. 2	....	Tache entre *Copernicus* & *Helicon*, au bord de l'ombre.
15. 2. 34	2	*Galileus* au bord de l'ombre.
15. 3. 34	4	*Keplerus* au bord de l'ombre.
15. 5. 23	F	*Mare-Serenitatis* entre dans l'ombre.
15. 16. 56	27	*Possidonius* au bord de l'ombre.
15. 17. 1	G	*Mare-Imbrium* entré dans l'ombre.
15. 19. 15	27	*Possidonius* à moitié dans l'ombre.
15. 20. 41	27	*Possidonius* dans l'ombre.
15. 21. 59	11	*Copernicus* au bord de l'ombre.
15. 24. 41	F	*Mare-Serenitatis* à moitié dans l'ombre.
15. 25. 50	2	*Galileus* s'éloigne de l'ombre, elle étoit restée au bord de l'ombre.
15. 31. 50	....	La Lune disparoît dans un nuage très-épais.

Il est tombé de la pluie ensuite qui a continué. *Keplerus*

n'est entré dans l'ombre que de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$. *Copernicus* étoit resté jusqu'à ce moment au bord de l'ombre.

La fin de l'éclipse n'a pu être observée à cause du mauvais temps.

OBSERVATION de la grandeur de l'ombre, & du diamètre de la Lune.

TEMPS. VRAI.	GRANDEUR observée.	
H. M. S.	M. S.	
14. 34. 38	3. 21	Grandeur de l'ombre.
14. 41. 21	4. 39	Grandeur de l'ombre.
14. 48. 30	7. 17	Grandeur de l'ombre.
14. 50. 56	30. 24	Diamètre de la Lune, perpendiculaire à son parallèle.
14. 55. 28	8. 13	Grandeur de l'ombre.
15. 7. 0	10. 16	Grandeur de l'ombre.
15. 23. 16	12. 7	Grandeur de l'ombre.
16. 7. 34	10. 13	Grandeur de l'ombre.

Nota. Une minute après cette dernière observation de la grandeur de l'ombre, la Lune entra dans un nuage très-épais, & ce que je viens de rapporter, est tout ce que j'ai pu observer de cette éclipse.

Pendant tout le temps de ces observations, j'avois toujours vu le bord éclipsé de la Lune à travers l'ombre.



VÉRIFICATION (a)

DES NOUVELLES DÉCOUVERTES

Faites en Angleterre, sur les Étoiles fixes.

Par M. CASSINI.

LORSQUE le célebre Huygens eut fait connoître en 1655, un satellite auprès de Saturne, on crut pendant long-temps qu'il ne pouvoit plus rester d'autre planète à découvrir. Cette opinion étoit en partie fondée sur l'idée assez singulière, que le nombre des satellites, qui se trouvoit alors de six, ne pouvoit surpasser celui des planètes principales du même système. Mais les découvertes de Jean-Dominique Cassini, prouvèrent par la suite, que la Nature n'est point asservie à de superstitieuses loix de nombre & d'égalité.

Après les dernières découvertes de Cassini, on devoit croire, à bien plus juste titre, que notre système planétaire étoit complet, & qu'à l'exception des Comètes, nous pouvions nous flatter de connoître toutes les planètes compagnes de la Terre, & soumises comme elle à l'empire du Soleil; en effet, les plus grandes lunettes & les recherches des plus infatigables observateurs, pendant un siècle, n'avoient pu rien découvrir de nouveau. On fut donc bien étonné d'apprendre, dans ces derniers temps, environ cent années après la découverte du dernier satellite de Saturne, qu'il existoit encore une planète du premier ordre, mue autour du Soleil, comme Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter & Saturne, suivant les mêmes loix, & décrivant une orbite également peu inclinée au plan de l'écliptique.

(a) L'Extrait de ce Mémoire a été lû à la rentrée publique de la Saint-Martin de l'année 1784.

Cette découverte, si inattendue, eut d'ailleurs des circonstances singulières. En effet, elle ne fut pas dûe à un Astronome, & le télescope merveilleux qui perça jusque dans la retraite éloignée de ce nouvel astre, ne fut point l'ouvrage d'un Opticien; enfin, ce fut M. Herschell, Musicien Allemand, à qui l'on dut la connoissance de cette septième planète principale, qui depuis tant de milliers d'années se promenoit en silence dans l'immense étendue d'une sphère reculée, ignorée & confondue avec les plus petites étoiles.

Dans l'usage ordinaire de l'Astronomie, lorsqu'il s'agit d'observer les éclipses des satellites de Jupiter, de distinguer leurs ombres, d'apercevoir les bandes & les taches qui se remarquent sur le disque de plusieurs planètes; la distinction parfaite de l'image, sa netteté, sa clarté, sont les effets les plus essentiels à obtenir dans l'exécution d'une lunette ou d'un télescope. Mais dans d'autres circonstances, comme celle où il s'agit principalement de découvrir & de percer dans les régions du ciel les plus reculées, de rapprocher de soi & de rendre plus visible un corps infiniment éloigné ou très-petit, c'est au grossissement alors qu'il convient particulièrement de s'attacher. Renonçant à la parfaite distinction, qui n'est plus la première condition, il faut, sans s'embarrasser des règles & des proportions prescrites, chercher à procurer à son télescope le plus grand pouvoir amplifiant, aux dépens même, jusqu'à un certain point, de la netteté des images. Qu'importe en effet que cette distinction soit moins parfaite, pourvu qu'elle permette de distinguer entr'eux les objets, & de s'assurer de leur existence.

On n'avoit point osé, avant M. Herschell, pousser plus loin qu'à trois ou quatre cents fois le grossissement des plus forts télescopes. M. Herschell franchit cette limite, il travailla lui-même avec un soin, des peines & une adresse infinies, des miroirs de télescope, dont il porta le grossissement jusqu'à trois mille fois. Quelle que fut la perfection

du travail de ces miroirs, un tel pouvoir amplifiant ne pouvoit certainement avoir lieu avec une parfaite distinction des images; mais cette distinction toutefois fut suffisante pour distinguer dans le ciel & faire connoître un nombre considérable d'Étoiles fixes, que l'on n'avoit point encore remarquées, doubles, triples, quadruples, offrant par leurs différens groupes, leur diversité de grandeur & de couleur, l'aspect le plus singulier & le plus curieux.

L'annonce de ces nouveautés devoit faire, & fit en effet une grande sensation parmi les Savans. La nouvelle planète avoit à peine été annoncée, que tous les Astronomes avoient fixé sur elle leurs regards. Leurs instrumens, à la vérité, n'ayant point la force & la perfection de celui de M. Herschell, ils ne l'avoient aperçue que comme une étoile fort petite, n'ayant rien d'abord qui pût la faire distinguer des fixes qui l'environnoient; mais le mouvement propre qu'ils lui reconnurent, & sa conformité aux loix que suivent les autres planètes, les forcèrent bientôt de l'admettre dans notre système. Il n'en fut pas tout-à-fait de même par rapport aux étoiles doubles, triples & quadruples, annoncées par M. Herschell; comme personne n'avoit, ou ne croyoit avoir d'instrument assez fort pour distinguer ces merveilles, il fallut y croire sur sa parole, & les Savans, comme l'on sait, ne sont point crédules: c'est-là, & ce doit être leur caractère distinctif, de celui de l'ignorant & de l'enthousiaste, qui croyent tout sans examen, admettent tout sans preuve, & finissent toujours par rougir d'avoir été les jouets de l'erreur. M. Herschell annonçoit dans les Étoiles doubles une variété de couleur assez singulière, ce qui fit penser à plusieurs que cette apparence n'étoit produite que par une illusion optique, & que ces Étoiles paroissoient doubles, de la même façon que Vénus avoit paru anciennement accompagnée d'un satellite. Il étoit donc bien important pour la gloire de M. Herschell, & pour l'intérêt de la vérité, de pouvoir vérifier ces nouvelles découvertes, & c'est ce que j'ai essayé de faire.

Il exiſtoit à Paris, depuis deux ans environ, chez M. Sykes, un téleſcope de 5 pieds de foyer, ſupérieurement exécuté, parfaitement monté, tel, en un mot, qu'ont coutume de ſortir des mains de M. Dollond, tous les ouvrages de cet illuſtre artiſte: j'avois anciennement eſſayé ce téleſcope ſur Jupiter & ſur Saturne, avec un pouvoir amplifiant de 460 fois, & l'avois trouvé très-bon. Je fus averti au mois d'Août de cette année, que M. Dollond, encouragé par l'exemple & les eſſais de M. Herſchell, venoit d'envoyer d'Angleterre, à M. Sykes, pour le téleſcope qui étoit à Paris, ſix nouveaux oculaires, dont le moindre devoit groſſir ſept cents cinquante fois, & le plus fort trois mille. Je fus infiniment curieux de connoître l'effet de ces nouveaux oculaires, de voir, ſur-tout, comment de pareils groſſiſſemens ſeroient ſupportés par un miroir fait ſur les principes ordinaires, & ſans intention d'y appliquer des oculaires d'une ſi grande force. M. Sykes eut l'honnêteté de me confier ſon inſtrument pour le ſoumettre aux différens eſſais que je jugerois à propos d'en faire *(b)*.

J'eſſayai d'abord ſucceſſivement ces oculaires ſur Saturne, & comme je m'y attendois bien, Saturne, avec le groſſiſſement de trois mille, ne me parut que comme une maſſe de lumière. Avec celui de deux mille, je commençai à diſtinguer un peu l'anneau d'avec le globe; avec celui de mille, j'obtins plus de diſtinction dans l'image; mais il faut l'avouer, ſi je n'euſſe été prévenu, mon œil, peu ſatisfait de ces premiers eſſais, eût dès-lors mis au rebut tous ces oculaires, ſur-tout après les avoir eſſayés ſur Jupiter, dont aucun ne put me faire voir les bords terminés.

Je paſſai enſuite aux Étoiles, & me propoſant de parcourir ſucceſſivement toutes celles que M. Herſchell annonce comme remarquables, dans ſon catalogue imprimé dans les *Tranſactions Philoſophiques de 1782*, j'engageai M. Méchain, membre de cette Académie, a vouloir bien ſe

(b) Ce téleſcope à depuis été acquis pour l'Obſervatoire royal.

joindre à moi dans mes premières recherches; le témoignage d'un si bon observateur ne devant laisser aucun doute au public & à moi-même, sur ce que nous allions observer & remarquer de particulier.

Dans un Mémoire imprimé dans le soixante-douzième volume des *Transactions Philosophiques pour l'année 1782*, M. Herschell, rendant compte de ses découvertes, a divisé en six classes les Étoiles qu'il a observées avec son excellent télescope, & qu'il a trouvées dignes d'être distinguées par leur rapprochement entr'elles, leur position respective, leur petitesse, leur couleur.

On connoissoit bien déjà dans le ciel quelques Étoiles que l'on avoit appelées *doubles*, c'est-à-dire, qui à la vue ou avec de foibles lunettes, n'offrant l'apparence que d'une seule Étoile, se trouvoient composées de deux Étoiles séparées, sitôt qu'on les observoit avec des lunettes un peu fortes: telles sont les étoiles ζ de la Lyre, γ du Bélier, α des Gémeaux, γ de la Vierge, α de l'Hydre, &c. M. Herschell a appelé pareillement *étoiles doubles*, *triples & quadruples*, celles qui, observées avec son nouveau télescope, lui ont présenté un groupe de deux, trois & quatre Étoiles; il en a même remarqué qu'il appelle *doubles-doubles*, *doubles-triples*, parce qu'elles offrent l'assemblage de deux groupes peu éloignés, composés chacun de deux ou trois étoiles.

Dans la première classe, M. Herschell a rassemblé les Étoiles les plus difficiles à voir, parce qu'elles sont infiniment proches l'une de l'autre, & ne paroissent séparées qu'en faisant usage de très-forts grossissemens; il en compte 24 de cette espèce, savoir, 19 doubles & 5 triples *(c)*. La seconde classe composée de 38, renferme les Étoiles un peu plus séparées entr'elles, comme d'environ 5″. La troisième

(c) Depuis la lecture de ce Mémoire, M. Herschell, en 1785, a fait imprimer un nouveau catalogue d'Étoiles doubles, où la première classe se trouve portée à 97 Étoiles; la seconde, à 102; la troisième, à 114; la quatrième, à 132; la cinquième à 137; & la sixième à 121.

classe comprend celles encore plus éloignées entr'elles, depuis 5 jusqu'à 15 secondes; elles sont au nombre de 46. La quatrième, composée de 44 étoiles, comprend celles qui sont distantes de 15 à 30". La cinquième, celles qui sont distantes depuis 30 secondes jusqu'à une minute; elles sont au nombre de 51. Enfin, la sixième classe renferme les étoiles distantes entr'elles, depuis une minute jusqu'à deux: M. Herschell en rapporte 66.

Ce fut dans les mois d'Août, Septembre & Octobre, que profitant d'une saison & d'un ciel favorables, je me livrai à la recherche & à la vérification de ces Etoiles. Pour mieux accoutumer mon œil à ces observations, & connoître mon télescope, je commençai par observer les Étoiles les moins difficiles à voir, telle que la Polaire, qui est de la quatrième classe, & que M. Herschell désigne ainsi, *double, extrêmement inégale, la plus grosse Étoile de couleur blanche, la petite de couleur rouge.* En effet, la Polaire nous offrit l'assemblage de deux Étoiles, dont l'une très-brillante & blanche, l'autre au-dessus sur la droite, distante de la première d'environ 20 secondes, infiniment petite, de couleur plutôt bleuâtre que rouge: nous employames divers grossissemens qui nous présentèrent la même apparence.

Je ne rapporterai point ici toutes les Étoiles que j'observai pendant le cours de deux mois où je passai en revue toutes les Étoiles du catalogue de M. Herschell, visibles alors. M. Méchain s'étant joint plusieurs fois à moi, nous observions alternativement la même Étoile, & portant chacun séparément notre jugement sur la grandeur, la couleur & la distance, nous composions, de nos opinions réunies, la description de chaque Étoile, que nous comparions ensuite à celle de M. Herschell. Or nous devons dire que nous avons toujours trouvé exactement les Étoiles annoncées par M. Herschell, telles qu'il les a décrites, à quelques différences près sur les couleurs, différences qui peuvent tenir à la constitution momentanée de l'air, ou

ou à d'autres circonſtances. Il eſt, nous l'avouerons, quelques-unes de ces Étoiles qui ont certainement une couleur marquée & particulière, par exemple, plus ou moins rouge, quelquefois orangée, d'autres fois bleuâtre; mais ces couleurs ne nous ont paru remarquables & diſtinctes que dans les plus groſſes des Étoiles doubles. Il nous a ſemblé que les couleurs de bleu-de-ciel & de bleu-obſcur, que M. Herſchell attribue ſouvent aux plus petites Étoiles, n'étoient qu'une apparence dûe à leur petiteſſe: quant à nous, cette petiteſſe, la plupart du temps, ne nous a permis de leur diſtinguer aucune couleur.

La viſite générale que ces obſervations me donnèrent lieu de faire dans tout le ciel, me fit découvrir une quantité conſidérable d'Étoiles doubles & triples que M. Herſchell n'avoit point rapportées dans ſon catalogue. J'avois même commencé à en noter un certain nombre, mais voyant qu'il augmentoit à meſure que je parcourois de nouvelles conſtellations, & de plus ne doutant pas que M. Herſchell occupé de cette recherche, n'eût, depuis deux ans que ſon catalogue étoit imprimé, reconnu & fait la deſcription de ces mêmes Étoiles, je jugeai ce travail inutile, & crus même devoir reſpecter en cela l'eſpèce de propriété que M. Herſchell ſembloit avoir acquiſe ſur ces recherches. J'avouerai en outre, que je ne regardai comme vraiment curieuſes que les Étoiles renfermées dans les deux premières claſſes du catalogue, leſquelles, par leur extrême proximité, peuvent ſeules réellement mériter le titre d'*Étoiles doubles,* qui même n'eſt qu'un terme fort impropre: en effet, ces Étoiles doubles ne ſont autre choſe qu'un groupe de deux Étoiles fort proches l'une de l'autre, dont preſque toujours l'une eſt fort brillante, l'autre infiniment petite. Les triples offrent un groupe de trois Étoiles, dont communément l'une eſt groſſe, & les deux autres beaucoup plus petites; l'une eſt ordinairement très-proche de la plus groſſe, & l'autre plus éloignée. Ces petites Étoiles ſont, la plupart du temps, comme des points,

ſouvent d'une lumière aſſez obſcure: mais cette petiteſſe n'eſt peut-être dûe qu'à leur ſeul éloignement; la proximité réciproque, à leur ſeule direction par rapport à nous. Il peut donc y avoir des intervalles immenſes entre ces deux, trois & quatre Étoiles que nous réuniſſons en une ſeule, ſous la dénomination d'*Étoiles doubles, triples* & *quadruples*: or, vouloir étendre ces dénominations à des Étoiles ſéparées de pluſieurs minutes, ce ſeroit, ce me ſemble, vouloir d'une conſtellation entière faire une ſeule Étoile. On peut donc ſe borner à diſtinguer celles dont la diſtance n'excède pas 5 à 6 ſecondes; ces Étoiles ſont véritablement difficiles à voir, demandent un œil exercé, un très-bon inſtrument, de forts groſſiſſemens & des circonſtances favorables: c'eſt en plein air qu'il eſt plus facile de les obſerver, cependant on peut le faire du dedans des appartemens, en ayant ſoin d'ouvrir les fenêtres avant de ſe mettre à la lunette, un temps aſſez conſidérable pour que l'air extérieur & l'air intérieur puiſſent ſe mettre en équilibre & devenir uniformes. En mettant l'œil à la lunette, on ne voit rien d'abord, ou plutôt on ne voit qu'une ſeule & principale Étoile; mais petit-à-petit l'œil s'accoutume & parvient bientôt à diſtinguer la petite Étoile voiſine, dont on rend la diſtance ou l'écartement de la groſſe plus ſenſible, en augmentant ſucceſſivement le groſſiſſement des oculaires.

Il ne faut pas croire cependant qu'il ſoit néceſſaire d'appliquer aux téleſcopes des oculaires de la plus grande force; je n'en ai employé que deux d'un groſſiſſement peu commun; l'un groſſiſſoit 460 fois, l'autre 1350, & il n'eſt pas une ſeule des Étoiles doubles les plus difficiles à voir, que je n'aie aperçu avec le groſſiſſement de 460. M. Herſchell n'a eu même beſoin que d'un pouvoir amplifiant de 227 pour les voir preſque toutes; il appliquoit enſuite un groſſiſſement de 460, pour rendre l'intervalle plus ſenſible & plus grand: d'où l'on conclura facilement que ce n'eſt pas, comme bien des perſonnes ont pu le penſer,

à des grossissemens extraordinaires que M. Herschell a dû la découverte de ces Étoiles singulières; car nous l'avons déjà dit plus haut, on avoit poussé jusqu'à 400 fois le grossissement des télescopes, il y en avoit plusieurs de cette force entre les mains de quelques observateurs, suffisans par conséquent pour apercevoir tout ce que M. Herschell a découvert, même la nouvelle Planète, dont le disque est assez sensible avec un grossissement de 250. Mais osons le dire, la découverte des lunettes achromatiqnes, est jusqu'à présent un service important que l'Optique a rendu plutôt aux Astronomes qu'à l'Astronomie: en effet, elle a procuré à ceux-ci plus de commodités, de facilité, d'agrément, pour ainsi dire, dans les observations; mais d'un autre côté elle les a peut-être un peu trop dégoûtés de l'usage pénible & plus difficile des gros télescopes & des longues lunettes, les seuls cependant à qui l'on doive les grandes découvertes qui ont été faites. Il ne sera pas impossible sans doute de pousser un jour beaucoup plus loin la perfection des lunettes achromatiques; mais en attendant, & dans l'état actuel des choses, il est toujours vrai de dire que le pouvoir de ces lunettes est très-limité, que non-seulement on n'a rien découvert avec elles, au-delà de ce que les lunettes simples ont fait connoître, mais même qu'elles ne font pas l'effet des lunettes de moyenne grandeur. Profitons donc, à l'exemple de M. Herschell, des forces & des moyens que nous prêtent les télescopes, & n'en négligeons plus tant l'usage.

Il n'est pas encore possible aujourd'hui de prononcer sur l'utilité & les conséquences que l'Astronomie peut tirer de la découverte de ces Étoiles doubles & triples, qui nous laissent même de grands doutes & de grandes difficultés à résoudre. En effet, que peuvent être ces petites Étoiles, foibles & obscures compagnes de plus grandes? en sont-elles voisines ou dépendantes? sont-elles d'un autre ordre, d'une autre nature? doit-on les comparer à des Satellites vis-à-vis de leur Planète principale? ou sont-

elles ſeulement des Étoiles d'une ſphère infiniment plus reculée, que leur direction ſeule fait paroître proches d'autres Étoiles plus brillantes, parce qu'elles ſont plus rapprochées de nous? Enfin la poſition reſpective de ces Étoiles reſtera-t-elle toujours la même? leur grandeur n'éprouvera-t-elle pas des variations? parmi ces nombreuſes Étoiles ne ſe trouvera-t-il pas encore quelque nouvelle Planète? Voilà ce qui mérite d'être ſuivi long-temps, voilà ce qui ſera intéreſſant à obſerver dans les ſiècles futurs, & rend cette découverte digne de notre curioſité. M. Herſchell, uniquement occupé de cet objet de recherches, a acquis ſans doute plus que perſonne, une pratique de ces ſortes d'obſervations, & des connoiſſances qui doivent lui mériter la confiance des Savans, ſur toutes les découvertes qu'il annonce. Néanmoins je n'ai pas cru inutile d'aller ſur ſes traces me livrer à une vérification qui m'a mis dans le cas de confirmer ces découvertes, & de rendre à leur auteur la juſtice & l'hommage qui lui ſont dûs.

Je joins à ce Mémoire une Table des Étoiles les plus curieuſes à obſerver *(voyez Tranſact. Phil. 1782, 1785).*

ÉTOILES doubles de la première Claſſe.

Aigle, précéd. γ	Petit Cheval, préc. 1.^{e}	Linx, ſuiv.... 36	G.^{de} Ourſe, préc. 44
π	ſuiv. 2	38	65
24.^{e}	S. γ	39 — 41	Perſée, préc... 18
préc. 62.^{e}	Cigne........ δ	préc. 44	Sagittaire...... β
Androm. préc. 56.^{e}	18.^{e}	la poitrine	Serpentaire.... 38
Balance, N. 11.^{e}	ſuiv. 33	Lion.......... γ	Serpent....... δ
Baleine, ſuiv. 54.^{e}	Cocher, précéd. μ	ω	π
Bélier, précéd. 6.^{e}	S. 50.^{e}	préc. 44	49
préc. 39.^{e}	préc. nébul.	Lyre, ſuiv..... δ	Taureau, préc.. ζ
Baleine, ſuiv. 54.^{e}	Coupe, N...... α	ſuiv. γ	préc. 8
Bouvier........ ε	Couronne, θ — δ	18.e — β	Triangle....... c
ι	Petit Chien, la cuiſſe	Ophiucus...... λ	Verſeau. préc.. λ
31.^{e}	Dragon, préc... β	τ	préc. β
39.^{e}	h	69	4
51.^{e}	ε	73	Vierge....... 81
Cancer...... 11.^{e}	16	Orion......... π	*Double-doubles.*
57.^{e}	N. 31	préc. τ	Balance...... ξ
Capricorne, préc. 29.^{e}	39	pr. 10	Perſée........ 37
Caſſiopée...... σ	48	25	*Triple-double-double.*
précéd. β	La Flèche, ſuiv. β	préc. 26	Lyre.......... ε
préc. 25	Hercule........ ζ	30	
Céphée. ſuiv... λ	ſuiv. φ	32	
ſuiv. 32	46	52	
précéd. 6	N. 105	Grande Ourſe... ζ	

ÉTOILES triples de la première & de la ſeconde Claſſe.

Aigle....... 37.^{e}	Licorne...... 11	Caſſiopée...... d	Orion......... λ
Balance...... 51	Linx......... 12	Orion......... σ	θ
Bélier......... π	Lion......... 90	44	*Quintuple.*
Cancer........ ζ	Lyre, pr....... ρ	*Quadruples.*	Gémeaux, préc. H
Caſſiopée..... 55	Orion, ſuiv... 47	Cigne, préc.. 25.^{e}	*Multipliées.*
Coupe. N..... 4	Verſeau, ſuiv.. 13	préc. 77	Cocher...... 15.^{e}
Cigne, ſuiv.... η	72	Lyre.......... β	S. 58
préc. 64	*Double-triples.*	Lézard........ 8	Gémeaux...... β
Couronne...... σ	Aigle....... 33.^{e}	Monoceros, préc. 25	
Flèche, S..... 15			

Nota. Les Étoiles de cette Table ſont déſignées par les lettres de Bayer ou les numéros du catalogue de Flamſtéed; *ſuiv.* ſignifie *ſuivante; préc. précédente; N.* au *Nord; S.* au *Sud; pr. proche;* θ — δ, entre θ & δ.



MÉMOIRE

SUR UN NOUVEAU GENRE DE PLANTE

Nommé Brucea,

ET

SUR LE FAUX BRESILLET D'AMÉRIQUE.

Par M. le Chevalier DE LA MARCK.

21 Janvier 1784. ON donne le nom de *Brucea*, en Angleterre, à un arbrisseau qui y a été apporté de l'Abyssinie, par M. le Chevalier Bruce, que l'on cultive depuis quelques années au Jardin du Roi, où il fleurit tous les ans, & dont nous croyons qu'aucun Botaniste n'a encore donné la description. Nous le nommerons

Brucé anti-dysentérique; *Brucea anti-dysenterica; Brucea floribus tetrandris, racemis simplicibus.*

Cet arbrisseau, dont la figure approche de celle d'un petit noyer, s'élève à la hauteur de 5 ou 6 pieds en Europe, & peut-être une fois davantage dans son pays natal. Sa tige est droite, recouverte d'une écorce grisâtre, un peu ridée, & se divise, dans sa partie supérieure, en quelques rameaux lâches, redressés, & feuillés à leur sommet : ces rameaux ont leur superficie raboteuse, couverte de tubercules épars, qui proviennent des cicatrices un peu saillantes qu'ont laissé les anciennes feuilles après leur chute, & sont garnis, sur-tout vers leur extrémité, d'un duvet court & roussâtre. Les feuilles sont grandes, rapprochées les unes des autres, & éparses autour des sommités des rameaux, où elles forment de belles rosettes étalées & terminales, qui donnent à cet arbrisseau un aspect assez agréable. Chaque feuille est longue d'un pied ou même davantage, ailée avec impaire, &

composée de onze ou treize folioles ovales-lancéolées, pointues, entières, molles, d'un vert-jaunâtre, & glabres, excepté en leurs bords & sur leurs nervures qui sont chargés, de même que les pétioles, de poils courts & roussâtres; ces folioles sont soutenues chacune par un pétiole court, ont environ trois pouces de longueur sur une largeur d'un pouce ou un peu plus, & sont opposées par paires, à l'exception de celles qui sont terminales.

Les fleurs de cet arbrisseau sont d'un seul sexe sur chaque pied, ou *dioïques*, selon l'expression de M. Linné. L'individu mâle de l'espèce dont nous traitons, est peut-être le seul que l'on posséde en Europe; il porte des fleurs fort petites, verdâtres, rougeâtres avant leur développement, & ramassées par petits paquets séparés & presque sessiles, sur de longs péduncules communs, grêles & velus: ces péduncules forment des grappes simples, linéaires, axillaires, solitaires dans chaque aisselle, un peu moins longues que les feuilles, & qui ressemblent en quelque sorte à des chatons longs & très-menus. Les paquets de fleurs sont à des distances inégales entr'elles, & vont toujours en se rapprochant d'autant plus les uns des autres, qu'ils sont plus près du sommet des grappes.

Chacune des fleurs dont il s'agit, consiste, 1.° en un calice velu en dehors, & profondément divisé en quatre découpures ovales-pointues, ouvertes & comme glanduleuses à leur sommet; 2.° en quatre pétales ovales-pointus, velus ou ciliés, alternes avec les divisions du calice, auxquelles ils ressemblent beaucoup, & ouverts en étoiles; 3.° en quatre étamines, une fois moins longues que les pétales, opposées aux divisions du calice, & dont les filamens insérés dans les échancrures ou sinuosités du disque qui occupe le centre de la fleur, portent chacun une anthère arrondie, rouge avant de s'ouvrir, blanchâtre dès qu'elle a répandu sa poussière, & divisée en deux loges; 4.° en un disque plane, charnu, ayant quatre échancrures latérales, qui lui donnent la forme d'une croix

de Malte, & occupant le centre de la fleur, à la place du piſtil qui ne s'y rencontre pas.

Voilà tout ce que nous ſavons de poſitif ſur la fructification de cet arbriſſeau; il commence à fleurir tous les ans dès l'entrée du printemps, & développe ſes fleurs avec une lenteur ſi conſidérable, que dans l'été il s'en épanouit encore; mais il en tire peu d'éclat, à cauſe de leur petiteſſe & de leur peu d'apparence: ſon bois eſt blanc, & ſes rameaux contiennent une moelle aſſez abondante. On donne à cet arbriſſeau le nom de *Brucé anti-dyſentérique*, parce qu'on prétend que les habitans du pays où il croît, ſe ſervent de ſes feuilles pour ſe guérir de la dyſſenterie.

M. Smeathman, Anglois, diſtingué par ſes connoiſſances en Hiſtoire Naturelle, & qui a voyagé en Afrique, a rapporté, de *Sicra-Leona*, des morceaux ſecs d'un autre arbriſſeau qui paroît être du même genre que celui dont nous venons de traiter, & auquel, par cette raiſon, on a donné, en Angleterre, le nom de *Brucea paniculata*, ou Brucé à panicules. Il diffère principalement de celui qui précède, en ce que ſes grappes de fleurs ſont rameuſes & paniculées. Ses fleurs, que nous n'avons vues que ſur des morceaux ſecs en très-mauvais état, nous ont paru toutes mâles ſeulement, & à étamines un peu plus longues que les pétales.

Il ſuit de ce que nous venons d'expoſer ſur le genre du *Brucea*, que la privation où nous ſommes des individus femelles des eſpèces de ce genre, nous laiſſant ignorer & la forme des fleurs femelles, & la nature des fruits qu'elles produiſent, nous n'avons pu établir qu'un caractère générique incomplet. Mais on trouve en Amérique, des arbriſſeaux qui nous paroiſſent avoir de ſi grands rapports avec les *Brucea* d'Afrique, que nous préſumons qu'ils ſont de la même famille, & d'un genre qui en eſt très-voiſin par ſes rapports. Or, comme ces arbriſſeaux ne ſont pas encore bien connus des Botaniſtes, nous allons

allons exposer en peu de mots ce que nos observations & nos recherches nous ont appris à leur sujet.

Des Brésillots, ou *faux Brésillets d'Amérique*.

Le P. Plumier, dans la portion de ses Découvertes botaniques qui n'a point encore vu le jour, fait mention, sous le nom de *Pseudo-Brasilium*, de deux arbrisseaux des Antilles, qui lui paroissent avoir tant de rapports entr'eux, qu'il les réunit dans sa description, regardant l'un comme une simple variété de l'autre. Nous allons néanmoins les distinguer & en traiter séparément, en connoissant un que l'on cultive au Jardin du Roi, où nous l'avons vu fleurir, & qui nous paroît différent de l'autre.

Le premier est le *Brésillot* velu; *pseudo-brasilium hirsutum*, Plum. mss. C'est aussi vraisemblablement le *tariri guianensis*, Aubl. guian. suppl. pag. 37, tab. 390; & le *tariri arbor tinctoria, foliis alternis, obscurè violaceis*, Barr. Franc. Equin. 106.

C'est un arbrisseau qui s'élève à la hauteur de huit à dix pieds sur une tige droite, de près de 2 pouces de diamètre, recouverte d'une écorce finement gercée & d'un brun-grisâtre. Cette tige se divise, à son sommet, en plusieurs rameaux alternes, couronnés chacun de grandes feuilles éparses & rapprochées en rosettes terminales; son bois est d'un rouge-brun, ou au moins prend cette couleur quelque temps après qu'il a été exposé à l'air. Ses feuilles sont longues presque d'un pied & demi, ailées avec impaire, & composées de quinze à dix-neuf folioles ovales-pointues, entières ou legèrement anguleuses, lisses, vertes & luisantes en dessus, velues dans leur contour, d'un vert-pâle en dessous, tantôt opposées par paires, & tantôt disposées alternativement, & soutenues par un petiole commun, pubescent & rougeâtre. Ces folioles ont trois à quatre pouces de longueur, & sont portées chacune sur un petiole propre fort court; elles prennent une couleur pourpre-noirâtre en se desséchant.

Les fleurs sont très-petites, d'un rouge-obscur, d'un

ſeul ſexe ſur chaque individu, & viennent ſur des grappes rameuſes & terminales. Celles qui ſont mâles ne nous ſont pas connues : les fleurs femelles conſiſtent en un calice velu en dehors, perſiſtant, & profondément diviſé en cinq découpures pointues; en cinq pétales lancéolés & un peu plus longs que le calice; & en un ovaire ſupérieur, ovale, glabre, dépourvu de ſtyle, & ſurmonté d'un ſtigmate ſeſſile, à deux lobes planes, ouverts & pubeſcens.

A ces fleurs ſuccèdent des fruits mous, pulpeux, de la forme de nos olives, mais un peu plus petits, d'un rouge de corail dans leur maturité, légèrement acides, & qui contiennent chacun un noyau oſſeux, de même forme & uniloculaire.

On trouve cet arbriſſeau à Saint-Domingue, à la Jamaïque & dans la Guiane. Lorſqu'on entame ſes rameaux, ou ſon tronc, dit le P. Plumier, il en ſort un ſuc qui noircit, & qui, par ſa cauſticité, forme une tache preſque ineffaçable s'il tombe ſur quelque partie du corps; ſon bois teint comme le bréſillet, mais d'une couleur qui eſt plus brune que rouge. Aublet dit, que ſes feuilles écraſées toutes vertes, & preſſées dans un morceau de coton, lui communiquent d'abord une teinture verte, qui peu après devient de couleur violette.

Le ſecond, eſt le bréſillot glabre; *pſeudo-braſilium glabrum.* Plum. mſſ.

A la vérité, ce bréſillot a de très-grands rapports avec le précédent; mais il paroît qu'il en diffère, 1.° en ce qu'il eſt plus petit, ne s'élevant qu'à la hauteur de 5 à 6 pieds ſeulement; 2.° que ſon bois eſt d'un blanc-pâle & moins propre à teindre; 3.° que ſes feuilles ſont tout-à-fait glabres, moins grandes, & n'ont que onze à treize folioles, dont les ſupérieures ſont plus longues & lancéolées.

Cet arbriſſeau croît naturellement à Saint-Domingue; on en cultive un individu femelle au Jardin du Roi, qui y fleurit vers le commencement de Novembre; ſes grappes de fleurs ſont rameuſes, terminales & longues de quatre ou

cinq pouces; les péduncules, communs & particuliers sont un peu pubescens: les fleurs, dans tout le reste, ne paroissent pas différer de celles du brésillot velu.

Quoique d'une part nous ne connoissions pas les fleurs femelles & les fruits des *Brucea*, & que de l'autre nous ignorions les caractères des fleurs mâles des *pseudo-brasilium*, ces divers arbrisseaux nous paroissent néanmoins devoir être tous rapportés à la même famille que le comoclade, les sumacs, le mollé, l'anacarde, &c. genres de plante avec lesquels ils ont des rapports très-marqués.

Observation. On trouve en Amérique, un arbrisseau encore peu connu, nommé par le P. Plumier, *dodonæa aquifolii folio tricuspidato* (Burm. amer. t. 118, f. 1), & qui semble avoir aussi quelques rapports avec le *Brucea*. Néanmoins cet arbrisseau se rapproche encore plus du *comocladia* de Linné, dont il est sans doute une espèce; car ses fleurs ont de même un calice à trois divisions, trois pétales, trois étamines, & un ovaire supérieur qui se change en une baie oblongue, contenant un noyau bifide ou à deux lobes. Nous croyons qu'on peut le nommer

Comocladia (tricuspidata) foliis pinnatis; foliolis ovatis tricuspidatis, racemis subsimplicibus.



RECHERCHES SUR LE CALCUL INTÉGRAL.

Par M. CHARLES.

SOIT entre les trois variables x, y, z, l'équation en différences partielles $Mp + Nq + L = 0$; $(dz = pdx + qdy)$; je dis que quand la proposée sera homogène entre x, y & z, son intégrale générale dépendra de l'intégration de deux équations ordinaires, chacune entre deux variables.

DÉMONSTRATION.

Multipliant la proposée par dx, l'équation hypothétique par M, & ajoutant, on a

$$Mdz + Ldx = q\,(Mdy - Ndx);$$

multipliant cette dernière équation par A, & ajoutant de part & d'autre la même quantité $q\,(Mdz + Ldx)$, on a

$$(Mdz + Ldx)\,(q + A) = q\,[Mdz + Ldx + A(Mdy - Ndx)].$$

Je rappelle d'abord que toutes les fois que les équations $Mdz + Ldx = 0$, & $Mdy - Ndx = 0$, pourront s'intégrer, séparées ou combinées ensemble, l'équation en différences partielles sera intégrée, comme l'a observé M. de la Grange, *dans les Mémoires de Berlin, pour l'année 1779;* car dans ce cas, on pourra trouver le facteur A qui rend le coéfficient de q multiple R, d'une différentielle exacte; & alors soit dv, cette différentielle exacte, on aura $(Mdz + Ldx)\,(q + A) = qRdv$. Puisqu'on a $v = F\,(x, y, z)$; (F indiquant une fonction

connue), on a $y = \daleth(x, v, z)$; ($\daleth$ indiquant une fonction renversée). Substituant cette valeur de y dans M, L, &c. on a $M' dz + L' dx = \frac{\varphi' R'}{\varphi' + A'} dv$, & z est maintenant une fonction cherchée de x & de v. Ainsi, si on fait v constant, dz deviendra une différence partielle relativement à x, & on aura $M' \delta z + L' dx = 0$, (δ étant le signe de la différence partielle) ; il n'y a donc qu'à intégrer, en faisant v constant, & prendre, pour arbitraire, une fonction de v, c'est-à-dire, de $F(x, y, z)$.

La question se réduit donc à intégrer l'équation

$$M dz + AM dy + (L - AN) dx = 0,$$

quel que soit M, N & L.

Supposons les homogènes, pour revenir au théorème que je dois démontrer. Soit A une fonction de dimension nulle des trois variables x, y, z, & faisons $x = rz$ & $y = sz$; nous aurons

$$-\frac{dz}{z} = \frac{amds + (l - an)dr}{m + lr + a(ms - nr)},$$

équation dont le second membre doit être une différentielle complète : a est la transformée de A, & les petites lettres l, m, n sont les transformées des majuscules L, M, N divisées par une puissance de z, dont l'exposant indique la dimension de ces majuscules. Maintenant, soit

$$m + lr + a(ms - nr) = \frac{1}{\psi} \text{ \& } \frac{m - (m + lr)m\psi}{ms - nr} = \theta;$$

nous aurons

$$-\frac{dz}{z} = \theta ds + (e - \theta f) dr,$$

e & f sont des fonctions connues de r & s, θ une fonction des mêmes variables qu'il faut déterminer pour que la fonction $\theta ds + (e - \theta f) dr$ soit une différentielle complète : donc,

$$\frac{\delta \theta}{dr} + f \frac{\partial \theta}{ds} + \theta f' - e' = 0:$$

δ & ∂ indiquent des différences partielles; f' & e' sont les coéfficiens de ds dans la différenciation de f & e: donc

$$d\theta + (\theta f' - e')\,dr = \frac{\partial \theta}{ds}(ds - fdr).$$

Il faut donc intégrer complètement l'équation

$$ds - fdr = 0,$$

entre les deux variables r & s, pour avoir l'équation $s = F(r, v)$, v étant l'arbitraire; substituer pour s cette valeur dans l'équation $d\theta + (\theta f' - e')\,dr = 0$, & satisfaire à cette dernière en faisant v constant.

Disons un mot des équations à un plus grand nombre de variables.

Soit entre les quatre variables x, y, v & z, l'équation linéaire en différences partielles

$$Mp + Nq + Or + L = 0\ (dz = pdx + qdy + rdv).$$

Chassant p, on aura

$$Mdz + Ldx = q(Mdy - Ndx) + r(Mdv - Odx);$$

multipliant tout par A, ensuite ajoutant & retranchant différentes quantités, on aura

$$(Mdz + Ldx)(A + r) = (Aq - rB)(Mdy - Ndx)$$
$$+ r[Mdz + AMdv + BMdy + (L - AO - BN)dx].$$

Supposons qu'on puisse rendre la fonction à quatre variables, coéfficient de r multiple S d'une différentielle exacte, par le moyen des coéfficiens, jusqu'à présent indéterminés A & B, & soit dv', cette différentielle; on aura $v' = F(x, y, v, z)$, & par conséquent $v = \varphi(x, y, v', z)$. Substituant cette valeur de v dans la proposée, on aura

$$(M'dz + L'dx)(A' + r')$$
$$= (A'q' - r'B')(M'dy - N'dx) + r'S'dv'.$$

Donc, si on fait v' constant, on aura

$$M'dz + L'dx = \frac{A'q' - r'B'}{A' + r'}(M'dy - N'dx),$$

équation linéaire ou qui du moins peut se traiter comme telle.

Supposons maintenant que les coéfficiens M, N, O, L sont homogènes entre les quatre variables x, y, v, z; regardons A & B comme des fonctions de dimension nulle de ces variables, & faisons $x = x'z$; $y = y'z$; $v = v'z$; l'équation

$$Mdz + AMdv + BMdy + (L - AO - BN)dx = 0,$$

qui doit être possible, deviendra

$$M'dz + A'M'(v'dz + zdv') + B'M'(y'dz + zdy') + \&c.$$

A' & B' représentent les transformées de A & B, & M', N', &c. les transformées des lettres non accentuées correspondantes, divisées par une puissance de z, dont l'exposant indique la dimension des lettres M, N, &c.; donc

$$-\frac{dz}{z} = \frac{A'M'dv' + B'M'dy' + (L' - A'O' - B'N')dx'}{M' + A'M'v' + B'M'y' + (L' - A'O' - B'N')x'},$$

équation, dans le second membre de laquelle z est évanoui. Maintenant si on fait différentes transformations indiquées par la nature de la question, pour rendre la recherche des indéterminées, plus facile, on trouvera facilement qu'on peut faire

$$-\frac{dz}{z} = \theta dv' + \lambda dy' + (A + B\theta + P\lambda)dx';$$

A, B, P étant des fonctions connues de v', y', & x'; θ & λ des fonctions inconnues des mêmes variables, qu'il faut déterminer, pour que le second membre de l'équation soit une différentielle exacte, d'où on peut conclure ce théorème.

Pour réduire une équation linéaire homogène en différences partielles du premier ordre, entre un nombre

quelconque de variables, à une équation auſſi linéaire & du premier ordre, où le nombre des variables ſeroit moindre d'une unité, il faut rendre différentielle exacte la fonction

$$\theta dx + \lambda dy + \kappa dv + \&c. + (A + B\theta + D\lambda + E\kappa + \&c.)\, ds,$$

le nombre des variables $x, y, v, \ldots s$ étant moindre d'une unité que dans la propoſée; $A, B, D, E,$ &c. étant des fonctions données de ces variables; θ, λ, κ, &c. des fonctions inconnues.



MÉMOIRE

MÉMOIRE
SUR LA DISPARITION DE L'ÉTOILE
De la constellation du Taureau, que Flamstéed a placée dans son Catalogue, pour 1690, à 51d 46' 50" de longitude, avec une latitude de 0d 5' $\frac{1}{3}$ méridionale.

Par M. LE MONNIER.

IL y a huit jours que l'Académie a été informée par une lettre écrite de Limoges, au Président de l'Académie, qu'on ne voyoit plus l'étoile du Taureau, de la sixième grandeur, qui est la huitième de cette même constellation. De plus, l'auteur de cette remarque importante, M. Montaigne, ajoute qu'il a fait cette recherche, soupçonnant, & peut-être avec plus de fondement * que ne doit être une simple conjecture, que cette même étoile pourroit bien être la nouvelle Planète découverte par Herschell, à Bath, le 13 Mars 1781, vers le commencement du signe de l'Écrevisse, ou fin du signe du Taureau.

Lû le 15 Déc. 1784.

Cette étoile du catalogue de Flamstéed, ne se trouve point dans la première édition publiée en 1712, du catalogue Britannique : on ne la retrouve pas non plus dans le zodiaque de Senex; mais j'ai eu soin de la faire insérer dans le zodiaque de Dheulland.

J'ai fait part les jours suivans, à M. le Duc de la Rochefoucault & à Limoges, des deux observations que Flamstéed en avoit faites, & que j'ai retrouvées dans l'année 1704, le 29 Septembre & le 1.er Octobre suivant. J'en ai fait un nouveau calcul, ayant égard à l'aberration

* M. Montaigne supposoit pour lors qu'elle avoit été observée à Gréenwich, avant 1690.

& à la nutation de *n* des Pléïades, dont l'ascension droite apparente a dû être, selon mon catalogue, de $52^d\ 29'\ 45''$; d'où ôtant $2^d\ 56'\ 6''$, ayant égard à $4''\frac{1}{2}$ de temps, pour l'erreur du plan de l'arc mural, la longitude sera ♉ $21^d\ 57'\ 51''$, avec une latitude australe de $5'\ 6''\frac{1}{2}$: dans le calcul, j'ai supposé l'obliquité apparente de l'écliptique, $23^d\ 29'$, & la déclinaison boréale de l'étoile, $18^d\ 12'\ 40''$.

En 1757 & 1758, lorsque je travaillois au catalogue des étoiles zodiacales, je n'ai point aperçu cette étoile, mais seulement la double qui suit, & quelques autres qui sont plus au nord, & presque au même degré d'ascension droite.

Opposition de Jupiter au Soleil, observée le 27 Août 1784.

A $11^h\ 51'\ 49''$, la planète de Jupiter a passé au méridien après la 1.re *σ* du Verseau $55''\frac{1}{3}$ de temps, à la pendule, & à distance du Zénit de $60^d\ 36'\ 50''$.

Donc longitude apparente observée ♓ $2^d\ 34'\ 30''$, avec une latitude australe de $1^d\ 20'\ 42''$.

Les Tables de Halley, au même instant, indiquent $55''\frac{1}{2}$ de plus, c'est-à-dire la longitude ♓ $2^d\ 35'\ 25$ à $26''$.

Quant à l'opposition de Saturne au Soleil, on la déduira de l'observation suivante : le 13 Juillet, à $11^h\ 53'\ 2''$ de temps vrai, à distance apparente du Zénit de $70^d\ 40'\ 10''$, Saturne a précédé f du Sagittaire de $0^h\ 5'\ 10''$, & avoit suivi *e* du voile de $55''$ de temps; ce qui donne son ascension droite apparente $292^d\ 10'\ 30''$, & sa déclinaison méridionale $21^d\ 50'\ 45''$, sa longitude ♑ $20^d\ 30'\ 27''\frac{1}{2}$, avec une latitude boréale de $3'\ 31''\frac{1}{2}$. Les Tables de Halley donnent la longitude de Saturne $6'\ 53''$ moins avancée. au lieu que l'année précédente, le 1.er Juillet, à $11^h\ 56'\ 32''$, elles donnoient la longitude de Saturne $8'$ moins avancée.



OBSERVATION
SUR UNE ILLUSION D'OPTIQUE.

Par M. DE FOURCROY.

LE cahier de Septembre dernier, du Journal de physique, en rapportant les effets singuliers d'un treillis sur la vue de M. de Godart, *page 219*, m'a rappelé une petite observation que j'avois écrite en 1776, sur l'ombre d'un treillis, & dont j'avois oublié depuis lors de rendre compte à l'Académie. Lû le 13 Déc. 1784.

Le 23 Octobre, à Perpignan, vers neuf heures du matin, me trouvant assis, par un beau soleil, dans un petit cabinet vis-à-vis un mur blanc, je remarquai que le treillis de fer d'une fenêtre à laquelle je tournois le dos, étoit légèrement projeté par le soleil sur ce mur; mais avec la singularité, que les raies claires de ce tableau *(figure 2)*, me parurent être la projection des fils de fer du treillis *(fig. 1)*, & que les losanges moins claires *(figure 2)*, me sembloient être la projection de l'ouverture des mailles.

Les figures ci-jointes sont de grandeur naturelle; elles furent crayonnées, tant sur le grillage même, que sur son ombre qui se projetoit à 68 pouces du treillis *.

J'avois pensé quelquefois à ce tableau, lorsque le 13 Novembre, revoyant la même image au même lieu, je la reçus sur un carton très-blanc, appliqué contre le mur; puis en rapprochant ce carton de la fenêtre le long d'une règle, j'observai qu'à mesure de sa marche vers le treillis,

* Le fil avoit $\frac{7}{12}$ ligne de diamètre; chaque nœud étoit de 1 $\frac{3}{4}$ ligne de hauteur, & 1 $\frac{1}{4}$ ligne de largeur.

l'intenſité des taches obſcures ſe renforçoit dans leur milieu; les raies claires qui les ſéparoient, augmentoient fort de largeur. Je fis aller & venir lentement mon carton; ce mouvement me démontra le contraire du premier jugement que j'avois porté ſur ce tableau: je reconnus parfaitement que ces raies claires & continues étoient la projection du vide des mailles, & que les loſanges obſcures ou moins claires, étoient celles des nœuds du treillis.

La preuve en fut complète, lorſqu'à meſure du cheminement du carton plus près de la fenêtre, je vis toutes les loſanges, qui ſe rétréciſſoient, prendre enfin la vraie forme des nœuds du treillis, tandis que les raies claires, qui s'élargiſſoient, laiſſoient inſenſiblement paroître l'ombre des fils de fer, & acquéroient la vraie forme des mailles.

On trouve tous ces faits très-bien expliqués par M. de Maraldi, dans les Mémoires de l'Académie, *année 1723, page 111.*

Le 11 Décembre ſuivant, je conſidérois encore ce tableau ſur le mur, lorſqu'un nuage léger vint à paſſer devant le Soleil; dans ce moment, la projection ſur le mur fut entièrement ſemblable au treillis, toutes ſes mailles, ſes fils de fer & ſes nœuds parfaitement deſſinés & tranchés. Dès que le nuage fut totalement paſſé, la première image reparut: j'avois vu ſur le mur, à la fin du paſſage de ce nuage, les ombres des nœuds croître par degrés fort ſenſibles, juſqu'à ce que le Soleil eût repris tout ſon éclat, préciſément comme ſur mon carton ci-deſſus, lorſque je l'avois éloigné du treillis.

Ce dernier fait eſt celui qui mérite quelqu'attention; il paroît contraire à la doctrine des ombres & pénombres, ou de la diffraction, & ne pouvoir être expliqué que par celle des réfractions. Il ſemble néceſſaire de prêter à ce nuage la même propriété qu'à nos verres convexes, de

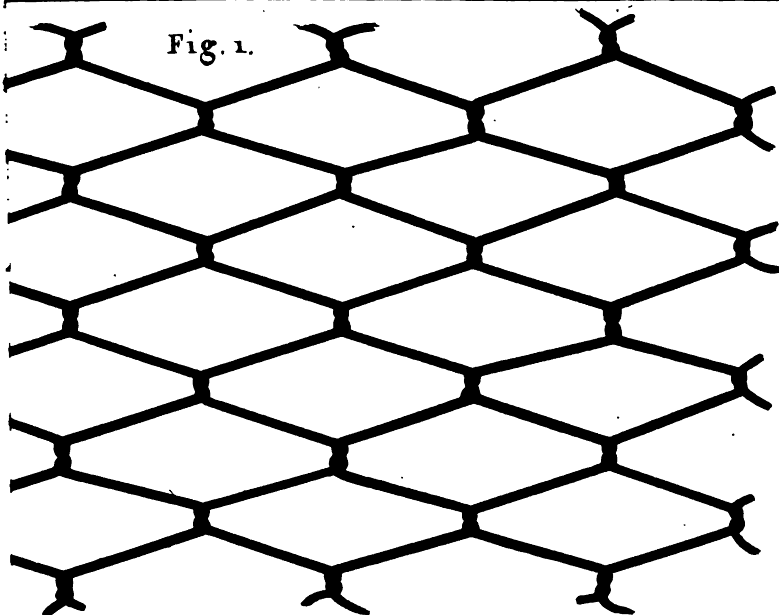
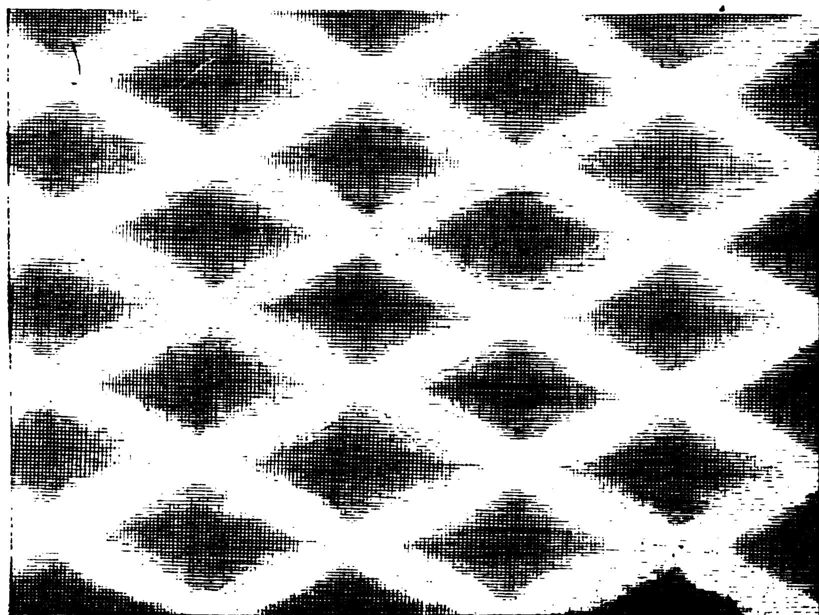


Fig. 1.

Fig. 2.



Y. le G. Sc.

transſmettre contre le treillis l'image du diſque du Soleil, beaucoup plus petite qu'elle ne l'eſt naturellement, puiſque les fils de fer portèrent leur ombre pleine & terminée, juſqu'à environ quatorze cents fois leur diamètre, au lieu de ne la porter qu'à quarante-deux fois ce diamètre. En l'expliquant ainſi, il ſeroit propre à confirmer les ſoupçons déjà fondés ſur d'autres faits, que les nuages tranſmettent quelquefois à la terre des coups de Soleil beaucoup plus chauds que ceux qui nous en viennent par la ſimple traverſée de l'atmoſphère.



MÉMOIRE

CONTENANT LES OBSERVATIONS ET LA THÉORIE DE LA PREMIÈRE COMÈTE DE 1784.

Par. M. MÉCHAIN.

CETTE Comète fut aperçue à Paris, le 24 Janvier, au soir, par M. le Comte de Caſſini; il eut la complaiſance de m'en donner avis ſur le champ, & nous en fimes de concert la première obſervation. La Comète, quoique près de l'horizon, paroiſſoit à la vue ſimple avec une queue de 2 à 3 degrés; le noyau étoit aſſez bien terminé & très-lumineux, ſon diamètre apparent étoit de 33″. L'obſervation que je vais rapporter, & les ſuivantes, ont été faites avec une lunette achromatique, de trois pieds & demi de foyer, garnie d'un bon micromètre à fils. A $7^h\ 35'\ 53''$, temps moyen, la Comète précédoit l'étoile π de la Baleine, au cercle horaire, de $44^d\ 57'\ 34''$; & elle étoit plus auſtrale de 20′ 10″, réduction faite du parallèle apparent au vrai; d'où j'ai conclu l'aſcenſion droite de $353^d\ 30'\ 25''$, la déclinaiſon auſtrale $14^d\ 26'\ 40''$. En comparant de même le paſſage de la Comète avec ceux des étoiles, *n.os 18 & 47* de la Baleine, du catalogue de Flamſtéed, j'ai trouvé les mêmes réſultats à peu de ſecondes près, corrigeant d'ailleurs la poſition de ces étoiles, relativement à celle de π que j'ai tirée du catalogue de Bradley. On ne put cette première fois avoir aucune idée de la vîteſſe & de la direction du mouvement de la Comète, parce que le long intervalle de temps qui s'écoula entre ſon paſſage & celui de quelqu'étoile bien connue, ne permit point d'en faire une ſeconde obſervation.

Depuis le 24 Janvier jusqu'au 3 Février, le ciel fut presque toujours couvert; la Lune augmentoit de jour en jour, j'épiois les instans où les nuages s'entr'ouvroient, pour rechercher la Comète; mais c'étoit toujours sans succès. Enfin, le 3 Février, le ciel étant assez pur, je la retrouvai au-dessous du ventre du Poisson austral: la grande clarté de la Lune empêchoit de la distinguer à la vue simple, & elle en éteignoit totalement la queue. Par un milieu entre plusieurs observations, je trouvai qu'à $7^h\ 38'\ 47''$, temps moyen, la Comète étoit à l'orient de λ des Poissons de $1^d\ 46'\ 40''$, & plus boréale de $3'\ 37''$; ce qui donne l'ascension droite de $354^d\ 32'\ 12''$, la déclinaison boréale $0^d\ 39'\ 12''$.

Le 4 Février, à $6^h\ 33'\ 48''$, temps moyen, la Comète étoit à l'orient de la dix-neuvième des Poissons, de $41'\ 48''$, & moins boréale de $37'\ 2''$; ce qui donne $354^d\ 32'\ 18''$, pour l'ascension droite, & $1^d\ 40'\ 16''$ pour la déclinaison boréale. A $6^h\ 56'\ 55''$, la Comète précédoit α du lien des Poissons, de $33^d\ 11'\ 11''$, & elle étoit moins boréale de $1'\ 16''\frac{1}{2}$; donc ascension droite $354^d\ 32'\ 12''$, déclinaison boréale $1^d\ 41'\ 32''$.

Le 10, j'ai trouvé la Comète très-près d'une étoile de sept à huitième grandeur, & d'une autre de huit à neuvième. La Lune n'étant pas alors sur l'horizon, je distinguois bien la Comète, à la vue simple; j'ai estimé la longueur de sa queue vue par la lunette de nuit, de deux degrés; le noyau étoit très-brillant, mais entouré d'une légère nébulosité. A $6^h\ 41'\ 33''$, temps moyen, différence d'ascension avec l'étoile 2 c des Poissons — $3^d\ 28'\ 4''$, & en déclinaison — $15'\ 49''$; d'où j'ai conclu l'ascension droite de la Comète $354^d\ 24'\ 3''$, sa déclinaison, $7^d\ 1'\ 22''$.

Le 13, sur les 7 heures $\frac{1}{4}$ du soir, on a commencé à voir quelques étoiles au zénit, ensuite les nuages se sont dissipés assez promptement. J'ai aperçu la Comète entre la soixante-dix-septième & la quatre-vingt-deuxième

de Pégase; on la voyoit difficilement sans lunette, parce qu'elle étoit près de l'horizon; sa queue avoit encore plus d'un degré, son noyau étoit brillant & entouré de nébulosité. A 7^h 55′ 7″, elle étoit à l'orient de la soixante-dix-septième de Pégase, de 1^d 9′ 56″ $\frac{1}{2}$, & 3′ 30″ plus boréale; j'en ai déduit l'ascension droite de 354^d 15′ 55″, la déclinaison 9^d 11′ 27″. A 7^h 59′ 51″, temps moyen, elle précédoit la quatre-vingt-deuxième étoile de Pégase, de 1^d 8′, & elle étoit moins boréale de 33′ 29″; ces différences sont corrigées de l'effet de la réfraction: l'ascension droite de la Comète étoit donc à ce dernier instant de 354^d 15′ 46″, sa déclinaison de 9^d 11′ 13″; mais je préfère la première détermination.

Le 14, à 6^h 44′ 29″, temps moyen, la Comète précédoit la quatre-vingt-deuxième de Pégase, de 1^d 11′ 0″ $\frac{1}{2}$; elle étoit plus boréale de 4′ 37″, ce qui donne l'ascension droite de 354^d 12′ 45″, la déclinaison 9^d 49′ 19″.

Le 23, à 7^h 25′ 14″, temps moyen, différence d'ascension droite entre la Comète & la soixante-seizième de Pégase + 49′ 29″, & de déclinaison − 22′ 53″; j'en ai conclu l'ascension droite de la Comète de 353^d 45′ 58″, sa déclinaison 14^d 45′ 25″ $\frac{1}{2}$.

Le 1.er Mars, à 6^h 52′ 7″, la Comète étoit *plus* occidentale que φ de Pégase, de 1^d 54′ 4″, & moins boréale de 9′ 41″; ce qui m'a donné l'ascension droite de 353^d 28′ 29″, la déclinaison 17^d 45′ 35″.

M. Messier vit encore la Comète le 11 Mars, & il a bien voulu me communiquer son observation qui donne pour 7^h 23′ 19″, temps moyen, la différence en ascension droite avec y de Pégase de + 2^d 26′ 30″, celle en déclinaison + 6′ 17″. D'après l'observation que j'ai faite de cette étoile au méridien, j'ai conclu pour l'époque de l'observation de M. Messier, l'ascension droite de la Comète de 353^d 6′ 30″, sa déclinaison 21^d 25′ 13″ boréale.

C'est au 11 Mars, que se terminent les premières

observations

observations de cette Comète; elle étoit alors trop près de l'horizon, & trop éloignée du Soleil ainsi que de la Terre, pour qu'on pût espérer de la suivre plus long-temps. J'avois déjà présenté à l'Académie, un essai sur les élémens de l'orbite de cette Comète, qui étoit fondé sur mes observations des 24 Janvier, 3 & 14 Février; ce sont ces élémens que M. Pingré a bien voulu insérer, *page 512, du second volume de sa Cométographie.* D'après ces élémens, j'ai tracé la figure de l'orbite de la Comète, & j'ai remarqué, que vers le commencement de Mai, elle ne seroit pas beaucoup plus éloignée de la Terre, qu'elle ne l'avoit été le 11 Mars, & que son élongation du Soleil seroit assez grande; cela me fit concevoir l'espérance de la revoir en Mai, lorsque la Lune ne seroit pas sur l'horizon, & que le ciel seroit bien pur.

Ayant donc calculé la position de la Comète, pour le 9 Mai au soir, je pointai ma lunette, avant le lever de la Lune, à l'endroit où le calcul m'avoit indiqué que la Comète devoit se trouver, & j'eus la satisfaction de la voir dans le champ de la lunette, sans que cela m'eût coûté plus de recherches. La Comète étoit extrêmement foible, on n'y distinguoit presque plus de noyau, ce n'étoit qu'une nébulosité diffuse, de 3 minutes environ de diamètre; elle disparoissoit presque entièrement dès que j'éclairois un peu les fils du micromètre; mais comme elle n'étoit élevée sur l'horizon que d'environ 17 degrés, j'ai présumé qu'elle auroit été beaucoup plus sensible à une plus grande hauteur: la Lune qui s'est levée à minuit 49 minutes, ne m'a pas permis de l'observer plus tard. Voici la nouvelle suite de mes observations; M. Messier reprit aussi les siennes, après que je l'eus informé que la Comète paroissoit encore.

Le 9 Mai, à $12^h\ 27'\ 20''$, la Comète précédoit une étoile de sixième grandeur, de $38'\ 24''$; elle étoit moins boréale de $20'\ 10''$: au même instant elle précédoit une autre étoile de septième grandeur, de $1^d\ 4'\ 33''$, &

elle étoit plus nord de 20′ 59″. Les positions de ces étoiles ne se trouvent dans aucun Catalogue; je les ai déterminées dans la suite, en les comparant avec γ du Cygne; & par un milieu entre les deux observations, j'ai trouvé pour le 9 Mai, à 12^h 27′ 20″, l'ascension droite de la Comète, de 347^d 54′ 20″; sa déclinaison boréale, 39^d 34′ 43″: cette position est un peu incertaine.

Le 12, j'ai déterminé par un milieu entre six observations, qu'à 13^h 23′, temps moyen, la Comète étoit à l'orient de la neuvième étoile d'Andromède, de 8′ 54″, & moins boréale de 3′ 35″; donc ascension droite 357^d 11′ 45″, déclinaison 40^d 32′ 8″.

Le 14, à 12^h 14′, temps moyen, différence en ascension droite avec la dixième étoile d'Andromède — 44′ 7″, en déclinaison + 14′ 31″, par neuf observations; donc ascension droite de la Comète, 346^d 40′ 18″, déclinaison 41^d 8′ 20″.

Le 17, à 12^h 15′ 11″, temps moyen, la Comète précédoit la treizième étoile d'Andromède, de 3^d 22′ 18″, & elle étoit plus boréale de 20′ 30″; donc ascension droite 345^d 49′ 7″, déclinaison 42^d 3′ 51″. Au même instant, la Comète étoit à l'occident de l'étoile ι d'Andromède, de 6^d 4′ 30″, & moins boréale de 19″; ainsi, selon cette seconde observation, son ascension droite étoit de 345^d 49′ 35″, sa déclinaison 42^d 4′ 3″.

Le 21, à 11^h 14′ 46″, temps moyen, la Comète étoit à l'occident d'une étoile indéterminée & de sixième grandeur, de 7^d 13′ 41″; elle étoit plus boréale de 2′ 12″: ayant ensuite observé cette étoile au méridien, je conclus l'ascension droite de la Comète de 344^d 31′ 52″, sa déclinaison de 43^d 16′ 4″. Au même instant elle précédoit *x* d'Andromède, de 7^d 55′ 48″, & elle étoit plus boréale de 8′ 0″; d'où j'ai déduit son ascension droite de 344^d 31′ 52″, & sa déclinaison de 43^d 16′ 9″.

Le 25 Mai, à 13^h 22′, temps moyen, la Comète étoit plus orientale qu'une étoile indéterminée & de septième

grandeur, de 18′ 18″, & plus boréale de 16′ 16″; après avoir déterminé la position de cette étoile, j'en ai conclu l'ascension droite de la Comète de 343ᵈ 0′ 39″, sa déclinaison boréale de 44ᵈ 29′ 0″. Cette observation n'est peut-être pas aussi exacte que les précédentes, parce que la Comète étoit extrêmement foible & très-élevée: la grande distance où elle étoit alors du Soleil & de la Terre, ainsi que la lumière de la Lune, me la dérobèrent tout-à-fait, & je ne la revis plus.

Voici les nouveaux élémens de l'orbite de cette Comète, que j'ai rectifiés sur la totalité de mes observations.

Longitude du nœud ascendant............	1ˢ 26ᵈ 49′ 21″
Inclinaison de l'orbite..................	51. 9. 12.
Lieu du périhélie sur l'orbite............	2. 20. 44. 24.

Distance périhélie 0,707858, dont le logarithme = 9,849946.

Temps moyen du passage au périhélie, 21 Janvier à 4ʰ 56′ 47″.

Sens du mouvement réel...... rétrograde.

C'est la soixante-neuvième dont on ait calculé l'orbite,

Depuis le 24 Janvier jusqu'au 25 Mai, elle a parcouru sur son orbite un arc de 104ᵈ 38′ 31″, du même côté du périhélie; mais l'accord des observations avec le calcul dans la parabole, doit faire présumer que l'ellipse que parcourt cette Comète, est extrêmement alongée, & que sa période est fort longue.

La première des deux Tables suivantes contient les longitudes & les latitudes géocentriques de la Comète, calculées d'après les observations que je viens de détailler; les différences entre les positions observées & celles calculées d'après les élémens ci-dessus; & les distances de la Comète au Soleil & à la Terre, à l'instant de chaque observation. La deuxième Table renferme les ascensions droites & les déclinaisons des étoiles affectées de l'aberration & de la nutation, telles que je les ai employées pour réduire celles de la Comète.

TABLE I. *Des Longitudes & Latitudes géocentriques de la première Comète de 1784, comparées au calcul fait sur les élémens de l'orbite.*

MOIS & JOURS.		TEMPS MOYEN.	LONGIT. OBSERVÉE.	LATITUDE OBSERVÉE.	Les élémens donnent en longit.	Les élémens donnent en latit.	Dist. de la Com. au ☉	Dist. de la Com. à la Terre.
		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.	celle Sol. = 1,000	
Janvier	24	7. 35. 53	348. 16. 10	10. 40. 20A.	— 0. 2	+ 0. 1	0,711	0,857.
Février	3	7. 38. 47	355. 14. 45	2. 46. 22B.	— 0. 5	+ 0. 26	0,756	1,149.
	4	6. 56. 55	355. 39. 33	3. 43. 34B.	— 0. 2	+ 0. 7	0,763	1,178.
	10	6. 41. 33	357. 40. 24	8. 40. 6	— 0. 32	— 0. 1	0,816	1,352.
	13	7. 55. 7	358. 25. 57	10. 42. 41	+ 0. 42	+ 0. 24	0,847	1,433.
	14	6. 44. 29	358. 38. 36	11. 18. 3	+ 0. 26	+ 0. 6	0,857	1,463.
	23	7. 25. 14	0. 19. 6	15. 59. 28	— 0. 4	— 0. 25	0,965	1,691.
Mars	1	6. 52. 7	1. 21. 5	18. 50. 14	— 0. 19	+ 0. 17	1,058	1,843.
	11	7. 23. 19	2. 39. 46	22. 18. 6	+ 0. 9	— 0. 25	1,197	2,028.
Mai	9	12. 27. 20	7. 58. 39	40. 26. 49	+ 2. 2	+ 0. 41	2,040	2,435.
	12	13. 23. 0	8. 0. 50	41. 32. 49	+ 0. 11	+ 0. 22	2,082	2,434.
	14	12. 14. 0	7. 58. 55	42. 16. 6	+ 0. 36	+ 0. 12	2,109	2,433.
	17	12. 15. 11	7. 55. 3	43. 23. 27	— 0. 35	— 0. 15	2,149	2,430.
	17	12. 15. 11	7. 54. 30	43. 23. 30	— 0. 2	— 0. 18	2,149	2,430.
	21	11. 14. 46	7. 41. 43	44. 54. 53	+ 0. 28	+ 0. 29	2,203	2,426.
	25	13. 22. 0	7. 20. 9	46. 31. 56	+ 0. 58	+ 1. 4	2,258	2,421.

TABLE II. *Des Ascensions & Déclinaisons apparentes des Étoiles, auxquelles la Comète a été comparée.*

ASCENSION DROITE apparente.	DÉCLINAIS. APPARENTE.	CARACTÈRE DES ÉTOILES, Et autorités sur lesquelles leurs positions sont établies.
D. M. S.	D. M. S.	
238. 27. 59	14. 47. 1 *A*	π de la Baleine, catalogue de Bradley.
352. 45. 32	0. 35. 35 *B*	λ des Poissons, catal. de Bradley.
353. 50. 30	2. 17. 18 *B*	19.e des Poissons, catal. de Bradley.
27. 43. 23	1. 42. 48	α du lien des Poiss., catal. de Bradley.
357. 52. 7	7. 17. 11	2. *c*. des Poissons, catal. de Mayer.
353. 5. 58	9. 7. 57	77.e de Pégase, déterm. par M. d'Agelet.
355. 23. 45	9. 44. 42	82.e de Pégase, déterminée par moi.
352. 56. 29	15. 8. 18½	76.e de Pégase, déterm. par M. d'Agelet.
355. 22. 33	17. 55. 16½	φ de Pégase, déterm. par M. d'Agelet.
350. 40. 0	21. 18. 56	*y* de Pégase, déterminée par moi.
348. 32. 28	39. 55. 6	Étoile de 6.e grand. } déterm. par moi.
348. 59. 10	31. 13. 31	Étoile de 7.e grand. }
347. 2. 50½	40. 35. 43½	9.e d'Andr. déterm. par M. d'Agelet.
347. 24. 24½	40. 53. 48	10.e d'Andr., déterm. par M. d'Agelet.
349. 11. 25	41. 43. 21	13.e d'Andr., déterm. par M. d'Agelet.
351. 54. 5	42. 4. 22	ι d'Andromède } déterm. par moi.
351. 45. 33	43. 13. 52	Étoile de 6.e grand. }
352. 27. 40	43. 8. 9	κ d'Andromède }
342. 42. 21	44. 12. 44	Étoile de 7.e grand. }

Cette Comète fut encore observée à Paris, par M.rs Cassini & Messier; & à Toulouse, par M. Darquier: on auroit pu la voir à Paris, dès le 18 Janvier, mais le mauvais temps ne le permit point.

Elle avoit été vue à l'île de Bourbon, dès le 15 Décembre 1783; M. de la Nux en fit, dans cette Isle,

plusieurs observations, dont la première est du 3 Janvier 1784; il en a déterminé les positions, en mesurant, avec un octant, sa distance à plusieurs étoiles fixes. M. Pingré qui a comparé ces observations à la théorie que j'ai rapportée ci-dessus, a trouvé qu'elles s'y accordent aussi bien qu'on peut l'attendre du moyen que M. de la Nux a employé pour fixer les lieux de la Comète: ces observations seront imprimées dans le recueil des Mémoires présentés à l'Académie par les Savans étrangers.

On vit aussi cette Comète, le 10 Janvier, au cap de bonne-Espérance; M. Tondu, étant en rade de la Guadeloupe, l'aperçut le 16 du même mois; M. le Chevalier d'Angos en fit plusieurs observations à Malte, à commencer du 20 Janvier; enfin, elle fut encore observée par M. l'abbé de Beauchamp, à Bagdad, les 19 & 22 Janvier, ensuite à Bassora, les 10, 20 & 25 Février.



OBSERVATION
DE L'ÉCLIPSE DE LUNE, DU 6 MARS 1784,
Faite à l'Obſervatoire royal.

Par M. MÉCHAIN.

J'AI fait cette Obſervation de concert avec M. le Comte de Caſſini, qui donnera les détails de la ſienne. Je me ſuis ſervi d'une lunette achromatique de trois pieds & demi de foyer; les diſtances des cornes ont été priſes avec un micromètre, à fil curſeur, appliqué à cette lunette, & je n'ai employé qu'un groſſiſſement de vingt-ſept fois. M. de Caſſini meſuroit de ſon côté les parties éclairées du diſque de la Lune.

Temps vrai.	
14h 10′ 0″	Pénombre ſenſible; la Lune étoit dans de très-légers nuages, & elle étoit entourée d'un halo coloré.
14. 24. 30	Commencement de l'éclipſe; le bord de l'ombre étoit très-diffus.
14. 30. 37	Le bord de l'ombre, qui eſt toujours mal terminé, touche le bord de la longue tache blanche, dans laquelle ſe trouve *Heraclides.*
14. 35. 10	*Heraclides* entre dans l'ombre.
14. 39. 47	*Ariſtarchus* entre.
14. 43. 10	Diſtance des cornes, 18′ 51″.
14. 43. 40	*Ariſtarchus* tout dans l'ombre, dont le bord devient un peu mieux terminé.
14. 45. 50	*Plato* entre.
14. 47. 20	*Idem*, tout dans l'ombre.
14. 48. 10	Diſtance des cornes, 20′ 28″.
14. 51. 30	Diſtance des cornes, 22′ 5″.
14. 56. 30	*Ariſtoteles* entre.
14. 58. 10	*Idem*, à moitié.

Temps vrai.	
14^h 58′ 10″	Distance des cornes, 23′ 42″.
14. 59. 50	*Eudoxus* entre.
15. 0. 40	Un petit point lumineux, qui précède *Copernicus*, entre.
15. 2. 30	*Gallileus* entre dans l'ombre, qui le rase très-long-temps sans le couvrir entièrement.
15. 5. 30	L'ombre au bord de *Mare-Serenitatis*.
15. 6. 50	Distance des cornes, 25′ 18″.
15. 16. 30	Distance des cornes, 26′ 28″.
15. 19. 40	Distance des cornes, 26′ 55″.
15. 23. 0	L'ombre touche le bord de *Copernicus*, où elle est parvenue très-lentement.
15. 29. 10	Distance des cornes, 27′ 20″; cette distance n'augmenta plus, du moins sensiblement.
15. 33. 40	L'ombre touche *Menelaüs* & *Manilius*; la distance des cornes, comme la précédente.

Les nuages, qui s'élevoient du sud ont couvert la Lune, qui n'a plus reparu que de temps en temps à travers des nuages blancs, mais trop denses pour qu'on pût observer aucune émersion, ni distance des cornes.

A 16^h 46′ je revis la Lune dans un éclairci; elle étoit parfaitement nette, & l'éclipse me parut totalement finie.

M. de Cassini avoit observé la plus grande phase de 12′ 28″, à 15^h 32′, temps vrai.

Observation de la Lune au Méridien, avant le commencement de l'éclipse.

NOUS avons observé, avec M. de Cassini, le passage des deux bords de la Lune au méridien.

A 12^h 3′ 38″,7 temps moyen, l'étoile *d* du Lion avoit précédé le centre de la Lune de 15′ 28″,9 de temps moyen, ou de 3^d 52′ 52″,7, & la différence des hauteurs méridiennes du bord de la Lune & de l'étoile, corrigée de celle des réfractions, étoit de 9′ 35″,3. L'étoile δ de la

la Vierge, suivit le centre de la Lune au méridien de $1^h 39' 32'',4$, de temps moyen, ou de $24^d 57' 11'',5$; la différence des hauteurs méridiennes, corrigée de celle des réfractions, fut observée de $21' 32'',9$, entre le bord supérieur de la Lune & l'étoile.

Selon le catalogue de Bradley, on a, pour le 6 Mars 1784, les positions de ces deux étoiles affectées de l'aberration de la nutation, comme il suit.

α du Lion.		δ de la Vierge.	
Ascension droite.	*Déclinaison.*	*Ascension droite.*	*Déclinaison.*
$162^d 21' 42'',7$	$4^d 46' 14'',8$ *B.*	$191^d 11' 55'',5$	$4^d 34' 17'',5$.

En appliquant à ces positions les différences rapportées ci-dessus, la parallaxe de la Lune en hauteur calculée dans le sphéroïde de $37' 55'',7$, & le demi-diamètre horizontal de $15' 0'',1$, j'ai trouvé, pour $12^h 3' 38'',7$, l'ascension droite du centre de la Lune de $166^d 14' 39'',7$, sa déclinaison boréale de $5^d 18' 45'',8$; donc longitude $165^d 16' 56''$, latitude $0^d 32' 10'',7$ *A*, en supposant l'obliquité apparente de l'écliptique de $23^d 28' 10''$. Les Tables de la Lune, de Mayer, qui sont insérées dans l'Astronomie de M. de la Lande, donnent, pour le même instant, la longitude de $36''$ plus avancée, & la latitude de $23'' \frac{1}{2}$ plus australe.



RECHERCHES
SUR LA FIGURE DES PLANÈTES.

Par M. LE GENDRE.

Lû le 7 Juillet 1784.

DEPUIS que Maclaurin a démontré ſynthétiquement & d'une manière très-élégante, que le ſphéroïde elliptique ſatisfait rigoureuſement à l'équilibre des Planètes dans les hypothèſes reçues, pluſieurs grands Géomètres* ſe ſont propoſé de déterminer directement toutes les figures d'équilibre poſſibles. Ils ont trouvé que l'ellipſoïde aplati ſatisfaiſoit de deux manières différentes, & ils ſont parvenus à exclure un grand nombre d'autres figures, comme ne pouvant remplir les conditions de l'équilibre; mais perſonne, que je ſache, n'a encore démontré que l'ellipſoïde aplati eſt abſolument le ſeul qui ſatisfaſſe à la queſtion. C'eſt cette propoſition qui fait le ſujet de ce Mémoire.

Je ſuppoſe, comme on paroît l'avoir fait juſqu'à préſent, que la figure cherchée eſt celle d'un ſolide de révolution peu différent d'une ſphère, & partagé en deux parties égales & ſemblables par ſon équateur. L'attraction de ce ſphéroïde s'évalue facilement à l'aide des formules que j'ai données pour cet objet, *(Mémoires des Savans étrangers, tome X)*; & j'en tire l'équation du méridien

---

* M. d'Alembert, *tomes V & VII de ſes Opuſcules*. M. de la Place, *Mém. de l'Acad. ann. 1772*.

La propoſition qui fait l'objet de ce Mémoire, étant démontrée d'une manière beaucoup plus ſavante & plus générale dans un Mémoire que M. de la Place a déjà publié dans le volume de 1782, je dois faire obſerver que la date de mon Mémoire eſt antérieure, & que la propoſition qui paroît ici, telle qu'elle a été lûe en juin & juillet 1784, a donné lieu à M. de la Place, d'approfondir cette matière, & d'en préſenter aux Géomètres, une théorie complète.

exprimée par une suite infinie, équation d'une forme très-différente de celle qu'a trouvée M. de la Place, pour le cas où le sphéroïde ne diffère qu'infiniment peu de la sphère. Je fais voir ensuite que la série renfermée dans cette équation, est toujours convergente; que l'ellipse y est comprise suivant le théorème de Maclaurin, & qu'aucune autre courbe n'y peut satisfaire.

Pour démontrer ces diverses propositions, j'ai recours aux propriétés d'une espèce particulière de fonctions rationnelles qui ne se sont point encore présentées aux Analystes, & qui paroissent mériter leur attention; mais pour ne pas faire diversion à mon sujet principal, j'expose de suite ce qui a rapport à ces fonctions.

Théorèmes sur une espèce particulière de fonctions rationnelles.

1. Les fonctions rationnelles dont il s'agit, sont formées suivant cette loi, qu'il est facile de saisir:

$$X^{\text{I}} = \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2},$$

$$X^{\text{II}} = \frac{5.7}{2.4}.x^4 - \frac{3.5}{2.4}.2x^2 + \frac{1.3}{2.4},$$

$$X^{\text{III}} = \frac{7.9.11}{2.4.6}.x^6 - \frac{5.7.9}{2.4.6}.3x^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}.3x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6},$$

$$X^{\text{IV}} = \frac{9.11.13.15}{2.4.6.8}x^8 - \frac{7.9.11.13}{2.4.6.8}.4x^6 + \frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}.6x^4 - \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}.4x^2 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8},$$

&c.

Ces fonctions X^{I}, X^{II}, X^{III}, &c. viennent du développement de la quantité $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, & on a exactement

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1 - 2xz + z^2)}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1 + 2xz + z^2)}}$$
$$= 1 + X^{\text{I}}z^2 + X^{\text{II}}z^4 + X^{\text{III}}z^6 + \text{\&c}\ldots(A^{\text{I}}).$$

THÉORÈME I.

2. *Si on fait* $x = 1$, *les fonctions* X^{I}, X^{II}, X^{III}, &c. *se réduisent toutes à l'unité.*

Car en faisant $x = 1$, le premier membre de l'équation (A') devient $\frac{1}{1-z^2}$ c'est-à-dire, $1 + z^2 + z^4 + z^6 +$ &c.

THÉORÈME II.

3. *Les intégrales suivantes, prises depuis* $x = 0$ *jusqu'à* $x = 1$, *se réduisent toutes à zéro, quelles que soient les constantes* α, β, γ, &c.

$$\int \alpha X^{I} dx = 0,$$
$$\int (\alpha + \beta x^2) X^{II} dx = 0,$$
$$\int (\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4) X^{III} dx = 0;$$
&c.

Car entre les limites données, on a, par exemple,

$$\int (\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4) X^{III} dx = \frac{9.11\alpha + 7.11\beta + 7.9\gamma}{2.4.6} - \frac{3(7.9.\alpha + 5.9\beta + 5.7\gamma)}{2.4.6} + \frac{3(5.7\alpha + 3.7\beta + 3.5\gamma)}{2.4.6} - \frac{(3.5\alpha + 1.5\beta + 1.3\gamma)}{2.4.6}.$$

Or, n variant de l'unité, la différence troisième de la formule $(2n + 1)(2n + 3)\alpha + (2n - 1)(2n + 3)\beta + (2n - 1)(2n + 1)\gamma$ est nulle: donc $\int (\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4) X^{III} dx = 0$, & il est facile de voir qu'une démonstration semblable auroit lieu dans tous les autres cas.

THÉORÈME III.

4. *Entre les mêmes limites*, $x = 0$, $x = 1$, *on a généralement*

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

$$\int x^n X^{I} dx = \frac{n}{n+1.n+3},$$

$$\int x^n X^{II} dx = \frac{n.n-2}{n+1.n+3.n+5},$$

$$\int x^n X^{III} dx = \frac{n.n-2.n-4}{n+1.n+3.n+5.n+7}.$$

&c.

Il suffira encore de démontrer cette proposition dans un cas particulier: or on a

$$\int x^n X^{III} dx = \frac{7.9.11}{2.4.6} \cdot \frac{1}{n+7} - \frac{5.7.9}{2.4.6} \cdot \frac{3}{n+5} + \frac{3.5.7}{2.4.6} \cdot \frac{3}{n+3} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Cette quantité réduite à un dénominateur commun, prendra la forme

$$\frac{\alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n + \delta}{n+1.n+3.n+5.n+7};$$

mais, suivant le théorème précédent, cette intégrale doit s'évanouir dans trois cas, lorsque $n = 0$, lorsque $n = 2$, & lorsque $n = 4$; elle deviendra donc

$$\frac{\alpha n (n-2)(n-4)}{n+1.n+3.n+5.n+7}.$$

Si on fait ensuite n infini, on aura

$$\frac{\alpha}{n} = \frac{7.9.11}{2.4.6} \cdot \frac{1}{n} - \frac{5.7.9}{2.4.6} \cdot \frac{3}{n} + \frac{3.5.7}{2.4.6} \cdot \frac{3}{n} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{n};$$

donc par le théorème I, $\alpha = 1$, &

$$\int x^n X^{III} dx = \frac{n.n-2.n-4}{n+1.n+3.n+5.n+7}.$$

THÉORÈME IV.

5. *Si on intègre toujours entre les limites* $x = 0$ & $x = 1$,

on aura $\int X^{\mu} X^{\nu} dx = 0$ & $\int X^{\mu} X^{\mu} dx = \frac{1}{4\mu+1}$, *les indices* μ *&* ν *étant différens l'un de l'autre dans la première formule.*

C'est une conséquence immédiate des deux *théorèmes précédens.*

THÉORÈME V.

6. *La fonction* X^{μ} *en général est décomposable en* μ *facteurs de la forme* $x^2 - \alpha^2$, $x^2 - \beta^2$, $x^2 - \gamma^2$, &c. α, β, γ, *étant des racines réelles, inégales, & plus petites que l'unité.*

Prenons, par exemple, la fonction X^{IV}: puisqu'entre les limites $x = 0$ & $x = 1$, on a $\int X^{IV} dx = 0$ (*Th. II*), il faut que X^{IV} ne soit pas toujours de même signe depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Donc α étant moindre que l'unité, on peut supposer $X^{IV} = (x^2 - \alpha^2) P$; mais par le *théorème II*, on a $\int (x^2 - \alpha^2) X^{IV} dx = 0$ ou $\int (x^2 - \alpha^2)^2 P dx = 0$: il faut donc que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, la fonction P n'ait pas toujours le même signe. Soit encore β plus petit que l'unité, & on pourra faire $P = (x^2 - \beta^2) Q$ ou $X^{IV} = (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2) Q$; mais suivant le *théorème II*, on a $\int (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2) X^{IV} dx = 0$, ou $\int (x^2 - \alpha^2)^2 (x^2 - \beta^2)^2 Q dx = 0$: d'où il suit que Q change encore de signe depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Je fais de la même manière $Q = (x^2 - \gamma^2) R$, ou $X^{IV} = (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)(x^2 - \gamma^2) R$; & comme, en vertu du même *théorème II*, on a $\int (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)(x^2 - \gamma^2) X^{IV} dx = 0$, il en résultera que R doit encore changer de signe depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, & que X^{IV} est enfin de la forme

$$A (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)(x^2 - \gamma^2)(x^2 - \delta^2),$$

α, β, γ, δ étant plus petites que l'unité, & A étant le coëfficient constant $\frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$.

Je dis de plus, que ces facteurs seront inégaux entr'eux : car si on avoit, par exemple, $\alpha = \delta$, X^{v} seroit de la forme

$$A(x^2 - \alpha^2)^2 (x^2 - \beta^2) (x^2 - \gamma^2).$$

Or on doit avoir, suivant le *théorème II*,

$$\int (x^2 - \beta^2) (x^2 - \gamma^2) X^{v} dx = 0:$$

il faudroit donc que

$$\int (x^2 - \alpha^2)^2 (x^2 - \beta^2)^2 (x^2 - \gamma^2)^2 dx$$

fût zéro, ce qui est impossible.

THÉORÈME VI.

7. *Depuis* $x = 0$ *jusqu'à* $x = 1$ *exclusivement, la quantité* X^{μ} *est toujours plus petite que l'unité.*

Je reprends l'équation (A') *n.° 1*, & je suppose

$$1 - 2xz + z^2 = (1 - \alpha z)(1 - \beta z);$$

j'aurai

$$\alpha + \beta = 2x, \ \& \ \alpha\beta = 1.$$

Mais x étant régardé ici comme plus petit que l'unité, je puis supposer $x = \text{cos.}\,\varphi$; il en résultera

$$\alpha = \text{cos.}\varphi + \sqrt{-1}\,\text{sin.}\varphi, \ \& \ \beta = \text{cos.}\varphi - \sqrt{-1}\,\text{sin.}\varphi:$$

on aura ensuite

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - 2xz + z^2)}} = (1 - \alpha z)^{-\frac{1}{2}} (1 - \beta z)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (1 + \tfrac{1}{2}\alpha z + \frac{1.3}{2.4}\alpha^2 z^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^3 z^3 + \&c.)$$

$$(1 + \tfrac{1}{2}\beta z + \frac{1.3}{2.4}\beta^2 z^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\beta^3 z^3 + \&c.).$$

Développant ce produit, & ne conservant que les puissances paires de z, on aura la valeur de

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1 - 2xz + z^2)}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1 + 2xz + z^2)}}$$

exprimée par cette ſuite dont la loi eſt très-ſimple:

$$\begin{aligned}
1 &+ \tfrac{1.3}{2.4}(\alpha^2 + \beta^2)z^2 + \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}(\alpha^4 + \beta^4)z^4 + \tfrac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}(\alpha^6 + \beta^6)z^6 + \&c. \\
&+ \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\ \alpha\beta + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\alpha\beta + \tfrac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\tfrac{1}{2}(\alpha^4 + \beta^4)\alpha\beta \\
&\qquad + \tfrac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{1.3}{2.4}\ \alpha^2\beta^2 + \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\tfrac{1.3}{2.4}(\alpha^2 + \beta^2)\alpha^2\beta^2 \\
&\qquad\qquad + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{1.3.5}{2.4.6}\ \alpha^4\beta^4.
\end{aligned}$$

La ſuite

$$1 + X^{\prime}z^2 + X^{\prime\prime}z^4 + X^{\prime\prime\prime}z^6 + \&c.$$

étant ainſi trouvée, on peut faire

$$\alpha\beta = 1 \ \& \ \alpha^m + \beta^m = 2 \operatorname{coſ.} m\varphi,$$

& on aura

$$\begin{aligned}
X^{\prime} &= \tfrac{1.3}{2.4}\cdot 2 \operatorname{coſ.} 2\varphi + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}, \\
X^{\prime\prime} &= \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot 2 \operatorname{coſ.} 4\varphi + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{1}{2}\, 2 \operatorname{coſ.} 2\varphi \\
&\qquad + \tfrac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{1.3}{2.4}, \\
X^{\prime\prime\prime} &= \tfrac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}\cdot 2 \operatorname{coſ.} 6\varphi + \tfrac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 2 \operatorname{coſ.} 4\varphi \\
&\qquad + \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\tfrac{1.3}{2.4}\, 2 \operatorname{coſ.} 2\varphi + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{1.3.5}{2.4.6},
\end{aligned}$$

&c.

Il eſt clair maintenant que les fonctions $X^{\prime}$, $X^{\prime\prime}$, &c. ſont les plus grandes qu'il eſt poſſible, lorſque $\varphi = 0$, & qu'elles ſont plus petites dans tous les autres cas. Mais lorſque

lorsque $\varphi = 0$, on a $x = 1$, & suivant le *théorème I*, ces fonctions se réduisent à l'unité : donc elles sont au-dessous de l'unité, lorsque x est entre 0 & 1.

THÉORÈME VII.

8. *L'intégrale* $\int \frac{X^{\mu}\, dx}{(1 + k x^2)^{\frac{2\mu + 3}{2}}}$, *prise entre les limites* $x = 0$, $x = 1$, *est égale à* $\frac{(-k)^{\mu}}{(2\mu + 1)(1 + k)^{\frac{2\mu + 1}{2}}}$ *quel que soit* k.

Si on fait $z = \frac{p}{\sqrt{(1 + k x^2)}}$, l'équation (A') *n.° 1.* donnera

$$\frac{\frac{1}{2} dx}{(1 + k x^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left[1 - \frac{2 p x}{(1 + k x^2)} + \frac{p^2}{1 + k x^2}\right]}}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} dx}{(1 + k x^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left[1 + \frac{2 p x}{\sqrt{(1 + k x^2)}} + \frac{p^2}{1 + k x^2}\right]}}$$

$$= \frac{dx}{(1 + k x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{X' \, dx}{(1 + k x^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot p^2 + \frac{X'' \, dx}{(1 + k x^2)^{\frac{7}{2}}} \cdot p^4 + \&c.$$

Pour intégrer le premier membre, je fais $\frac{x}{\sqrt{(1 + k x^2)}} = y$, ensuite $1 + pky = u$, & la différencielle

$$\frac{\frac{1}{2} dx}{(1 + k x^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\left[1 - \frac{2 p x}{\sqrt{(1 + k x^2)}} + \frac{p^2}{1 + k x^2}\right]}}$$

devient

$$\frac{1}{2p\sqrt{k}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1+k+kp^2-x^2)}},$$

dont l'intégrale eſt

$$-\frac{1}{2p\sqrt{k}} \text{ arc cof. } \frac{x}{\sqrt{(1+k+kp^2)}}.$$

Intégrant de la même manière, l'autre partie du premier membre, on trouvera que l'intégrale totale, priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$, eſt

$$\frac{1}{2p\sqrt{k}} \text{ arc cof. } \frac{\sqrt{(1+k)}-pk}{\sqrt{(1+k)}.\sqrt{(1+k+kp^2)}}$$
$$-\frac{1}{2p\sqrt{k}} \text{ .arc cof. } \frac{\sqrt{(1+k)}+pk}{\sqrt{(1+k)}.\sqrt{(1+k+kp^2)}}.$$

Il eſt facile enſuite de voir que cette expreſſion revient à $\frac{1}{p\sqrt{k}}$ .arc tang. $\frac{p\sqrt{k}}{\sqrt{(1+k)}}$, qui équivaut à la ſuite

$$\frac{1}{\sqrt{(1+k)}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{kp^2}{(1+k)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{k^2p^4}{(1+k)^{\frac{5}{2}}} - \text{\&c.}$$

d'où l'on conclud

$$\int \frac{X^{\mu}dx}{(1+kx^2)^{\frac{2\mu+3}{2}}} = \frac{(-k)^{\mu}}{(2\mu+1)(1+k)^{\frac{2\mu+1}{2}}}.$$

Équation du Méridien.

9. JE ſuppoſe, comme il a été dit ci-deſſus, que le méridien du ſphéroïde eſt une courbe quelconque, diviſée en quatre parties égales par le diamètre de l'équateur & par l'axe de rotation. J'appelle 1 la denſité du ſphéroïde; M, ſa maſſe ou ſon volume; Mf, la force centrifuge à la diſtance 1 de l'axe; $\frac{dM}{rr}$ l'attraction d'une particule dM à la diſtance r. Un point quelconque, hors du ſphéroïde, étant donné de poſition par ſa diſtance z au centre,

& par l'angle φ que fait cette distance avec l'axe, j'appelle V, la somme des quotiens qu'on aura en divisant chaque particule du sphéroïde par sa distance à ce point.

L'attraction du sphéroïde, sur ce même point, se réduit à deux forces X & Y, parallèles à l'axe & à l'équateur, lesquelles peuvent s'exprimer de la manière suivante par les différences partielles de V:

$$X = -\frac{dV}{dz}\,\text{cos.}\,\varphi + \frac{dV}{d\varphi}\cdot\frac{\text{sin.}\,\varphi}{z},$$

$$Y = -\frac{dV}{dz}\,\text{sin.}\,\varphi - \frac{dV}{d\varphi}\cdot\frac{\text{cos.}\,\varphi}{z}.$$

Voyez le *tome X des Savans étrangers, page 423.*

On peut supposer maintenant que le point dont il s'agit, est situé à la surface même du sphéroïde, & comme la résultante des forces qui lui sont appliquées, doit être perpendiculaire au méridien, on aura l'équation

$$\frac{Y - Mfz\,\text{sin.}\,\varphi}{X} = \frac{-d\,(z\,\text{cos.}\,\varphi)}{d\,(z\,\text{sin.}\,\varphi)};$$

dans laquelle substituant les valeurs de X & de Y, & intégrant, on trouve l'équation du méridien,

$$V + \tfrac{1}{2}\,Mfz^2\,\text{sin.}^2\,\varphi = H',$$

H' étant une constante arbitraire. Cette équation est la même qu'a donnée M. de la Place, dans le volume de l'Académie de 1772, & dans sa Théorie du mouvement & de la figure des planètes, *page 137.*

10. Si on substitue maintenant la valeur de V, que j'ai donnée dans le Mémoire cité *(page 422)*, pour les sphéroïdes de révolution, l'équation du méridien deviendra

$$\left.\begin{array}{l} H = \tfrac{1}{2}fz^2\,(1 - x^2) + \frac{1}{z} \\ + \frac{A}{z^3}\,X' + \frac{B}{z^5}\,X'' + \frac{C}{z^7}\,X''' + \&c. \end{array}\right\} \ldots (B')$$

Dans cette équation, j'ai fait cos. $\varphi = x$, & les quantités X', X'', X''' &c. sont précisément les fonctions dont il a été parlé ci-dessus. Quant aux constantes H, A, B, C, &c. la première H est arbitraire, & doit se déterminer par la condition, que lorsque $\varphi = 0$, z soit égal au demi-axe du sphéroïde; les autres dépendent des intégrations suivantes, qu'on doit étendre depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$:

$$M = \frac{4\pi}{3} \int z^3 \, dx,$$

$$MA = \frac{4\pi}{5} \int z^5 X' \, dx,$$

$$MB = \frac{4\pi}{7} \int z^7 X'' \, dx,$$

$$MC = \frac{4\pi}{9} \int z^9 X''' \, dx,$$

&c.

11. L'équation (B') doit comprendre toutes les figures d'équilibre possibles; mais avant d'en tirer quelque conséquence, il est bon de faire voir que la suite qu'elle renferme est toujours convergente, quel que soit le méridien du sphéroïde, pourvu qu'il ne diffère pas beaucoup du cercle. Supposons donc $z = 1 + kp$, k étant une quantité très-petite, & p une fonction de x, telle que le produit kp soit toujours fort petit par rapport à l'unité. Si les deux parties du méridien, séparées par l'équateur, ne font qu'une seule & même courbe, il faudra que p soit une fonction paire de x; mais l'équation (B') n'est point assujettie à cette condition, elle n'exige la loi de continuité que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Il faut seulement supposer qu'à l'équateur où $x = 0$, $\frac{dp}{dx}$ devient nul: en sorte que si p se réduit à $\alpha + \beta x^n$, lorsque x est infiniment petit, il faut que n soit plus grand que l'unité. De même, lorsque x est infiniment près de

l'unité, p devenant $\alpha' + \mathcal{C}'(1 - xx)^{n'}$, il faut que n' soit encore plus grand que l'unité, pour qu'on ait au pôle $\frac{dz}{d\varphi} = 0$. Avec ces deux conditions, la courbure du sphéroïde sera uniforme dans toute son étendue.

Maintenant, si on substitue la valeur de z dans les formules du *n.° 10*, & qu'on rejette les puissances de k, supérieures à la première, on aura

$$M = \frac{4\pi}{3}\int(1 + 3kp)\,dx,\; MA = \frac{4\pi}{5}\int(1 + 5kp)X'\,dx, \text{ \&c.}$$

donc

$$A = 3k\int pX'\,dx,\; B = 3k\int pX''\,dx,\; C = 3k\int pX'''\,dx, \text{ \&c.}$$

Or, la quantité X^{μ} étant toujours au-dessous de l'unité, & changeant μ fois de signe, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$ *(théorèmes V & VI)*, il est clair que l'aire $\int pX^{\mu}dx$, où p ne passe pas une certaine limite, est composée de parties positives & de parties négatives, qui se détruisent d'autant mieux qu'elles sont plus petites & plus multipliées, surtout lorsque μ est un nombre un peu grand. On doit donc regarder la suite A, B, C, &c. comme convergente, au moins lorsque μ a acquis une certaine grandeur.

12. Pour nous en assurer d'une manière plus précise, considérons le cas où $p = x^n$, alors, suivant le *n.° 4*, on aura

$$\int x^n X^{\mu}dx = \frac{n.n - 2.n - 4 \ldots n - 2\mu + 2}{n + 1.n + 3.n + 5 \ldots n + 2\mu + 1};$$

si 2μ est considéré comme fort grand par rapport à n, on trouvera facilement par les formules connues,

$$\int x^n X^{\mu}dx = \frac{A'}{\mu^{n + \frac{1}{2}}},$$

A' étant un coéfficient constant; or, nous avons dit *(n.° 11)* que n devoit être plus grand que l'unité; donc la suite A, B, C, D, &c. décroîtra, au moins dans les termes

éloignés, plus rapidement que la suite

$$\frac{A'}{1},\ \frac{A'}{4\sqrt{2}},\ \frac{A'}{9\sqrt{3}}, \text{\&c.}$$

Donc si p étoit de la forme $\alpha + \beta x^n + \gamma x^m + \text{\&c.}$ ce qui comprend déjà un très-grand nombre de fonctions, la suite $\int p X^{\mu} dx$, $\int p X^{\mu+1} dx$, $\int p X^{\mu+2} dx$, &c. seroit plus convergente que la suite $\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{1}{(\mu+1)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{1}{(\mu+2)^{\frac{3}{2}}}$, &c. en supposant toujours que μ a passé une certaine limite.

On pourroit, dans plusieurs autres cas encore très-étendus, démontrer la convergence de la suite A, B, C, D, &c; mais nous nous bornerons à ce qui vient d'en être dit, & nous croyons qu'il y a d'autant moins de difficulté à admettre cette proposition, que la fonction p doit être comprise entre certaines limites, & satisfaire à des conditions particulières qui restreignent beaucoup l'étendue de l'aire $\int p X^{\mu} dx$.

La suite A, B, C, D. &c. étant convergente, au moins dans les termes éloignés, on en conclura que la suite AX', BX'', CX''', &c. l'est aussi, puisque les quantités X', X'', X''', &c. ne peuvent jamais surpasser l'unité, & sont presque toujours fort au-dessous. D'où il résulte que l'équation (B') peut être employée comme représentant avec exactitude le méridien d'une planète en équilibre.

L'Ellipse est comprise dans l'équation (B').

13. On ne sauroit douter de cette proposition, d'après la théorie de Maclaurin, mais on sera bien aise de voir nos calculs s'accorder avec cette théorie. Soit donc a le demi-grand axe de l'ellipse, c son excentricité, $\frac{c^2}{a^2 - c^2} = k$; l'équation de l'ellipse sera $z^2 = \frac{a^2}{1 + kx^2}$, & les intégrales M, MA, MB, &c. du *n.° 10*, seront, suivant le *théorème VII*,

$$M = \frac{4\pi a^3}{3} \int \frac{dx}{(1+kx^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{1}{(1+k)^{\frac{1}{2}}},$$

$$MA = \frac{4\pi a^5}{5} \int \frac{X' dx}{(1+kx^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi a^5}{5} \cdot \frac{-k}{3(1+k)^{\frac{3}{2}}},$$

$$MB = \frac{4\pi a^7}{7} \int \frac{X'' dx}{(1+kx^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi a^7}{7} \cdot \frac{k^2}{5(1+k)^{\frac{5}{2}}},$$

$$MC = \frac{4\pi a^9}{9} \int \frac{X''' dx}{(1+kx^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi a^9}{9} \cdot \frac{-k^3}{7(1+k)^{\frac{7}{2}}},$$

&c.

D'où l'on tire

$$A = -\frac{3}{5} \cdot \frac{ka^2}{3(1+k)} = -\frac{3c^2}{3 \cdot 5},\ B = \frac{3c^4}{5 \cdot 7},\ C = \frac{-3c^6}{7 \cdot 9},\ \&c.$$

& pour le dire en passant, ces valeurs confirment ce que nous avons dit *(n.os 11 & 12)* sur la convergence de la suite, A, B, C, &c. a étant regardé ici comme l'unité.

Cela posé, l'équation *(B')* deviendra

$$\left. \begin{array}{l} H = \frac{1}{2} f a z^2 (1 - x^2) + \frac{3a}{z} \\ \left(\frac{1}{3} - \frac{X'}{3 \cdot 5} \cdot \frac{c^2}{z^2} + \frac{X''}{5 \cdot 7} \cdot \frac{c^4}{z^4} - \&c.\right) \end{array} \right\} \ldots (C')$$

& il faut faire voir qu'on peut rendre cette équation identique, en donnant aux constantes H & f les valeurs convenables.

14. Proposons-nous d'abord de sommer la suite

$$\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{X'}{3 \cdot 5} \cdot \frac{c^2}{z^2} + \frac{X''}{5 \cdot 7} \cdot \frac{c^4}{z^4} - \frac{X'''}{7 \cdot 9} \cdot \frac{c^6}{z^6} + \&c.$$

qui entre dans cette équation : suivant la formule *(A')*, *n.o 1*, on aura

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1 - 2px\sqrt{-1} - p^2)}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1 + 2px\sqrt{-1} - p^2)}}$$
$$= 1 - X' p^2 + X'' p^4 - X''' p^6 + \&c.$$

multipliant chaque membre par dp & intégrant, on aura

$$\tfrac{1}{2}\text{ arc fin. }\frac{p+x\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-xx)}}+\tfrac{1}{2}\text{ arc fin. }\frac{p-x\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-xx)}}$$

$$=p-\frac{X'p^3}{3}+\frac{X''p^5}{5}-\&c.$$

Soit $u=$ tang. ψ & $p^2(1+u^2)=u^2(1+x^2u^2)$, on trouvera que le premier membre fe réduit à l'arc réel ψ, & qu'ainfi on a

$$\psi=p-\tfrac{1}{3}X'p^3+\tfrac{1}{5}X''p^5-\tfrac{1}{7}X'''p^7+\&c.$$

Multipliant chaque membre par $p\,dp$, l'intégrale du premier fera

$$\int\psi\,p\,dp=\tfrac{1}{2}pp\,\psi-\int\frac{p^2}{2}\cdot\frac{du}{1+uu}$$

$$=\tfrac{1}{2}p^2\psi-\int\frac{\tfrac{1}{2}u^2\,du\,(1+x^2u^2)}{(1+u^2)^2}=(\tfrac{1}{2}p^2+\frac{3x^2-1}{4})\psi$$

$$-\frac{u}{1+u^2}(\tfrac{1}{2}x^2u^2+\frac{3x^2-1}{4}).$$

J'apelle F, cette quantité, & j'aurai

$$F=\tfrac{1}{3}p^3-\frac{1}{3\cdot5}X'p^5+\frac{1}{5\cdot7}X''p^7-\frac{1}{7\cdot9}X'''p^9+\&c.$$

Maintenant fi l'on fait

$$p=\frac{c}{z}\ \&\ u^2=\frac{c^2}{a^2-c^2};$$

on verra facilement que l'équation

$$p^2(1+u^2)=u^2(1+x^2u^2),$$

eft la même que l'équation de l'ellipfe

$$\frac{a^2}{z^2}=1+\frac{c^2x^2}{a^2-c^2};$$

d'où il réfulte qu'en faifant

$$\frac{c}{\sqrt{(a^2-c^2)}}=\text{tang. }\psi=u,\text{ ou }\frac{c}{a}=\text{fin. }\psi;$$

la

la somme de la suite

$$\frac{1}{1.3} - \frac{X'}{3.5}\cdot\frac{c^2}{z^2} + \frac{X''}{5.7}\cdot\frac{c^4}{z^4} - \&c.$$

sera $\frac{Fz^3}{c^3}$, F étant

$$\left(\tfrac{1}{2}p^2 + \frac{3x^2-1}{4}\right)\psi - \frac{u}{1+u^2}\left(\tfrac{1}{2}x^2u^2 + \frac{3x^2-1}{4}\right)$$

15. L'équation (C') devient, par cette substitution,

$$Hp^2 = \tfrac{1}{2}afc^2(1 - x^2) + \frac{3aF}{c};$$

& comme chaque membre, eu égard à la variable x, est simplement de la forme $\alpha + \beta x^2$, on la rend bientôt identique en prenant

$$H = \frac{3}{2\,\text{fin.}^3\psi}(\psi - \text{fin.}\psi\,\text{cof.}\psi),$$

$$(D')\ldots fa^3 = \frac{3}{2\,\text{fin.}^3\psi}[(3 - 2\,\text{fin.}^2\psi)\psi - 3\,\text{fin.}\psi\,\text{cof.}\psi].$$

Puisque $\text{fin.}\,\psi = \frac{c}{a}$, ces valeurs pourroient être exprimées par des suites convergentes & régulières, comme il suit:

$$H = 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{3c^2}{5a^2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{3c^4}{7a^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{3c^6}{9a^6} + \&c.$$

$$fa^3 = \frac{6c^2}{3.5\,a^2} + \tfrac{3}{2}\cdot\frac{6c^4}{5.7\,a^4} + \frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{6c^6}{7.9\,a^6} + \frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{6c^8}{9.11\,a^8} + \&c.$$

L'équation (D'), & celle qui exprime la masse du fluide $M = \frac{4}{3}\pi a^3\,\text{cof.}\psi$, serviront à déterminer entièrement l'ellipse qui satisfait à l'équilibre, & ces équations s'accordent parfaitement avec celles qui résultent de la théorie de Maclaurin.

16. Si on élimine a^3 de ces deux équations, on aura

$$\frac{Mf}{2\pi} = \psi(3 \cot.^3 \psi + \cot. \psi) - 3 \cot.^2 \psi;$$

or, en regardant la force centrifuge Mf comme infiniment petite, cette équation est susceptible de deux solutions; car selon qu'on suppose ψ infiniment petit, ou infiniment près de 90^d, on a

$$\frac{Mf}{2\pi} = \tfrac{4}{15}\psi^2 \;\&\; \frac{Mf}{2\pi} = \tfrac{1}{2}\pi(\tfrac{1}{2}\pi - \psi).$$

En général la même équation est susceptible de deux solutions, & il y a par conséquent deux figures elliptiques qui satisfont à l'équilibre, quelle que soit la force centrifuge Mf, pourvu que $\frac{Mf}{2\pi}$ n'excède pas le *maximum* de $\psi(3 \cot.^3 \psi + \cot. \psi) - 3 \cot.^2 \psi$, qui est environ 0,22466, & qui a lieu lorsque $\frac{2\psi}{\text{sin.}\, 2\psi} = \frac{8 + \text{cos.}\, 2\psi}{5 + 4 \text{cos.}\, 2\psi}$.

Au point du *maximum*, les deux figures elliptiques se réduisent à une seule, dont les axes sont dans le rapport de 1 à 2,72 environ.

Dans tous les autres cas, les deux ellipses qui satisfont, sont, l'une plus aplatie, l'autre moins que suivant le rapport précédent; & il est très-remarquable que ces deux figures diffèrent d'autant plus entr'elles, que la force centrifuge est plus petite. C'est ainsi que le sphéroïde terrestre qui est en équilibre lorsque les axes sont dans le rapport de 230 à 231, peut l'être encore, si on suppose les axes dans le rapport de 1 à 681. M. d'Alembert est le premier qui ait remarqué qu'il pouvoit y avoir plusieurs sphéroïdes elliptiques qui satisfissent à l'équilibre. M. de la Place a fait voir ensuite que le nombre de ces sphéroïdes se réduit à deux, & il a fixé en même temps les limites au-delà desquelles la figure elliptique cesse de satisfaire. Au reste, on peut observer que dans les ellipsoïdes extrêmement

aplatis, la pesanteur à l'équateur étant presque nulle, le fluide peut se dissiper avec beaucoup de facilité, & par conséquent cette figure d'équilibre ne doit pas être regardée comme bien stable.

L'Ellipse est la seule courbe qui satisfasse à l'équation (B').

17. Soient toujours a & c les élémens de l'ellipse trouvée, au moins de celle qui est peu excentrique, on peut supposer $a = 1$ & $\frac{c^2}{1 - c^2} = k$; alors on aura

$$f = \frac{6c^2}{3\cdot 5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6c^4}{5\cdot 7} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{6c^6}{7\cdot 9} + \&c.$$
$$= \left(\frac{6}{3\cdot 5}k - \frac{6}{5\cdot 7}\cdot 2k^2 + \frac{6}{7\cdot 9}\cdot 3k^3 - \&c.\right)\sqrt{(1 + k)},$$

& l'équation (B') deviendra

$$\left.\begin{array}{l} H = z^2(1 - x^2)\left(\frac{3k}{3\cdot 5} - \frac{6k^2}{5\cdot 7} + \frac{9k^3}{7\cdot 9} - \&c.\right)\sqrt{(1 + k)} \\ + \frac{1}{z} + \frac{A}{z^3}\cdot X' + \frac{B}{z^5}X'' + \frac{C}{z^7}X''' + \&c. \end{array}\right\}\ldots(E')$$

Nous avons vu qu'on satisfaisoit à cette équation, en prenant $\frac{1}{z^2} = 1 + kx^2$; mais supposons qu'on ait plus généralement

$$\frac{1}{z^2} = 1 + k(x^2 + p) + k^2q + k^3r + \&c. \ldots(F')$$

$p, q, r,$ &c. étant des fonctions quelconques de x.

Je substitue dans l'équation (E') la valeur de z, tirée de l'équation (F'); & calculant d'abord tout ce qui multiplie la première puissance de k, j'observe que la partie variable doit se détruire d'elle-même, à l'exception des termes qui renferment p. Or, on trouve facilement que les termes de cette espèce, introduits dans $\frac{1}{z}$, A, B, C, &c.

sont $\frac{1}{2}pk$, — $\frac{3}{2}k\int pX^{\text{I}}dx$, — $\frac{3}{2}k\int pX^{\text{II}}dx$, — $\frac{3}{2}k\int pX^{\text{III}}dx$, &c. il faut donc que la quantité

$$\tfrac{1}{2}p - \tfrac{3}{2}X^{\text{I}}\int pX^{\text{I}}dx - \tfrac{3}{2}X^{\text{II}}\int pX^{\text{II}}dx - \tfrac{3}{2}X^{\text{III}}\int pX^{\text{III}}dx - \&c.$$

se réduise à une constante que j'appelle $\frac{1}{2}\alpha$.

De-là résulte la forme même de la valeur de p; savoir,

$$p = \alpha + \beta X^{\text{I}} + \gamma X^{\text{II}} + \delta X^{\text{III}} + \&c.$$

& il n'est pas à craindre que cette suite soit divergente, suivant ce qui a été dit (*n.ºs 11 & 12*). Cette valeur de p donne, par le *théorème IV*,

$$\int pX^{\text{I}}dx = \tfrac{1}{5}\beta, \int pX^{\text{II}}dx = \tfrac{1}{9}\gamma, \int pX^{\text{III}}dx = \tfrac{1}{13}\delta, \&c:$$

& comme

$$p - 3X^{\text{I}}\int pX^{\text{I}}dx - 3X^{\text{II}}\int pX^{\text{II}}dx - \&c$$

doit se réduire à α, on aura cette seconde valeur de p

$$p = \alpha + \tfrac{3}{5}\beta X^{\text{I}} + \tfrac{3}{9}\gamma X^{\text{II}} + \tfrac{3}{13}\delta X^{\text{III}} + \&c;$$

qui étant comparée à la précédente, donne $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, &c. donc p se réduit à la constante α. Mais si on considère que la masse ne change pas & qu'elle est la même que dans le cas de l'ellipsoïde, on en conclura $\int pdx = 0$, & par conséquent $p = \alpha = 0$.

18. On pourroit objecter que l'égalité des deux suites

$$\alpha + \beta X^{\text{I}} + \gamma X^{\text{II}} + \delta X^{\text{III}} + \&c.$$
$$\alpha' + \beta' X^{\text{I}} + \gamma' X^{\text{II}} + \delta' X^{\text{III}} + \&c.$$

n'entraîne pas nécessairement l'égalité des coéfficiens respectifs, comme nous venons de le supposer. Cette identité des coéfficiens est évidente, lorsque les suites n'ont qu'un nombre fini des termes; mais on pourroit la nier lorsqu'elles s'étendent à l'infini. Je réponds à cela que la nature des fonctions X^{I}, X^{II}, X^{III}, &c. exige qu'on ait $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, &c. car si les deux séries

précédentes ne sont pas égales terme à terme, leur différence

$$\alpha - \alpha' + (\beta - \beta')X' + (\gamma - \gamma')X'' + (\delta - \delta')X''' + \&c.$$

sera zéro, quel que soit x. Appelons cette suite y, les intégrales définies $\int y\,dx$, $\int yX'\,dx$, $\int yX''\,dx$, &c. seront toutes nulles; or, ces intégrales sont respectivement $\alpha - \alpha'$, $\frac{\beta - \beta'}{5}$, $\frac{\gamma - \gamma'}{9}$, &c. on a donc $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, &c.

19. Puisque p est nulle, la valeur de $\frac{1}{z^2}$ devient

$$\frac{1}{z^2} = 1 + kx^2 + k^2q + k^3r + \&c.$$

or, si à l'aide de cette valeur on élimine z dans l'équation (E'), & qu'on calcule tous les termes multipliés par k^2, on trouvera de même que la partie affectée de q, & qui doit se réduire à une constante, est

$$\tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{2}X'\int qX'dx - \tfrac{3}{2}X''\int qX''dx - \tfrac{3}{2}X'''\int qX'''dx - \&c.$$

de-là on conclut, comme ci-devant, $q = 0$. On aura pareillement $r = 0$, $s = 0$, &c. de sorte que l'équation générale (F') qui pouvoit représenter une courbe quelconque peu différente du cercle, se réduit à l'équation de l'ellipse $\frac{1}{z^2} = 1 + kx^2$.

Donc, si l'on suppose qu'une planète en équilibre ait la figure d'un solide de révolution peu différent d'une sphère, & partagé en deux parties égales par son équateur, le méridien de cette planète sera nécessairement elliptique.



MÉMOIRE

Sur les moyens d'opérer une entière combuſtion de l'Huile, & d'augmenter la lumière des Lampes, en évitant la formation de la ſuie, à laquelle elles ſont ordinairement ſujettes.

Par M. MEUSNIER.

DÈS le 19 Mars 1783, j'ai eu l'honneur d'expliquer à l'Académie la nouvelle conſtruction de Lampes que j'avois imaginée, à l'occaſion de l'appareil à diſtiller dans le vide, que j'échauffois par ce moyen. Les premières épreuves de cette machine diſtillatoire que je fis à Cherbourg, au mois de Décembre 1781, & dont l'Académie fut inſtruite, par une lettre que j'eus l'honneur d'écrire à M. le Roi, qui voulut bien lui en faire la lecture, m'apprirent que les lampes ordinaires avoient les plus grands inconvéniens pour l'uſage auquel je les appliquois. Outre leur tendance naturelle à produire de la ſuie, le peu de chaleur qui accompagne l'eſpèce de diſtillation que j'opérois, faiſoit de la chaudière un vrai réfrigérant, contre lequel la ſuie ſe condenſoit en abondance; & la couche épaiſſe qui ſe formoit ainſi, ralentiſſant bientôt la diſtillation, m'obligeoit à prendre continuellement le ſoin de l'enlever, à meſure qu'elle ſe dépoſoit. Je mis donc la conſtruction d'une eſpèce de lampe tout-à-fait exempte de ſuie, au nombre des améliorations dont ces épreuves me firent connoître la néceſſité, & je ne tardai pas à m'en occuper.

J'avois remarqué que la ſuie des lampes, ſemblable à la ſuie des cheminées, étoit encore ſuſceptible de brûler;

& que des quantités considérables se réduisoient, par la combustion, en un volume presque insensible de cendres. Il s'ensuivoit de-là que la suie n'étoit autre chose que l'huile elle-même, qui avoit éprouvé le degré de chaleur nécessaire à l'inflammation, mais qui, par le défaut d'une quantité suffisante d'air pur, étoit demeurée dans l'état charbonneux; & il en résultoit qu'outre l'inconvénient qui m'avoit conduit à cette observation, j'avois encore éprouvé celui d'une consommation d'huile en pure perte, puisqu'une partie de l'huile employée n'avoit servi qu'à produire de la suie, sans donner lieu au dégagement de chaleur auquel elle étoit destinée.

Il ne suffiroit pas, en effet, pour que la combustion eut lieu, que le corps qui l'éprouve fut soumis au contact libre de l'air; les parties de ce milieu qui en avoisinent le foyer, ne tarderoient pas à s'épuiser de l'air vital, dont la combinaison avec les corps est la cause universelle de toute espèce de combustion; & cet effet cesseroit bientôt, si de nouvelles portions d'air, succédant continuellement aux premières, ne réparoient pas sans cesse la destruction de ce principe. La Nature elle-même a pourvu à ce renouvellement nécessaire, & la chaleur qui accompagne l'opération dont il s'agit, n'a pas pour unique objet, de mettre la substance combustible dans l'état où son affinité avec l'air vital peut s'exercer; elle sert encore, en dilatant l'air environnant, à en rendre les portions les plus voisines plus légères que le reste du milieu, & excite par cette cause, autour des corps brûlans, un courant d'air ascensionnel, qui présente sans cesse au feu un nouvel aliment.

Le même effet a lieu, d'une manière encore plus sensible, pour toutes les combustions que les différens usages de la vie & des arts ont renfermées dans tant d'espèces diverses de fourneaux: la cheminée, qui fait toujours partie de ces sortes de constructions, & que les premiers inventeurs ne regardèrent sans doute que comme une issue

néceſſaire aux vapeurs & à la fumée, a ſur-tout pour objet d'augmenter conſidérablement la rapidité du courant d'air aſcenſionnel, en donnant une grande longueur à cette colonne d'air chaud & léger, qui tend d'autant plus à monter, que ſa peſanteur eſt moindre par rapport à une colonne égale d'air froid.

Mais ſi ce renouvellement d'air, ſe faiſant ainſi d'une manière fortuite & ſans deſſein, ſuffit à la rigueur pour entretenir ſimplement un feu quelconque, il exige de plus des conditions particulières & des proportions préciſes, pour opérer une combuſtion complète; & la quantité d'air vital qui touche ſucceſſivement le foyer de la déflagration, doit être réglée de manière à ſaturer, pour ainſi dire, toute la matière combuſtible qui, dans le même temps, éprouve la chaleur de l'incandeſcence; ſans quoi l'excédant échappe à l'inflammation, & ſe volatiliſe ſans autre altération que celle qu'il doit à la chaleur violente qu'il a ſoufferte. On voit aſſez par-là que les ſubſtances volatiles ſont ſeules ſuſceptibles de cette combuſtion imparfaite; les autres brûlent plus lentement quand l'air vital leur manque; mais elles ne peuvent ſe diſſiper, & c'eſt par cette raiſon que les huiles fourniſſent une ſuie abondante, tandis que le charbon, eſſentiellement fixe & réfractaire, n'en produit aucune.

Ces conſidérations ſimples, & liées tout naturellement avec les connoiſſances que la nouvelle théorie des gaz a rendu familières à la plupart des Phyſiciens, m'apprirent donc également & les cauſes de la ſuie dont la formation m'étoit nuiſible, & les moyens de l'éviter: l'heureuſe application que M. Lavoiſier venoit de faire de l'air vital pur à une lampe dont la flamme mettoit en fuſion les ſubſtances les plus réfractaires, me confirma de plus en plus dans ces idées. Il ne s'agiſſoit que d'augmenter convenablement la rapidité du courant d'air occaſionné par la combuſtion; & pour ne pas mettre inutilement en mouvement une grande quantité d'air, il falloit aſſujettir l'air frais

frais attiré par ce courant, à toucher les flammes, dès qu'il entroit dans le fourneau où les lampes étoient renfermées. Une autre conséquence de ces principes étoit de faire présenter aux flammes le plus de surface possible; & j'adoptai, par cette raison, l'usage des mèches plates en forme de ruban, qu'on emploie depuis quelques années.

Je fis donc construire les lampes dont j'ai eu l'honneur de montrer le dessin à l'Académie, à l'époque que j'ai citée au commencement de ce Mémoire: elles sont, depuis ce temps-là, avec le reste de ma machine distillatoire, à la raffinerie de l'Arsenal, où plusieurs Membres de l'Académie les ont vues; & je déterminai, par différentes épreuves, les dimensions de l'orifice qui devoit fournir l'air à la flamme, & de la cheminée qui devoit en déterminer le mouvement. Ces lampes consistent d'abord uniquement en une boîte creuse qui recouvre le vase où est contenue l'huile qui baigne le pied des mèches. Le fond inférieur de cette boîte est percé d'autant de trous qu'il y a de mèches, & sur chaque trou est soudé un porte-mèche plat qui monte jusqu'au niveau du fond supérieur; ce dernier est percé lui-même, vis-à-vis l'extrémité de chaque porte-mèche, d'une ouverture ovale dont la mèche occupe le milieu; & la capacité de la boîte communiquant avec l'air inférieur par un conduit particulier, il arrive que quand la lampe est renfermée dans son fourneau, & sous la chaudière qu'elle doit échauffer, l'action de la cheminée fait continuellement arriver dans la boîte de nouvel air frais qui, se répandant par les ouvertures ovales, alimente les flammes, & sert tout entier à entretenir leur activité.

J'eus bientôt obtenu, avec cet appareil, des flammes pures, exemptes de suie; & au lieu de cette substance dont l'abondance me nuisoit auparavant, je ne trouvois plus que quelques parcelles de cendre blanche contre le fond de la chaudière qui étoit frappé par les flammes: je remarquai même une augmentation sensible dans la production de chaleur, & je m'en assurai par des moyens directs; mais je

ne tardai pas à m'apercevoir qu'un courant d'air trop rapide pouvoit aussi-bien nuire à mon objet que le défaut contraire, & qu'alors les flammes singulièrement diminuées, étoient à la vérité exemptes de suie; mais ne produisoient plus, à beaucoup près, la chaleur dont elles étoient susceptibles. On conçoit en effet comment le courant d'air dont il s'agit, devenant un vent réel, entraînoit les molécules embrasées, avant que leur chaleur eût pu déterminer de nouvelle huile à se volatiliser & à brûler à son tour.

C'étoit par le moyen d'une espèce de robinet appliqué au haut de la cheminée du fourneau, que je faisois varier le courant d'air, en augmentant ou diminuant l'orifice de sortie; & j'avois employé ce moyen pour connoître la grandeur précise que je devois donner par la suite à cet orifice pour une lampe donnée. J'ouvrois plus ou moins ce robinet, jusqu'à ce que la flamme, devenue nette & brillante, n'éprouvât cependant aucune diminution marquée; & je mesurois la quantité d'air qui entroit alors dans le fourneau, par le moyen d'un instrument très-délicat, dont j'ai donné autrefois la description à l'Académie: mais une nouvelle observation m'apprit bientôt que le même degré d'ouverture de ce robinet ne convenoit pas à toutes les circonstances, & qu'il devoit varier suivant la longeur de la mèche & la température de l'air extérieur. Ces deux causes changent en effet la quantité d'huile qui se consomme; & celle de l'air qui passe par les mêmes orifices; & puisqu'elles sont exposées à des variations continuelles, je reconnus la nécessité de conserver ce robinet, que je n'avois d'abord employé que comme un moyen de recherche.

Une remarque devoit encore ajouter un dernier degré de perfection à ces lampes, dont l'objet étoit devenu pour moi de produire le plus de chaleur possible, avec une quantité donnée d'huile. L'air arrivant auprès des flammes, se dilatoit nécessairement en s'échauffant presque subitement; & cette dilatation tendant à en écarter une grande partie de la flamme qui en étoit environnée, faisoit que

tout l'air vital apporté par ce courant, ne servoit pas à la combustion. Il falloit donc mettre en mouvement plus d'air qu'il n'étoit nécessaire pour obtenir une entière combustion; & cet air surabondant ne pouvoit que refroidir le fourneau, en se chargeant d'une partie de la chaleur qu'il ne contribuoit point à augmenter. Cette considération me porta à entourer toutes les flammes d'autant de tuyaux de cuivre qui alloient se terminer à quelques lignes du fond de la chaudière; & l'air contenu par leur moyen, ne pouvant plus se dilater que suivant la longueur de ces tuyaux, ni s'éloigner de la flamme, servoit alors en bien plus grande quantité à rendre la combustion complète. Je m'aperçus en effet, à l'aide de l'instrument délicat dont j'ai parlé, qu'avec un courant d'air sensiblement moindre, j'obtenois la même espèce de flamme qu'auparavant, & quelques degrés de chaleur de plus.

Tel est l'historique de mes recherches sur les lampes destinées à produire de la chaleur; & l'application des mêmes principes à celles qui ont pour objet d'éclairer, est immédiate, puisque la chaleur & la lumière se dégagent en même temps dans toutes les espèces de combustions. C'est par cette raison que, sans faire aucun changement à la construction que j'avois adoptée, j'ai fait exécuter une lampe à réverbère, que j'ai eu l'honneur de faire voir dernièrement à l'Académie. Il y a cependant une observation à faire, concernant les tuyaux de cuivre dont j'ai parlé ci-devant, & que j'ai transformés nécessairement en un tube de verre, dès qu'il a été destiné à environner une flamme visible; c'est que ce petit appareil ne pouvant avoir d'autre objet que d'économiser la chaleur, en empêchant que la dilatation n'éloigne l'air nouveau de la flamme, à mesure qu'il entre dans l'appareil, peut être suppléé par une ouverture un peu plus grande du robinet qui termine la cheminée; & qu'alors on évite la perte de lumière, qu'occasionne incessamment un obstacle de plus qu'on lui

donne à traverser. On peut donc établir que, dans tous les cas où ce tube de verre pourra être suppléé autrement; il est plutôt nuisible qu'avantageux, dès qu'il s'agit de lampes destinées à éclairer, & je ne l'ai ajouté à ma dernière lampe, que pour développer cette vérité.

On voit, par cette théorie, qu'il y a bien des mécanismes propres à remplir l'objet que je m'étois proposé, avec des lampes renfermées, & qu'il ne s'agit que d'opérer, autour de la flamme, un renouvellement d'air suffisant. C'est ainsi que M. Argant a fait connoître, à Paris, vers la fin de l'année dernière, un moyen très-ingénieux & applicable à des lampes isolées. Il dispose sa mèche circulairement autour d'un tuyau cylindrique vertical, qui devient ainsi une sorte de cheminée, dans laquelle il passe continuellement de nouvel air, qui touche la surface intérieure de la flamme. Il y a même une remarque très-intéressante à faire au sujet de ces lampes, à laquelle les observations qui precèdent conduisent tout naturellement, c'est que la dilatation continuelle du nouvel air & l'augmentation de son volume tendent à le porter sur la flamme, plutôt que de l'en éloigner; & c'est à cette circonstance qu'est dû sans doute le bon effet de ces lampes, puisque leur cheminée, contenant un air qui n'est chaud que sur une petite longueur dans la partie supérieure, ne tireroit point assez sans la cause qui fait servir presque tout l'air qu'elle fournit à une entière combustion. M. Argant emploie au surplus un mécanisme particulier pour gouverner ses lampes, & ne pouvant faire varier à volonté le courant d'air, comme je le fais à l'aide du robinet qui occupe le haut de la cheminée des miennes, il agit sur la consommation d'huile, en alongeant ou raccourcissant la mèche, par le moyen le plus simple & le plus commode: il obtient par-là ce qu'on pourroit appeler l'équilibre nécessaire entre la quantité du combustible consommé & celle de l'air vital qui lui est fourni. Il a senti que cet équilibre ne

ſauroit être permanent; & c'eſt en cela que la lampe de M. Argant porte ce caractère qui annonce un inventeur conduit par une théorie fondée.

Si l'on peut faire cependant un reproche à ces lampes, c'eſt que l'orifice intérieur ne pouvant être diminué au-delà d'un certain point, l'étendue de leur mèche circulaire donne lieu à une conſommation d'huile & une production de lumière plus conſidérables qu'il n'eſt néceſſaire dans pluſieurs cas; & que, très-propres à éclairer de vaſtes emplacemens, elles ne peuvent être appliquées avec le même avantage à l'uſage d'un ſeul homme.

Il me reſte à parler du tube de verre que M.rs Quinquet & Lange ont ajouté depuis peu aux lampes de M. Argant, & qui a les plus grands rapports avec le tube de cuivre que j'emploie dans les miennes. Il ſembleroit d'abord qu'il a pour objet d'exciter un courant d'air qui touche la flamme extérieurement, tandis que le conduit intérieur, inventé par M. Argant, fournit de l'air à la ſurface intérieure; mais le tube de verre dont il s'agit, beaucoup trop court pour pouvoir agir ainſi à la manière d'une cheminée, ajoute, tel qu'il eſt, bien peu de choſe à l'effet de ces lampes, & pourra toujours être ſuppléé par le conduit intérieur, quand il ſera bien proportionné & la lampe bien gouvernée. La lumière alors n'aura plus ce verre à traverſer; & s'il peut avoir une utilité réelle, ce n'eſt guère qu'en plein air où il garantit la flamme de l'agitation d'un vent médiocre. Ces lampes manquent au reſte du moyen que M. Argant avoit imaginé pour en gouverner la mèche; & depuis qu'elles ſe ſont répandues, on en voit pluſieurs qui jettent ſouvent une fumée épaiſſe: elles ſont d'ailleurs tout-à-fait dans le cas de celles de M. Argant, ayant de toute néceſſité une mèche très-étendue, dont le développement équivaut à cinq ou ſix mèches de nos réverbères ordinaires; & la grande lumière qu'elles répandent, tient principalement à la conſommation d'huile qui réſulte de la grandeur de leur mèche.

La véritable utilité d'un tube de verre environnant la flamme d'une lampe, est qu'en faisant fonction de cheminée, il déterminera l'entrée d'un courant d'air par son orifice inférieur; mais il faut qu'alors il ait au moins six à sept pouces de longueur, sur quinze à dix-huit lignes de diamètre, suivant la grosseur des mèches; & je me suis assuré, par des expériences multipliées, que cet appareil simple, appliqué à des lampes anciennes & de toutes sortes de constructions, leur donne sans dépense tous les avantages qu'on vante dans les nouvelles lampes.



OBSERVATION ANATOMIQUE.

Par M. DE FOUCHY.

LE premier des accidens qui m'ont tenu abſent de l'Académie, pendant un temps aſſez long, a été accompagné d'une circonſtance qui m'a paru mériter que je la communiquaſſe à l'Académie.

Le 24 Mars dernier, ſortant de chez M. Aniſſon, où j'avois aſſiſté à l'examen de ſa nouvelle preſſe, je retournois chez moi, vers les ſept heures du ſoir, & il commençoit à faire un peu obſcur. En traverſant le boulevart, alors très-dérangé par le pavé de la Comédie italienne & par les fouilles des tuyaux, un pavé à moitié ſorti de ſa place, m'accrocha le pied, & me fit tomber en avant & un peu de côté, le viſage ſur un tas d'éclats de grès qui ſe trouva-là. Le coup porta principalement ſur le vomer & ſur le coin de l'orbite de l'œil droit; la peau qui couvre le vomer, fut entamée, & il en ſortit aſſez de ſang. Je ſentis, à l'inſtant du coup, une vive douleur qui ſe communiqua à l'œil gauche; mais je n'éprouvai ni étourdiſſement ni mal de cœur. Je me relevai ſur le champ, & continuai mon chemin, tenant mon mouchoir ſur la plaie du nez qui me faiſoit beaucoup de douleur. À mon arrivée, je lavai cette plaie qui ne ſaignoit plus, avec du vin chaud, & la douleur diminua peu-à-peu aſſez pour ne pas m'empêcher de dormir. Le lendemain matin elle étoit ſupportable, & je crus remarquer que je la ſentois aſſez diſtinctement en deux endroits; ſavoir, au vomer, & au-deſſus de l'œil gauche qui n'avoit point eſſuyé de coup; celle du vomer étoit accompagnée d'une circonſtance particulière & qui a duré long-temps, c'eſt que lorſque je pouſſois, même légèrement, avec le doigt, le vomer à droite ou à gauche, je ſentois une

petite crépitation interne, comme si l'engrenage de ces os avec ceux de la face avoit souffert. Jusque-là je n'avois rien aperçu d'extraordinaire, je sortis même & ne rentrai que pour dîner ; mais voici ce qui le fut, & qui me parut mériter considération.

Sur la fin du dîner, je sentis un petit redoublement de douleur au-dessus de l'œil gauche, & dans l'instant même je cessai de pouvoir prononcer les mots que je voulois. J'entendois ce que l'on disoit, & je pensois ce que je devois répondre ; mais je prononçois d'autres mots que ceux qui devoient exprimer ma pensée ; ou si je les commençois, je ne les achevois pas, & j'y substituois d'autres mots ; j'avois cependant tous les mouvemens aussi libres qu'à l'ordinaire ; je n'abandonnai ni ma fourchette ni un morceau de pain que je tenois ; je voyois nettement tous les objets ; j'entendois distinctement ce qu'on disoit, & les organes qui concourent à la pensée, étoient, à ce qui me paroissoit, dans l'état naturel.

Cette espèce de paroxisme dura à peu-près une minute, & pendant sa durée j'eus l'esprit assez libre pour remarquer cette singulière distinction dans le sensorium de l'ame, qui n'avoit qu'une seule de ses parties affectée, sans qu'aucune des autres eût éprouvé le moindre dérangement.

Lorsque M. Vicq-d'Azyr lut, à l'assemblée de l'Académie du 30 Avril dernier, son Mémoire sur l'Anatomie comparée du cerveau de l'homme & des autres animaux, je fus frappé de ce qu'il disoit des filets nerveux, qui partant du cerveau, venoient à travers l'os cribleux, se rendre dans l'intérieur du nez, & je crus y apercevoir la cause de l'état dans lequel je m'étois trouvé, ces filets ayant pu être ébranlés par le coup qu'avoit reçu le vomer, & transmettre leur ébranlement au cerveau ; mais je n'y trouvai point la raison du singulier phénomène du sensorium de l'ame affecté dans une seule de ses parties, sans que les autres l'aient été en aucune manière. Je me renferme ici purement dans le fait que j'ai cru devoir communiquer à l'Académie.

l'Académie, & le consigner, si elle le juge à propos, dans ses registres. Une observation de cette espèce doit être extrêmement rare, puisqu'elle exige qu'un Physicien en soit le sujet, & que l'accident n'ait pas été assez grave pour l'empêcher d'en observer toutes les circonstances. Quelque zèle cependant que j'aie pour l'avancement des Sciences qui sont l'objet de l'Académie, j'espère qu'elle me pardonnera aisément de ne pas desirer de lui en présenter souvent de pareilles.



RENSEIGNEMENS GÉNÉRAUX

Pour tenir lieu de réponse à une Question adressée à l'Académie, par M. GASTÉ DE BONAY, concernant la cherté & la rareté du Bois à brûler, particulièrement du Charbon de bois, relativement aux grosses Forges & Fourneaux à Fer.

Par M. MORAND.

« LA nécessité d'aviser à la cherté & à la rareté du bois » de chauffage, ainsi que du charbon végétal (je trans- » cris ici la Lettre écrite à l'Académie), devient de jour » en jour plus pressante; les grosses forges & fourneaux, » en un mot, les mines à feu, par leur énorme consom- » mation, sont en partie cause de cette disette, pour le » charbon de végétal. Le bois est presque par-tout aujourd'hui » à un prix que les manufactures ne peuvent plus supporter; » en sorte qu'il faut, ou que le produit des ouvrages, déjà » fort cher, augmente encore, ou que beaucoup d'entr'elles » soient mises bas : l'une & l'autre alternative ne peut être » que très-fâcheuse. On n'a pas besoin de rien ajouter à cette remarque ».

Depuis long-temps l'inquiétude sur le dépérissement des bois du royaume est générale; Paris s'en est ressenti cet hiver & le précédent; les provinces n'en sont pas exemptes; l'Académie est consultée à cette occasion par un citoyen zèlé & honnête, résidant près d'Argentan, en basse-Normandie.

M. Gasté de Bonay, est à portée d'éprouver l'inconvénient de la cherté & de la rareté du bois employé en charbon dans les grosses forges & fourneaux à fer; il est

instruit aussi, à ce qu'il paroît, « d'essais infructueux faits dans sa province, pour appliquer à ces usines le feu de « charbon de terre, dont le succès néanmoins tendroit à « augmenter le bois de chauffage; » enfin diverses annonces qui lui sont parvenues sur cette substitution de combustible, le conduisent à présumer qu'il existe une *méthode sûre de faire cette application ;* elle est ignorée dans les parties occidentales de la France, assez garnies de grosses forges. M. Gasté a recours à l'Académie pour savoir *si l'on a réellement quelque connoissance de la possibilité de réussir ;* il prie l'Académie de l'indiquer.

L'Académie portée de tout temps à concourir au bien public, soit par ses propres travaux, soit par ceux de ses Correspondans, & même ceux des Savans étrangers, qu'Elle publie à la suite de ses Mémoires, m'a chargé de présenter, dans une de ses séances, un projet de réponse à cette Lettre. La recherche de la manière de procéder pour remplir l'intention de l'Académie, a été peu embarrassante : un simple énoncé des différens articles traités jusques à ce jour par différens Savans, touchant l'application du feu de charbon de terre aux grosses forges, m'a semblé ce qu'il y avoit de plus naturel & de plus convenable; c'est à quoi j'ai cru devoir d'autant plus me borner, que ces articles se trouvent recueillis dans un seul & même ouvrage, connu du Public & avoué de l'Académie, l'art d'exploiter les mines de charbon de terre. Je me bornerai donc à présenter ici une Table purement indicative suivant l'ordre de l'ouvrage; je mettrai ensuite sous les yeux de l'Académie ce que j'y ai ajouté de relatif au point où on en est, depuis l'impression achevée, touchant la substitution économique du feu de braise de charbon de terre au charbon végétal, dans les forges & fourneaux à fer, objet principal sur lequel M. Gasté de Bonay propose la question : *y a-t-il possibilité de réussir !*

La description de l'art auquel je renvoie M. Gasté de Bonay, renferme des preuves que la méthode existe, puis-

que l'opération s'exécute avec ſuccès en Angleterre, où le procédé en a été communiqué, ſuivant Becher, par un Allemand nommé Blawenſtein.

Il eſt bien vrai que, juſques à ce jour, nous n'avons pu, en France, avoir le même ſuccès pour les forges & fourneaux à fer : cela tiendroit-il à la nature de la mine de fer, dont telle ou telle eſpèce peut ou ne peut pas être traitée avec le charbon de terre ainſi fabriqué ? Ne faudroit-il point, dans une comparaiſon bien faite de celles que l'on traite de cette façon en Angleterre, & des eſpèces que nous avons en France, trouver celles qui ſont propres à être traitées par ce procédé ? Ces points de recherche, ainſi que beaucoup d'autres propres à ouvrir de nouvelles vues pour perfectionner les tentatives déjà faites, ſe trouvent préſentés, rapprochés avec ſoin dans un détail convenable, ſous les titres qui forment l'eſpèce d'index dont j'ai parlé il n'y a qu'un inſtant, pour ſervir de réponſe à M. Gaſté.

Je viens donc tout de suite à l'addition que j'ai annoncée. Une remarque sur laquelle je n'ai cessé d'insister, toutes

les fois que j'ai eu à répondre sur l'emploi du feu de charbon de terre, c'est que, de tous les combustibles, le charbon de terre est celui qui a le plus besoin de l'action de l'air libre, personne ne l'ignore; mais, dans les nouvelles applications que l'on tente de ce feu particulier, a-t-on toujours ce principe de fait assez présent à l'idée? Je le crois de la plus grande conséquence pour l'emploi du charbon de terre aux grosses forges & aux fourneaux à fer. On ne parviendra à un succès complet, qu'autant que la construction du fourneau se rapportera à ce principe, de manière que l'air agisse sur le combustible & avec la plus grande liberté, & dans la plus grande étendue possible. Il n'y aura alors rien de surprenant qu'avec un petit nombre de charges de coaks, & une petite quantité de fondant calcaire, on parvienne à avoir un produit considérable de fonte. Toutes les personnes instruites ou intelligentes dans les différentes parties qui constituent l'art des forges, n'ont besoin que d'être mises sur la voie. On est au surplus dans l'expectative d'essais qui doivent se faire à Montcenis en Bourgogne.

M. Wilxinson, anglois de nation, connu depuis plusieurs années à Nantes, doit établir à Montcenis des forges, sans cours d'eau pour moteur, & où le charbon de terre sera employée en braise, le tout à la manière connue en Angleterre.



MÉMOIRE

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES,

Par M. COUSIN.

(1.) J'AI démontré dans nos Mémoires pour 1783, un théorème qu'on peut énoncer d'une manière beaucoup plus générale, que voici :

L'équation de l'ordre n

$$\alpha \frac{d^n z}{dy^n} + \beta \frac{d^n z}{dy^{n-1}dx} + \gamma \frac{d^n z}{dy^{n-2}dx^2} + \ldots + \epsilon \frac{d^n z}{dx^n} = \tau,$$

dans laquelle α, β, $\gamma \ldots . \epsilon$, τ, font des fonctions de x, y, z, & des différences partielles de z jusqu'à celles de l'ordre $n - 1$ inclusivement, étant proposée ; si on nomme p, q, r, s, &c. les différences partielles de l'ordre $n - 1$, & qu'ayant formé l'équation

$$\alpha m^n + \beta m^{n-1} + \gamma m^{n-2} + \ldots . + \epsilon = 0,$$

l'on fasse, pour abréger,

$$\alpha m + \beta = \alpha\lambda,\ \alpha\lambda m + \gamma = \alpha\mu,\ \alpha\mu m + \delta = \alpha\nu, \text{ \&c.}$$

toutes les intégrales de la proposée dépendront de pouvoir satisfaire aux équations prises deux à deux, qu'on formera, en mettant successivement pour m ses valeurs dans ces deux-ci,

$$m\,dy + dx = 0,$$

$$\alpha m(dp + \lambda dq + \mu dr + \nu ds + \text{\&c.}) + \tau dx = 0.$$

Nous commencerons par appliquer ce théorème aux équations linéaires, c'est-à-dire, à celles où z & ses différences partielles de tous les ordres sont sous une forme linéaire.

(2.) Les équations linéaires de l'ordre n peuvent toutes se représenter par

$$\alpha \frac{d^n z}{dy^n} + \zeta \frac{d^n z}{dy^{n-1} dx} + \gamma \frac{d^n z}{dy^{n-2} dx^2} + \ldots + \varepsilon \frac{d^n z}{dx^n} = \theta$$
$$+ \zeta' \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} + \gamma' \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-2} dx} + \ldots + \varepsilon' \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}$$
$$+ \gamma'' \frac{d^{n-2} z}{dy^{n-2}} + \ldots + \varepsilon'' \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \varrho z$$

dans laquelle les coéfficiens de z & de ses différences partielles & θ sont des fonctions de x, y. Alors, si nous nommons p, q, r, s, &c. les différences partielles de l'ordre $n - 1$, p', q', r', &c. celles de l'ordre $n - 2$, &c. nous aurons à résoudre les équations aux différences ordinaires,

$$m dy + dx = 0,$$

$$\alpha m (dp + \lambda dq + \mu dr + \nu ds + \&c.)$$
$$- (\zeta' p + \gamma' q + \delta' r + \&c. + \gamma'' p' + \delta'' q' + \&c. + \&c. + \varrho z - \theta) dx = 0.$$

Désignons par m, m', m'', &c. les valeurs de m, par $dt1$, $ds1$, $dr1$, &c. les différentielles exactes qu'on trouvera en cherchant les facteurs propres à rendre intégrables

$$m dy + dx,\ m' dy + dx,\ m'' dy + dx,\ \&c.$$

Cela posé, ayant multiplié les équations

$$\frac{dt1}{dy} dy + \frac{dt1}{dx} dx = 0,$$

$$\alpha m (dp + \lambda dq + \mu dr + \&c.)$$
$$- (\zeta' p + \gamma' q + \delta' r + \&c. + \gamma'' p' + \delta'' q' + \&c. + \&c. + \varrho z - \theta) dx = 0,$$

la première par Δ, & l'autre par Λ, nous les ajouterons ensemble, & nous donnerons à la résultante la forme que voici:

$$d.\Lambda a m(p + \lambda q + \mu r + \&c.)$$
$$- p d.\Lambda a m - q d.\Lambda\lambda a m - r d.\Lambda\mu a m - \&c.$$
$$- \Lambda(\beta' p + \gamma' q + \delta' r + \&c. + \gamma'' p^2$$
$$+ \delta'' q^2 + \&c. + \&c. + \varrho z - \theta) dx$$
$$+ \Delta\left(\frac{dt_1}{dy} dy + \frac{dt_1}{dx} dx\right) = 0.$$

Nous supposerons

$$- p d.\Lambda a m - q d.\Lambda\lambda a m - r d.\Lambda\mu a m - \&c.$$
$$- \Lambda(\beta' p + \gamma' q + \delta' r + \&c. + \gamma'' p^2$$
$$+ \delta'' q^2 + \&c. + \&c. + \varrho z) dx$$
$$+ \Delta\left(\frac{dt_1}{dy} dy + \frac{dt_1}{dx} dx\right),$$

une différentielle exacte que nous nommerons dV; & θ_1 étant l'intégrale de $\Lambda\theta dx$, prise par rapport à x, après avoir mis pour y sa valeur en x & t_1, nous aurons

(1) ... $\Lambda a m(p + \lambda q + \mu r + \&c.) + V + \theta_1 = 0$:

nous aurons aussi

$$- p\frac{d.\Lambda a m}{dy} - q\frac{d.\Lambda\lambda a m}{dy} - r\frac{d.\Lambda\mu a m}{dy} - \&c.$$
$$+ \Delta\frac{dt_1}{dy} = \frac{dV}{dy};$$

$$- p\left(\frac{d.\Lambda a m}{dx} + \Lambda\beta'\right) - q\left(\frac{d.\Lambda\lambda a m}{dx} + \Lambda\gamma'\right)$$
$$- r\left(\frac{d.\Lambda\mu a m}{dx} + \Lambda\delta'\right) - \&c.$$
$$- \Lambda(\gamma'' p^2 + \delta'' q^2 + \&c. + \&c. + \varrho z)$$
$$+ \Delta\frac{dt_1}{dx} = \frac{dV}{dx}; \ldots\ldots\ldots$$

d'où nous tirerons, en éliminant Δ, & faisant pour abréger,

$$\frac{dV}{dy} - m\frac{dV}{dx} = (V), \quad \frac{d.\Lambda a m}{dy} - m\frac{d.\Lambda a m}{dx} = (\Lambda a m), \ \&c.$$

$$(2) \ldots -p[(\Lambda \alpha m) - m\Lambda \beta'] - q[(\Lambda\lambda\alpha m) - m\Lambda\gamma'] - r[(\Lambda\mu\alpha m) - m\Lambda\delta'] - \&c. + m\Lambda(\gamma'' p' + \delta'' q' + \&c. + \&c. + \varrho z) = (V).$$

(3.) Si la proposée a une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur, j'entends par-là une équation linéaire de l'ordre $n - 1$, qui renferme une fonction arbitraire de r 1, on pourra supposer

$$V = Mp' + Nq' + \&c. + M'p'' + N'q'' + \&c. + \&c. + Uz + \varphi : n;$$

d'où l'on tirera

$$(V) = (M)p' + M(p - mq) + (N)q' + N(q - mr) + \&c. + (M')p'' + M'(p' - mq') + (N')q'' + N'(q' - mr') + \&c. + \&c. + (U)z + U[p^{(n-2)\prime} - mq^{(n-2)\prime}].$$

Partant, si l'on fait pour abréger,

$$(\Lambda\alpha m) - m\Lambda\beta' = \omega,\ (\Lambda\lambda\alpha m) - m\Lambda\gamma' = \pi,\ (\Lambda\mu\alpha m) - m\Lambda\delta' = \varpi, \&c,$$

l'équation (2) donnera

$$-\omega = M, -\pi = N - mM, -\varpi = P - mM, \&c,$$
$$m\Lambda\gamma'' = (M) + M', m\Lambda\delta'' = (N) - mM' + N', \&c,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ m\Lambda\varrho = (U).$$

La première série contient $n - 1$ équations, la seconde en contient $n - 2$, & ainsi de suite; le nombre de toutes les équations est la somme d'une progression arithmétique, dont le premier terme est 1, & le dernier $n - 1$, c'est-

à-dire que ce nombre $= n \cdot \frac{n-1}{2}$: & comme il n'y a que $\frac{(n-1.)(n-2)}{2}$ inconnues à déterminer, il reste $n - 1$ équations de condition, qui doivent avoir lieu pour que la proposée ait une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur, voici cette intégrale :

$$\Lambda \alpha m(p + \lambda q + \mu r + \&c.) + Mp' + Nq' + \&c. + M'p'' + N'q'' + \&c. + \&c. + Uz + \varphi : t1 + \theta 1 = 0.$$

Si la proposée étoit du second ordre, on auroit les trois équations

$$(\Lambda \alpha m) - m\Lambda \mathit{6}' + U = 0,$$
$$(\Lambda \gamma) + m\Lambda \gamma' + mU = 0,$$
$$m\Lambda \rho = (U),$$

dont la première donneroit U; des deux autres, l'une serviroit à trouver le facteur Λ, & la seconde seroit l'équation de condition. Si l'équation du second ordre n'étoit autre que $\frac{d^2 z}{dy^2} = X^2 \frac{d^2 z}{dx^2}$, qui est celle des cordes vibrantes lorsque X ne renferme que x & des constantes, les trois équations deviendroient

$$(U) = 0,$$
$$\Lambda m \frac{dm}{dx} + 2U = 0,$$
$$2(\Lambda) - 3\Lambda \frac{dm}{dx} = 0:$$

on tireroit des deux premières $(\Lambda) \frac{d.m^2}{dx} = \Lambda m \frac{d^2.m^2}{dx^2}$; on auroit par conséquent

$$\frac{3}{4} \frac{d.m^2}{m^2} = \frac{d^2.m^2}{dx} : \frac{d.m^2}{dx}, (m^2)^{-\frac{1}{4}} d.m^2 = adx,$$
$$\& \ 16m = (ax+b)^2,$$

a & b étant des constantes, c'est la valeur de X pour que l'équation des cordes vibrantes ait une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur. Tout ce que contient ce numéro, s'accorde bien avec ce qui est démontré d'une autre manière, n.os 84 & 85 de nos leçons de calcul différentiel & de calcul intégral.

(4.) Mais la proposée pourroit n'avoir pas d'intégrale de l'ordre immédiatement inférieur, & qu'il fût cependant possible d'en tirer la valeur complète de z, en donnant à z & V des formes très-générales, au moyen de coëfficiens indéterminés. La seule supposition de

$$V = Af:s1 + Bf':s1 + Cf'':s1 + \&c. + L,$$
$$z = Mf:s1 + Nf':s1 + Pf'':s1 + \&c. + W,$$

résoudroit un cas fort étendu: alors on mettroit ces valeurs dans les équations (1) & (2), & on auroit pour déterminer $A, M, B, N,$ &c. des équations aux différences partielles de l'ordre $n - 1$, auxquelles il suffiroit de satisfaire. Si z & V devoient renfermer des termes où la fonction arbitraire fût embarrassée du signe intégral, tels que ceux-ci:

$$A\int Bds1f:s1,\ M\int Ndt1\int Pds1f:s1,\ \&c.$$

on les introduiroit; & ayant donné à z, V les valeurs les plus générales dont ils fussent susceptibles, les conditions qu'on trouveroit, indiqueroient les cas où l'intégrale complète seroit possible en termes finis. Cette méthode d'intégrer les équations linéaires aux différences partielles de tous les ordres, est simple & générale: il ne sera pas inutile de l'éclaircir par quelques exemples.

(5.) Lorsque la proposée est du second ordre, en faisant, pour abréger, $\Lambda(\pi\alpha m + \omega\gamma) = \sigma$, on tire des équations (1) & (2),

$$\sigma p = \Lambda\gamma\,[\Lambda m\varrho z - (V)] - \pi(\theta 1 + V),$$
$$\sigma q = \Lambda\alpha m\,[\Lambda m\varrho z - (V)] + \omega(\theta 1 + V).$$

Je pourrois substituer ces valeurs dans $dz = p\,dy + q\,dx$; j'en tirerois z, pourvu que $m\rho$ fût le facteur propre à rendre intégrable $\frac{\gamma\,dy + am\,dx}{\gamma(am) - am(\gamma) - am'\gamma' - m\gamma\mathcal{C}'}$; l'autre condition donneroit une équation aux différences partielles qu'il seroit nécessaire d'intégrer complétement, pour que la valeur de z renfermât deux fonctions arbitraires; mais ce cas particulier pourra se déduire aisément de la solution générale que nous avons indiquée.

(6.) Nous ferons d'abord

$$V = Af:s + Bf':s + Cf'':s + \dots\dots\dots + Kf^{n'}:s + L,$$

$$z = Mf:s + Nf':s + Pf'':s + \dots\dots\dots + Vf^{n'}:s + W,$$

ds étant la différentielle exacte qu'on trouve en cherchant le facteur propre à rendre intégrable $m'dy + dx$. Par ces substitutions, $\Lambda m\rho z - (V)$ devient

$$[\Lambda Mm\rho - (A)]f:s + [\Lambda Nm\rho - (B) - A(s)]f':s + \dots\dots + [\Lambda Vm\rho - (K) - I(s)]f^{n'}:s - K(s)f^{(n+1)\cdot 1}:s + \Lambda W m\rho - (L);$$

on trouvera donc facilement les valeurs de p & q que donnent les formules du *n.° précédent.* Mais on a aussi

$$p = \frac{dM}{dy}f:s + \left(\frac{dN}{dy} + M\frac{ds}{dy}\right)f':s + \dots\dots + \left(\frac{dU}{dy} + T\frac{ds}{dy}\right)f^{n'}:s + U\frac{ds}{dy}f^{(n+1)\cdot 1}:s + \frac{dW}{dy},$$

$$q = \frac{dM}{dx} f:s + \left(\frac{dN}{dx} + M \frac{ds}{dx} \right) f':s + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \left(\frac{dU}{dx} + T \frac{ds}{dx} \right) f^{n}:s$$

$$+ U \frac{ds}{dx} f^{(n+1)\cdot 1}:s + \frac{dW}{dx};$$

il ne s'agira donc que de déterminer les coéfficiens A, M, B, N, &c. au moyen des équations suivantes qui sont du premier ordre:

$$\Lambda\gamma \; [\Lambda Mm\varrho - (A)] - \pi A = \sigma \frac{dM}{dy},$$

$$\Lambda\alpha m \; [\Lambda Mm\varrho - (A)] + \omega A = \sigma \frac{dM}{dx},$$

$$\Lambda\gamma \; [\Lambda Nm\varrho - (B) - A(s)] - \pi B = \sigma \left(\frac{dN}{dy} + M \frac{ds}{dy} \right),$$

$$\Lambda\alpha m \; [\Lambda Nm\varrho - (B) - A(s)] + \omega B = \sigma \left(\frac{dN}{dx} + M \frac{ds}{dx} \right)$$

. . . .

$$\Lambda\gamma \; [\Lambda Um\varrho - (K) - I(s)] - \pi K = \sigma \left(\frac{dU}{dy} + T \frac{ds}{dy} \right),$$

$$\Lambda\alpha m \; [\Lambda Um\varrho - (K) - I(s)] + \omega K = \sigma \left(\frac{dU}{dx} + T \frac{ds}{dx} \right),$$

$$\Lambda\gamma \; [\Lambda Wm\varrho - (L)] - \pi(\theta 1 + L) = \sigma \frac{dW}{dy},$$

$$\Lambda\alpha m [\Lambda Wm\varrho - (L)] + \omega(\theta 1 + L) = \sigma \frac{dW}{dx}.$$

On aura de plus les deux équations

$$\Lambda K\gamma(s) = -\sigma U \frac{ds}{dy}, \quad \Lambda K\alpha m(s) = -\sigma U \frac{ds}{dx}$$

qui, à cause de $\gamma = \alpha m m'$ toujours vraie par la propriété des équations du second degré, se réduisent à une seule qui renferme les conditions qui doivent avoir lieu pour que l'intégrale soit telle que nous l'avons supposée. Nous n'avons trouvé qu'une partie de la valeur de z, nous trouverons l'autre, en changeant dans la première, m en m', s en t, & $f:s$ en $\varphi:t$.

(7.) Si l'équation du second ordre est celle des cordes vibrantes, $\frac{d^2 z}{dy^2} = X^2 \frac{d^2 z}{dx^2}$, on fera A $m = 1$,

$$m = - X, \; m' = X,$$

$$y - \int \frac{dx}{X} = t, \; y + \int \frac{dx}{X} = s;$$

partant $(s) = 2$. Alors en supposant que les coéfficiens sont tous fonctions de x seul, on aura à résoudre les équations

$$d\, \frac{A}{X} = 0, \; dA = \frac{dX}{dx}\, dM,$$

$$d\, \frac{B}{X} = \frac{M\, dX - 2A\, dx}{X^2},$$

$$dB + \frac{2A\, dx}{X} = \frac{dX}{dx}\, (dN + \frac{M\, dx}{X}),$$

$$\ldots\ldots \; d\, \frac{K}{X} = \frac{T\, dX - 2I\, dx}{X^2},$$

$$dK + \frac{2I\, dx}{X} = \frac{dX}{dx}\, (dU + \frac{T\, dx}{X}),$$

$$2K\, dx = U\, dX.$$

On en tire $A = aX$ & $M = ax + b$, a & b étant des constantes, ou bien $A = 0$ & $M = 1$; nous examinerons séparément ces deux cas, en supposant $X = (ax + b)^{\gamma}$.

Dans le premier cas, on peut supposer

$$N = e\,(1)\,(ax + b)^{-\gamma + 2},$$
$$P = e\,(2)\,(ax + b)^{-2\gamma + 3}, \text{ \&c.}$$
$$B = g\,(1)\,(ax + b),$$
$$C = g\,(2)\,(ax + b)^{-\gamma + 2}, \text{ \&c.}$$

$e\,(1)$, $g\,(1)$, &c. étant des constantes. Par ces substitutions, nos équations deviennent

$$g(1)(1-\partial)+2=\partial,$$
$$g(1)+2=ae(1)(2-\partial)\partial+\partial,$$
$$2ag(2)(1-\partial)+2g(1)=ae(1)\partial,$$
$$ag(2)(2-\partial)+2g(1)=a^2e(2)(3-2\partial)\partial+ae(1)\partial,$$
$$3ag(3)(1-\partial)+2g(2)=ae(2)\partial,$$
$$ag(3)(3-2\partial)+2g(2)=a^2e(3)(4-3\partial)\partial+ae(2)\partial,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 2g(n)=ae(n)\partial.$$

On en tire par l'élimination

$$g(1)=-\frac{2-\partial}{1-\partial},\ e(1)=-\frac{1}{a(1-\partial)},$$
$$g(2)=\frac{4-3\partial}{2a(1-\partial)^2},\ e(2)=\frac{4-3\partial}{2a^2(1-\partial)^2(3-2\partial)},$$
$$g(3)=-\frac{(4-3\partial)(6-5\partial)}{2.3a^2(1-\partial)^3(3-2\partial)},$$
$$e(3)=-\frac{6-5d}{2.3a^3(1-\partial)^3(3-2\partial)},\ \&c.$$

& que ∂ doit être une quantité de cette forme $\frac{2n}{2n-1}$, n étant un nombre entier positif.

Lorsque $A=0$ & $M=1$, on a $B=-1$, & on peut supposer

$$N=e(1)(ax+b)^{-\partial-1};$$
$$P=e(2)(ax+b)^{-2(\partial-1)},\ \&c.$$
$$C=g(2)(ax+b)^{-\partial+1},\ \&c.$$

ce qui change nos équations en celles-ci:

$$ae(1)(1-\partial)+1=0,$$
$$ag(2)(1-2\partial)-2=ae(1)\partial,$$

$$ag(2)(1-\partial)-2=2a^2e(2)(1-\partial)\partial$$
$$+ae(1)\partial,$$
$$ag(3)(2-3\partial)+2g(2)=ae(2)\partial,$$
$$2ag(3)(1-\partial)+2g(2)=3a^2e(3)(1$$
$$-\partial)\partial+ae(2)\partial,$$
$$ag(4)(3-4\partial)+2g(3)=ae(3)\partial,$$
$$3ag(4)(1-\partial)+2g(3)=4a^2e(4)(1$$
$$-\partial)\partial+ae(3)\partial,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 2g(n)=ae(n)\partial.$$

Il eſt facile d'en tirer

$$e(1)=-\frac{1}{a(1-\partial)},$$

$$g(2)=\frac{2-3\partial}{a(1-\partial)(1-2\partial)},$$

$$e(2)=\frac{2-3\partial}{2a^2(1-\partial)^2(1-2\partial)},$$

$$g(3)=-\frac{4-5\partial}{2a^2(1-\partial)^2(1-2\partial)},$$

$$e(3)=-\frac{4-5\partial}{2.3a^3(1-\partial)^3(1-2\partial)},\ \&c.$$

& que ∂ doit être une quantité telle que $\frac{2n}{2n+1}$, où n eſt un nombre entier poſitif. Il ſuit de ce qui précède que ſi X eſt une quantité de cette forme $(ax+b)^{\frac{2n}{2n\pm 1}}$, l'équation des cordes vibrantes a pour intégrale finie complète,

$$z=M(f:s+\varphi:t)+N(f':s+\varphi':t)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ +U(f^{n\prime}:s+\varphi^{n\prime}:t).$$

(8.) Si z devoit renfermer des termes où la fonction

arbitraire fût embarrassée du signe intégral ; s'il devoit renfermer le terme $R\int S\,ds\,f:s$, on représenteroit par $G\int H\,ds\,f:s$ celui qui devroit entrer dans V. Partant, soit

$$V = G\int H\,ds\,f:s + A f:s + B f':s + \&c.$$

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dG}{ds}\int H\,ds\,f:s + A\,1\,f:s + B\,1\,f':s + \&c.$$

$$z = R\int S\,ds\,f:s + M f:s + N f':s + \&c.$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dR}{ds}\int S\,ds\,f:s + M\,1\,f:s + N\,1\,f':s + \&c.$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dR}{dt}\int S\,ds\,f:s + R\int \frac{dS}{dt}\,ds\,f:s + M\,2\,f:s + N\,2\,f':s + \&c.$$

à cause de $(V) = \frac{dV}{ds}\,(s)$, les équations du n.° 5 donneront

$$\sigma p = m\gamma\,\varrho\,\Lambda^2\,R\int S\,ds\,f:s$$
$$- \left(\pi G + \Lambda\gamma(s)\,\frac{dG}{ds}\right)\int H\,ds\,f:s + A\,2\,f:s + B\,2\,f':s + \&c.$$

$$\sigma q = m^2\,\alpha\,\varrho\,\Lambda^2\,R\int S\,ds\,f:s$$
$$+ \left(\omega G - \Lambda\alpha m(s)\,\frac{dG}{ds}\right)\int H\,ds\,f:s + A\,3\,f:s + B\,3\,f':s + \&c.$$

mais on a aussi

$$p = \frac{dR}{dy}\int S\,ds\,f:s + \frac{dt}{dy}\,R\int \frac{dS}{dt}\,ds\,f:s + M\,3\,f:s + N\,3\,f':s + \&c.$$

$$q = \frac{dR}{dx}\int S\,ds\,f:s + \frac{dt}{dx}\,R\int \frac{dS}{dt}\,ds\,f:s + M\,4\,f:s + N\,4\,f':s + \&c.$$

Il sera donc facile de former ces deux équations

$$R\,1\int S\,ds\,f:s - \frac{dt}{dy}\,\sigma R\int \frac{dS}{dt}\,ds\,f:s - G\,1\int H\,ds\,f:s = A\,5\,f:s + \&c.$$

$$R2\int S ds f:s - \frac{dt}{dx}\,\sigma R\int \frac{dS}{dt}\, ds f:s + G2\int H ds f:s$$
$$= M5f:s + \&c.$$

dans lesquelles on a fait, pour abréger,

$$\pi G + \Lambda\gamma(s)\frac{dG}{ds} = G1,$$
$$m\gamma\varrho\Lambda^2 R - \sigma\frac{dR}{dy} = R1,$$
$$\alpha G - \Lambda\alpha m(s)\frac{dG}{ds} = G2,$$
$$m^2\alpha\varrho\Lambda^2 R - \sigma\frac{dR}{dx} = R2.$$

(9.) On en tirera, en éliminant $\int H ds f:s$, & faisant, pour abréger,

$$\frac{R1G2 + R2G1}{\sigma R(G2\frac{dt}{dy} + G1\frac{dt}{dx})} = \gamma 1,$$

$$\gamma 1\int S ds f:s - \int\frac{dS}{dt} ds f:s = M6f:s + \&c.$$

Au moyen de celle-ci, on aura $\int S ds f:s$ en quantités débarrassées du signe intégral, à moins que $\frac{d\gamma 1}{ds}$ ne soit nul; donc $\gamma 1$ ne doit pas renfermer s. On le fera passer sous le signe intégral, & l'équation précédente deviendra

$$\int(\gamma 1 S - \frac{dS}{dt})ds f:s = M6f:s + \&c:$$

or $e^{-\int\gamma 1 dt}(\gamma 1 S - \frac{dS}{dt})$ est la différentielle de $-Se^{-\int\gamma 1 dt}$ prise par rapport à t & divisée par dt; ayant donc multiplié les deux membres de la dernière équation par $e^{-\int\gamma 1 dt}$, on l'intégrera, & on aura

$$e^{-\int\gamma 1 dt}\int S ds f:s = \int e^{-\int\gamma 1 dt} M6 dt.f:s + \&c.$$

Celle-ci donnera $\int S ds f:s$ en quantités délivrées du signe

intégral, toutes les fois que $G2\frac{dt}{dy} + G1\frac{dt}{dx}$ ne sera pas nul; & lorsqu'il sera nul, on aura une équation de cette forme,

$$(R1G2 + R2G1)\int Sdsf:s = A6f:s + \&c.$$

qui donnera $\int Sdsf:s$ en quantités délivrées du signe intégral, à moins que $R1G2 + R2G1$ ne soit nul aussi : il est donc nécessaire de former ces deux équations

$$G2m + G1 = 0, R1G2 + R2G1 = 0,$$

desquelles on tire $R1 - mR2 = 0$.

Cette dernière équation sera facilement changée en celle-ci,

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{ds} = (\tau) \ldots\ldots \frac{\gamma - am^2}{\epsilon(s)} m \varrho \Lambda^2,$$

qui, étant intégrée, donne $R = e^{\int \tau ds} \varphi : t$.

Il suit de-là, que quand l'intégrale doit contenir le terme $R\int Sdsf:s$, la partie de la valeur de z, dont il s'agit, renferme une fonction arbitraire de t, outre celle de s, & que par conséquent elle peut être prise pour l'intégrale complète. On parviendroit au même résultat, quel que fût le nombre des termes affectés du signe intégral & le nombre de ces signes dans chaque terme; donc, si l'intégrale complète est possible, en termes finis, on doit la trouver délivrée du signe intégral relativement à l'une ou à l'autre des fonctions arbitraires. M. de la Place a, le premier, fait cette remarque importante, dans les Mémoires de l'Académie, pour l'année 1773.

(10.) Nous prendrons, pour second exemple, les équations aux différences partielles du troisième ordre, par rapport auxquelles les équations (1) & (2) deviennent

$$\Lambda a m (p + \lambda q + \mu r) + V + \theta 1 = 0,$$
$$-\omega p - \pi q - \varpi r + \Lambda m(\gamma'' p' + \delta'' q' + \varrho z) = (V).$$

Ayant fait, pour abréger,

$$\frac{dN}{dy} + M\frac{ds}{dy} = N1, \frac{dP}{dy} + N\frac{ds}{dy} = P1, \&c.$$

$$\frac{dN}{dx} + M\frac{ds}{dx} = N2, \frac{dP}{dx} + N\frac{ds}{dx} = P2, \&c.$$

$$\frac{dN1}{dy} + \frac{dM}{dy}\frac{ds}{dy} = N3, \frac{dP1}{dy} + N1\frac{ds}{dy} = P3, \&c.$$

$$\frac{dN1}{dx} + \frac{dM}{dy}\frac{ds}{dx} = N4, \frac{dP1}{dx} + N1\frac{ds}{dx} = P4, \&c.$$

$$\frac{dN2}{dx} + \frac{dM}{dx}\frac{ds}{dx} = N5, \frac{dP2}{dx} + N2\frac{ds}{dx} = P5, \&c.$$

de $z = Mf{:}s + Nf^{\prime}{:}s + Pf^{\prime\prime}{:}s + \ldots\ldots + Uf^{n\,1}{:}s + W,$

on tire

$$p^{\prime} = \frac{dM}{dy}f{:}s + N1f^{\prime}{:}s + \ldots\ldots + U1f^{n\,1}{:}s$$
$$+ U\frac{ds}{dy}f^{(n+1.)1}{:}s + \frac{dW}{dy},$$

$$q^{\prime} = \frac{dM}{dx}f{:}s + N2f^{\prime}{:}s + \ldots\ldots + U2f^{n\,1}{:}s$$
$$+ U\frac{ds}{dx}f^{(n+1.)1}{:}s + \frac{dW}{dx},$$

$$p = \frac{d^2M}{dy^2}f{:}s + N3f^{\prime}{:}s + \ldots\ldots + U3f^{n\,1}{:}s$$
$$+ \left(\frac{ds}{dy}U1 + \frac{d.U\frac{ds}{dy}}{dy}\right)f^{(n+1.)1}{:}s$$
$$+ U\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 f^{(n+2.)1}{:}s + \frac{d^2W}{dy^2},$$

$$q = \frac{d^2M}{dydx}f{:}s + N4f^{\prime}{:}s + \ldots\ldots + U4f^{n\,1}{:}s$$
$$+ \left(\frac{ds}{dx}U1 + \frac{d.U\frac{ds}{dy}}{dx}\right)f^{(n+1.)1}{:}s$$
$$+ U\frac{ds}{dy}\frac{ds}{dx}f^{(n+2.)1}{:}s + \frac{d^2W}{dydx},$$

$$r = \frac{d^2 M}{dx^2} f:s + N5 f':s + \ldots\ldots + U5 f^{n\,'}:s$$

$$+ \left(\frac{ds}{dx} U2 + \frac{d.U\frac{ds}{dx}}{dx}\right) f^{(n+1).1}:s$$

$$+ U\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 f^{(n+2.)1}:s + \frac{d^2 W}{dx^2}.$$

(11.) Nous ferons

$$V = Af:s + Bf':s + Cf'':s$$
$$+ \ldots\ldots + Kf^{n\,'}:s + Lf^{(n+1.1)}:s + \Gamma;$$

c'eſt-à-dire, que nous lui donnerons un terme de plus qu'à z; nous lui en donnerions deux, ſi l'équation étoit du quatrième ordre, & ainſi de ſuite: partant

$$(V) = (A)f:s + [(B) + A(s)]f':s$$
$$+ \ldots\ldots + [(K) + I(s)]f^{n\,'}:s$$
$$+ [(L) + K(s)]f^{(n+1).1}:s$$
$$+ L(s)f^{(n+2).1}:s + (\Gamma).$$

On aura donc, pour déterminer $A, M, B, N, \ldots\ldots K, U, \Gamma, W$, les équations du ſecond ordre

$$\Lambda\alpha m\left(\frac{d^2 M}{dy^2} + \lambda\frac{d^2 M}{dy\,dx} + \mu\frac{d^2 M}{dx^2}\right) + A = 0,$$

$$\omega\frac{d^2 M}{dy^2} + \pi\frac{d^2 M}{dy\,dx} + \varpi\frac{d^2 M}{dx^2}$$
$$- \Lambda m\left(\gamma''\frac{dM}{dy} + \delta''\frac{dM}{dx} + \varrho M\right) + (A) = 0;$$

$$\Lambda\alpha m(N3 + \lambda N4 + \mu N5) + B = 0,$$

$$\omega N3 + \pi N4 + \varpi N5 - \Lambda m(\gamma'' N1 + \delta'' N2 + \varrho N)$$
$$+ (B) + A(s) = 0,$$

. . . .

$$\Lambda\alpha m(U3 + \lambda U4 + \mu U5) + K = 0,$$

$$\omega U3 + \pi U4 + \varpi U5 - \Lambda m$$
$$(\gamma'' U1 + \delta'' U2 + \varrho U) + (K) + I(s) = o,$$

$$\Lambda \alpha m\left(\frac{d^2 w}{dy^2} + \lambda \frac{d^2 w}{dy\,dx} + \mu \frac{d^2 w}{dx^2}\right) + \Gamma + \theta I = o,$$

$$\omega \frac{d^2 w}{dy^2} + \pi \frac{d^2 w}{dy\,dx} + \varpi \frac{d^2 w}{dx^2}$$
$$- \Lambda m\left(\gamma'' \frac{dw}{dy} + \delta'' \frac{dw}{dx} + \varrho w\right) + (\Gamma) = o.$$

On aura de plus ces quatre équations

$$\Lambda \alpha m\left[\frac{ds}{dy} U1 + \frac{d.U\frac{ds}{dy}}{dy} + \lambda\left(\frac{ds}{dx} U1 + \frac{d.U\frac{ds}{dy}}{dx}\right)\right.$$
$$\left. + \mu\left(\frac{ds}{dx} U2 + \frac{d.U\frac{ds}{dx}}{dx}\right)\right] + L = o,$$

$$\omega\left(\frac{ds}{dy} U1 + \frac{d.U\frac{ds}{dy}}{dy}\right) + \pi\left(\frac{ds}{dx} U1 + \frac{d.U\frac{ds}{dy}}{dx}\right)$$
$$+ \varpi\left(\frac{ds}{dx} U2 + \frac{d.U\frac{ds}{dx}}{dx}\right) - \Lambda m\left(\gamma'' \frac{ds}{dy}\right.$$
$$\left. + \delta'' \frac{ds}{dx}\right) U + (L) + K(s) = o,$$

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 + \lambda \frac{ds}{dy} \frac{ds}{dx} + \mu \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = o,$$

$$\omega\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 + \pi \frac{ds}{dy} \frac{ds}{dx} + \varpi\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 + L(s) = o;$$

dont la troisième, qui n'est autre que

$$\alpha (m m')^2 - \gamma m m' - \delta (m + m') = o,$$

est toujours vraie par la nature de l'équation du troisième degré, dont m & m' sont deux racines ; il n'y a donc effectivement que deux équations de condition, pour que les suppositions que nous avons faites puissent avoir lieu.

(12.) Si l'équation du troisième ordre étoit

$$\frac{d^3 z}{dx^3} + a\frac{d^3 z}{dx^2\,dy} + b\frac{d^3 z}{dx\,dy^2} + c\frac{d^3 z}{dy^3}$$
$$+ \frac{1}{u}\left(a'\frac{d^2 z}{dx^2} + b'\frac{d^2 z}{dx\,dy} + c'\frac{d^2 z}{dy^2}\right) + \frac{1}{u^2}\left(e\frac{dz}{dx}\right.$$
$$\left.+ f\frac{dz}{dy}\right) + \frac{gz}{u^3} = 0,$$

où $a, b, c, a', b', c', e, f; g$ sont des constantes & $u = hx + iy$, h, i étant aussi constans; on auroit m, m', m'' constans, $t = my + x$, $s = m'y + x$, $r = m''y + x$, $(s) = m' - m$.

Ayant fait $\Lambda = -1$, on supposeroit

$$M = e(1)u^{\partial},\ N = e(2)u^{\partial+1} \ldots U = e(n+1)u^{\partial+n},$$
$$A = g(1)u^{\partial-2},\ B = g(2)u^{\partial-1} \ldots K = g(n+1)u^{\partial+n-2},$$
$$L = g(n+2)u^{\partial+n-1};$$

& par ces substitutions, les équations qu'il s'agiroit de résoudre deviendroient

$$cm\partial.(\partial - 1)(i^2 + \lambda ih + \mu h^2)e(1) = g(1),$$
$$[m\partial.(\partial - 1)(c'i^2 + b'ih + a'h^2) + m\partial(fi + eh)$$
$$+ mg]e(1) = (hm - i)(\partial - 2)g(1),$$
$$(i^2 + \lambda ih + \mu h^2)(\partial + 1)\partial e(2) + [(2i + \lambda h).m'$$
$$+ \lambda i + 2\mu h]\partial e(1) = \frac{g(2)}{cm},$$

$$[(c'i^2 + b'ih + a'h^2)(\partial + 1)\partial + (fi + eh)(\partial + 1) + g]e(2)$$
$$+ \{[2(c'i + b'h).m' + b'i + 2a'h]\partial + fm' + e\}e(1)$$
$$= \frac{hm - i}{m}(\partial - 1)g(2) + \frac{m - m'}{m}g(1),$$

$$(i^2 + \lambda ih + \mu h^2)(\partial + 1)(\partial + 2)e(3) + [(2i + \lambda h).m'$$
$$+ \lambda i + 2\mu h](\partial + 1)e(2) + (m'^2 + \lambda m' + \mu)e(1) = \frac{g(3)}{cm},$$

$$[(c'i^2 + b'ih + a'h^2)(\partial + 1)(\partial + 2) + (fi + eh)(\partial + 2) + g]e(3) + \{[(2c'i + b'h).m' + b'i + 2a'h](\partial + 1) + fm' + e\}e(2) + (c'm'^2 + b'm' + a')e(1) = \frac{hm - i}{m}\partial g(3) + \frac{m - m'}{m} g(2).$$

$$(i^2 + \lambda ih + \mu h^2)(\partial + 2)(\partial + 3)e(4) + [(2i + \lambda h).m' + \lambda i + 2\mu h](\partial + 2)e(3) + (m'^2 + \lambda m' + \mu)e(2) = \frac{g(4)}{me}.$$

$$[(c'i^2 + b'ih + a'h^2)(\partial + 2)(\partial + 3) + (fi + eh)(\partial + 3) + g]e(4) + \{[(2c'i + b'h).m' + b'i + 2a'h](\partial + 2) + fm' + e\}e(3) + (c'm'^2 + b'm' + a')e(2) = \frac{hm - i}{m}(\partial + 1)g(4) + \frac{m - m'}{m} g(3), \&c.$$

dont les deux premières donneront $\frac{e(1)}{g(1)}$ & ∂ par une équation du troisième degré ; les autres serviront à trouver $e(2)$, $g(2)$, &c. Quant aux conditions d'intégrabilité, elles seront renfermées dans celles-ci

$$[(2i + \lambda h).m' + \lambda i + 2\mu h](\partial + n)e(n + 1) + (m'^2 + \lambda m' + \mu)e(n) = \frac{c'm'^2 + b'm' + a'}{c(m - m')},$$

$$\{[(2c'i + b'h).m' + b'i + 2a'h](\partial + n) + fm' + e\}e(n + 1) + (c'm'^2 + b'm' + a')\left[e(n) - \frac{hm - i}{m - m'}(\partial + n - 1)\right] = \frac{m - m'}{m} g(n + 1).$$

(13.) Il nous reste à discuter le cas où z pourroit renfermer des termes dans lesquels la fonction arbitraire seroit embarrassée du signe intégral. Si, par exemple,

$$z = R\int S\,ds\,f:s + Mf:s + \&c.$$

on aura

$$p' = \frac{dR}{dy}\int S ds f:s + \frac{dt}{dy} R \int \frac{dS}{dt} ds f:s + M3 f:s + \&c.$$

$$q' = \frac{dR}{dx}\int S ds f:s + \frac{dt}{dx} R \int \frac{dS}{dt} ds f:s + M4 f:s + \&c.$$

$$p = \frac{d^2R}{dy^2}\int S ds f:s + \left(2\frac{dR}{dy}\frac{dt}{dy} + R\frac{d^2t}{dy^2}\right)\int \frac{dS}{dt} ds f:s$$
$$+ R\left(\frac{dt}{dy}\right)^2 \int \frac{d^2S}{dt^2} ds f:s + m1 f:s + \&c.$$

$$q = \frac{d^2R}{dydx}\int S ds f:s + \left(\frac{dR}{dy}\frac{dt}{dx} + \frac{dR}{dx}\frac{dt}{dy} + R\frac{d^2t}{dydx}\right)\int \frac{dS}{dt} ds f:s$$
$$+ R\frac{dt}{dy}\frac{dt}{dx}\int \frac{d^2S}{dt^2} ds f:s + m2 f:s + \&c.$$

$$r = \frac{d^2R}{dx^2}\int S ds f:s + \left(2\frac{dR}{dx}\frac{dt}{dx} + R\frac{d^2t}{dx^2}\right)\int \frac{dS}{dt} ds f:s$$
$$+ R\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 \int \frac{d^2S}{dt^2} ds f:s + m3 f:s + \&c;$$

& faisant, pour abréger,

$$\frac{d^2R}{dy^2} + \lambda\frac{d^2R}{dydx} + \mu\frac{d^2R}{dx^2} = R1,$$

$$2\frac{dR}{dy}\frac{dt}{dy} + R\frac{d^2t}{dy^2} + \lambda\left(\frac{dR}{dy}\frac{dt}{dx} + \frac{dR}{dx}\frac{dt}{dy}\right.$$
$$\left. + R\frac{d^2t}{dxdy}\right) + \mu\left(2\frac{dR}{dx}\frac{dt}{dx} + R\frac{d^2t}{dx^2}\right) = S1,$$

$$\left(\frac{dt}{dy}\right)^2 + \lambda\frac{dt}{dy}\frac{dt}{dx} + \mu\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = T1,$$

$$\omega\frac{d^2R}{dy^2} + \pi\frac{d^2R}{dydx} + \varpi\frac{d^2R}{dx^2} - mh\left(\gamma''\frac{dR}{dy}\right.$$
$$\left. + \delta''\frac{dR}{dx} + \varrho R\right) = R2,$$

$$\omega\left(2\frac{dR}{dy}\frac{dt}{dy} + R\frac{d^2t}{dy^2}\right) + \pi\left(\frac{dR}{dy}\frac{dt}{dx} + \frac{dR}{dx}\frac{dt}{dy} + R\frac{d^2t}{dydx}\right)$$
$$+ \varpi\left(\frac{dR}{dx}\frac{dt}{dx} + R\frac{d^2t}{dx^2}\right) - mh\left(\gamma''\frac{dt}{dy} + \delta''\frac{dt}{dx}\right)R = S2,$$

$$\omega\left(\frac{dt}{dy}\right)^2 + \pi\frac{dt}{dy}\frac{dt}{dx} + \varpi\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = T2,$$

les deux équations

$$\Lambda am\left(R1\int Sdsf:s + S1\int\frac{dS}{dt}dsf:s + RT1\int\frac{d^2S}{dt^2}dsf:s\right)$$
$$+ G\int Hdsf:s = m4f:s + \&c.$$

$$R2\int Sdsf:s + S2\int\frac{dS}{dt}dsf:s + RT2\int\frac{d^2S}{dt^2}dsf:s$$
$$+ \frac{dG}{ds}(s)\int Hdsf:s = m5f:s + \&c.$$

desquelles on tirera, en éliminant $\int Hdsf:s$ & faisant, pour abréger, $\frac{\Lambda am(s)}{G}\frac{dG}{ds} = b$,

$$(bR1 - R2)\int Sdsf:s + (bS1 - S2)\int\frac{dS}{dt}dsf:s$$
$$+ (bT1 - T2)R\int\frac{d^2S}{dt^2}dsf:s = m6f:s + \&c.$$

(14.) Si $bT1 - T2$ n'est pas nul, en faisant pour abréger,

$$\frac{bR1 - R2}{R(bT1 - T2)} = V1, \quad \frac{bS1 - S2}{R(bT1 - T2)} = V2;$$

on aura

$$V1\int Sdsf:s + V2\int\frac{dS}{dt}dsf:s + \int\frac{d^2S}{dt^2}dsf:s$$
$$= m7f:s + \&c.$$

& différenciant par rapport à s,

$$\frac{dV1}{ds}\int Sdsf:s + \frac{dV2}{ds}\int\frac{dS}{dt}dsf:s = m8f:s + \&c.$$

Si $\frac{dV2}{ds}$ n'est pas nul, on tirera de celle-ci $\int Sdsf:s$ en quantités délivrées du signe intégral, à moins que $\frac{dV1}{ds}:\frac{dV2}{ds}$, que nous ferons $= \sigma 1$, ne renferme point s. On mettra $\sigma 1$ sous le signe, & ayant intégré par rapport à t, on aura

$\int S\,ds\,f:s$ en quantités délivrées du ſigne intégral; ce qui ne pouvant être par l'hypothèſe, il faut néceſſairement que $\frac{dV2}{ds}$ ſoit nul. Mais l'équation qui précède donnera le même réſultat, à moins que $\frac{dV1}{ds}$ ne ſoit nul: donc $V1$ & $V2$ ne doivent pas renfermer s, & on pourra les faire paſſer ſous le ſigne, d'où reſultera cette équation,

$$\int\left(\frac{d^2S}{dt^2} + V2\,\frac{dS}{dt} + V1\,S\right)ds\,f:s = m\gamma f:s + \&c.$$

Or θ étant donné par

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{d.V2\theta}{dt} + V1\theta = 0,$$

on a, pour l'intégrale de

$$\left(\frac{d^2S}{dt^2} + V2\frac{dS}{dt} + V1\,S\right)\theta dt,$$

la quantité ſuivante:

$$\theta\,\frac{dS}{dt} + \left(V2\,\theta - \frac{d\theta}{dt}\right)S;$$

donc l'équation dont il s'agit deviendra

$$\int\left[\theta\frac{dS}{dt} + \left(V2\,\theta - \frac{d\theta}{dt}\right)S\right]ds\,f:s = \int\theta m\gamma\,dt\,f:s + \&c.$$

qui, étant intégrée une ſeconde fois par rapport à t, donnera $\int S\,ds\,f:s$ en quantités délivrées du ſigne intégral: donc $bT1 - T2$ doit être nul; & comme on démontrera, de la même manière, que $bS1 - S2$, $bR1 - R2$ doivent être nuls auſſi, on aura trois équations que nous pourrons écrire comme il ſuit:

$$bT1 - T2 = 0,\ bR1 - R2 = 0,\ b(S1 + tR1) - S2 - tR2 = 0.$$

(15.) Ces équations, ou celles-ci,

$$(b - \omega)m^2 + (b\lambda - \pi)m + b\mu - \varpi = 0,$$

$$(b-\omega)\frac{d^2R}{dy^2}+(b\lambda-\pi)\frac{d^2R}{dydx}+(b\mu-\varpi)\frac{d^2R}{dx^2}$$
$$+m\Lambda\left(\gamma^{11}\frac{dR}{dy}+\delta^{11}\frac{dR}{dx}+\varrho R\right)=0,$$

$$(b-\omega)\frac{d^2.Rt}{dy^2}+(b\lambda-\pi)\frac{d^2.Rt}{dydx}+(b\mu-\varpi)\frac{d^2.Rt}{dx^2}$$
$$+m\Lambda\left(\gamma^{11}\frac{d.Rt}{dy}+\delta^{11}\frac{d.Rt}{dx}+\varrho Rt\right)=0,$$

font voir que quelle que ſoit la valeur de R qui doit ſatisfaire aux conditions qu'elles renferment, ſi on la repréſente par u, $R = u\varphi:t$ y ſatisfera auſſi. Il eſt donc clair que ſi l'intégrale complète eſt poſſible en termes finis, on l'aura toujours délivrée du ſigne intégral, relativement à deux des trois fonctions arbitraires qu'elle doit renfermer; il n'eſt pas moins clair qu'on ne peut pas la ſuppoſer abſolument délivrée de ce ſigne, ſans diminuer la généralité des ſuppoſitions. Généralement ſi l'intégrale complète d'une équation linéaire de l'ordre n eſt poſſible en termes finis, on l'aura toujours délivrée du ſigne intégral, relativement à $n-1$ des fonctions arbitraires qu'elle doit renfermer; mais on ne pourra pas la ſuppoſer abſolument délivrée de ce ſigne, ſans diminuer la généralité de la ſolution.



MÉMOIRE
SUR L'ILE DE FRISLANDE,
Par M. BUACHE.

Lû le 9 Juillet 1785.

JE me propose de démontrer, dans ce Mémoire, l'existence & la véritable position d'une isle que la géographie moderne a réformée & exclue des Cartes, après l'y avoir admise pendant près de trois cents ans, & l'y avoir même représentée avec des détails assez considérables.

On a eu connoissance de l'île de Frislande, vers la fin du quatorzième siècle, par les lettres & mémoires de deux frères Vénitiens, de la famille des Zeni, qu'on dit avoir abordé dans cette isle, & y avoir été retenus par un Prince du pays. Nous avons, dans la collection de Ramusio, au *tome II*, une relation abrégée de leurs voyages & de leurs découvertes, tirée de leurs lettres & mémoires, & publiée par un de leurs descendans. Nous avons aussi, dans une édition italienne de Ptolémée, publiée par Girolamo Ruscelli (*Venise*, *1561*, in 4.°), la copie d'une carte originale de ces mêmes voyages & découvertes, qui fut trouvée parmi les lettres des deux frères Zeni, & mise au jour en même temps que la relation de leurs expéditions, pour en faciliter l'intelligence.

Si l'île de Frislande n'existoit pas, comme l'a prétendu Laët, dans son Traité de l'origine des Américains, & comme on pourroit être tenté de le croire, après la réforme qui en a été faite par les derniers Géographes, les voyages des Zeni seroient une pure fiction; leur relation ne pourroit être regardée que comme un roman, ainsi que la carte qui l'accompagne; & on ne pourroit en tirer aucun fruit, ni même les citer dans une discussion sérieuse. D'un autre côté, si les voyages des Zeni étoient

véritables & leur relation authentique, comme l'ont prétendu plusieurs savans d'Italie plus à portée que Laët d'être instruits sur ce point, l'île de Frislande auroit existé réellement; elle existeroit même encore, du moins en partie, puisqu'aucune histoire ne parle de révolution qui ait pu l'anéantir; & il y auroit lieu de croire qu'on pourroit en trouver quelques vestiges. Ce sont ces considérations qui m'ont engagé dans les recherches que je vais soumettre au jugement de l'Académie. Je desirois sur-tout pouvoir rendre utiles la relation & la carte des Zeni, qui me paroissoient devoir répandre quelque jour sur l'histoire des découvertes & de la population.

On voit l'île de Frislande sur des cartes manuscrites de Texéira, sur les cartes gravées de Mercator, Blaeu, Dudley, Bertius, Coronelli & autres principaux Géographes des deux derniers siècles: elle y est placée dans le sud-ouest de l'Islande, assez près du Groenland, & représentée sur toutes comme une terre bien connue & d'une étendue considérable. M. Delisle la marquoit encore en 1714 & 1720 sur ses Hémisphères, mais figurée comme une terre peu connue & dont on n'a qu'une idée vague: il la nomme *Frislande* dans son Hémisphère septentrional de 1714, & *Terre de Bus*, ci-devant *Frislande*, dans son Hémisphère occidental de 1720. M. Danville, n'admettant dans ses cartes que des connoissances certaines, en a exclu l'île de Bus & toute idée de Frislande. Enfin, dans une carte réduite des *Mers du nord*, publiée par M.rs de Verdun, de Borda & Pingré, en 1776, & à la suite d'un voyage qui a rectifié nos connoissances sur toutes les parties du globe que ces savans ont parcourues, on ne voit aucune trace de Frislande; & l'île de *Bus* n'y est marquée que comme très-douteuse, & seulement sur l'autorité des cartes de Vankeulen, qui ne la figurent elles-mêmes que comme une terre peu connue.

Il y a, à la vérité, sur ces cartes de Vankeulen, une légende concernant cette terre, & qui dit: *Cette Terre*

a été submergée, & n'a plus aujourd'hui qu'un quart de lieue de circuit, lorsque la mer est grosse ; c'étoit, il y a bien des années, une grande île nommée Frislande, qui avoit bien 100 milles de circuit, & sur laquelle il y avoit plusieurs villages : mais cette légende n'est elle-même fondée que sur une conjecture mise en avant par quelques historiens, dans la vue d'expliquer pourquoi l'île de Frislande ne se retrouvoit pas. On avoit cru de même, pendant un temps, que le Groenland avoit été englouti, parce qu'on ne le retrouvoit pas.

À l'occasion de cette légende, qui n'a point échappé aux recherches de M.rs de Verdun, de Borda & Pingré, ces savans nous exposent, dans la relation de leur voyage, leur opinion sur l'île de *Frislande* & sur la terre de *Bus.* Il est dit, au *tome II* de cette relation, *page 359 :* « Cette » île de Frislande est réellement représentée comme une » grande île, sur plusieurs cartes de l'Atlas de Mercator, » de l'Arcano del Mare, &c. & cela avec des détails » de villes, de villages, &c. qui persuaderoient presque » que cette île a autrefois existé: nous sommes fort éloignés » de le croire ; mais que cette île ait existé ou non, il » est au moins certain qu'elle n'existe plus. Nous avons » traversé le lieu où elle est placée, sur plusieurs cartes de » l'Arcano del Mare & de Mercator, & nous n'en avons » pas aperçu le plus léger vestige : mais existe-t-il au » moins, sous le nom de *Bus*, une petite partie de cette » île, nous en doutons, parce que nous ne voyons pas » que l'existence de cette île *Bus* soit suffisamment constatée ». Telle est l'opinion que des Savans, à qui la Géographie a tant d'obligations, ont pu se former de l'île de Frislande; & on doit la considérer comme le résultat de l'état actuel de nos connoissances sur ce point.

C'est aussi l'opinion qui avoit été le plus généralement adoptée auparavant, à en juger par le titre d'une carte particulière de Frislande, publiée par le P. Coronelli, géographe de la république de Venise. Ce titre est : *Frislanda*

Frislanda scoperta da Nicolo Zeno, patricio Veneto, creduta favolosa, o nel mare sommersa. Coronelli assure, d'un autre côté, dans son *Isolario,* que l'on regarde à Venise l'histoire de la découverte des Zeni comme une histoire vraie & authentique. En donnant à sa carte de Frislande le titre que l'on vient de voir, il aura sans doute voulu se conformer à l'idée qu'on en avoit ailleurs, & qui étoit plus généralement reçue.

La plupart des auteurs ont regardé en effet l'île de Frislande comme une terre fabuleuse, parce que, depuis le temps de sa découverte, elle n'a été retrouvée par aucun des navigateurs qui ont parcouru les mers du nord; parce qu'il n'en est pas fait la moindre mention dans les Histoires connues, même dans celle des Souverains à qui on en attribuoit la possession; & parce que la seule relation qui l'a fait connoître, contient quelques détails qui paroissent peu vraisemblables. Quelques savans, qui ont considéré avec plus d'attention la relation & les Cartes de cette découverte, n'ont pu se persuader qu'une île, représentée avec des détails considérables & des noms étrangers à la langue des navigateurs qui en parlent, ne dût être considérée que comme une fiction: ils n'ont pu croire non plus que des personnes de la première qualité, telles qu'étoient les Zeni à Venise, n'eussent publié qu'un roman, dans une relation qu'ils donnoient comme véritable, & eussent voulu en imposer aussi grossièrement au public. Ils ont mieux aimé supposer que l'île de Frislande, qu'on ne retrouvoit pas, auroit été submergée ou engloutie dans la mer, depuis l'époque de sa découverte.

Il y a une troisième opinion, suivant laquelle la terre de Frislande ne seroit autre chose que la partie occidentale de l'Islande; mais cette opinion n'a servi qu'à fortifier les doutes que l'on avoit sur l'existence de cette terre, & je ne la cite ici que pour indiquer l'ouvrage dans lequel elle est développée, & qui contient d'ailleurs

des obſervations curieuſes ſur la queſtion dont il s'agit dans ce Mémoire : ce ſont les *Refleſſioni geographice ſoprà la Terra incognita*, du P. Vitale Terra-Roſſa, bénédictin & profeſſeur en l'univerſité de Padoue.

Quelque bien fondée que paroiſſe l'opinion des auteurs qui croient cette île fabuleuſe ou ſubmergée, il s'en faut de beaucoup qu'elle ſoit ſans difficultés, & qu'elle réponde, d'une manière ſatisfaiſante, à toutes les objections qu'on peut former contr'elle; aujourd'hui ſur-tout qu'on voit reparoître, dans les découvertes des derniers navigateurs, pluſieurs terres ou îles qu'on avoit regardées de même comme très-douteuſes, & qu'on avoit excluès en conſéquence des cartes modernes : telles ſont les îles de *Quiros* & autres anciennes découvertes des Eſpagnols dans la mer du Sud.

J'obſerverai d'abord que ſuppoſer la ſubmerſion totale d'une île auſſi grande que celle dont il eſt ici queſtion, c'eſt ſuppoſer une révolution terrible, dont les effets auroient dû ſe faire reſſentir au loin, & être connus au moins dans les terres ou îles voiſines. On nous a conſervé les dates & juſqu'aux moindres détails des différens ravages que la mer a faits, depuis l'an 800, ſur les îles de Heyligland & de Norſtrand, voiſines des côtes du Jutland. On nous a conſervé de même les dates des principaux événemens qui ont eu lieu en Iſlande, depuis une longue ſuite de ſiècles, & entr'autres des feux qui ſont ſortis de la mer aux environs de cette île; mais on ne trouve nulle part un ſeul mot qui ait rapport à la ſubmerſion totale de Friſlande, laquelle ſubmerſion n'auroit pu arriver encore qu'après l'an 1400, ou depuis le commencement du XV.e ſiècle. Suppoſition pour ſuppoſition, il me ſembleroit beaucoup plus ſimple & même plus naturel de ſuppoſer une erreur dans les Cartes géographiques, que d'admettre gratuitement une révolution auſſi étonnante.

Il me paroîtroit également plus ſimple & plus naturel

de ſuppoſer les cartes en défaut, lorſqu'on ne trouve pas une terre à la place où ces cartes en marquent une, que d'en conclure abſolument que cette terre n'exiſte pas. On ſait que la poſition d'une île qui n'eſt pas fixée par des obſervations aſtronomiques, peut varier conſidérablement, & au point qu'il ſe trouve quelquefois 200 à 300 lieues de différence entre ſa véritable poſition & celle que les cartes lui aſſignent. Les cartes ſont dreſſées en grande partie d'après les journaux des navigateurs, & ſur l'eſtime des pilotes : elles participent donc aux erreurs dont on ſait que cette eſtime eſt ſuſceptible; & il eſt à remarquer que, dans les premiers temps des grandes navigations, ou à l'époque des premières découvertes, ces erreurs étoient très-conſidérables.

Par une ſuite de ces mêmes erreurs inévitables dans l'eſtime de la route du vaiſſeau, il pouvoit arriver qu'une même île vue par trois navigateurs, fût regardée par chacun d'eux comme une nouvelle découverte, & qu'elle parût enſuite ſur des cartes dans trois différentes poſitions, & ſous trois différens noms. La *Georgie* de Cook, par exemple, nouvellement découverte dans l'océan méridional, eſt la même terre que l'île de *Saint-Pierre*, vue par M. Duclos-Guyot, commandant le vaiſſeau eſpagnol *le Lion*, en 1756. Elle eſt la même encore, autant qu'on peut l'eſtimer, que la *terre de la Roche*, vue par un Officier de ce nom dans le ſiècle dernier, & qu'on avoit réformée dans les nouvelles cartes. On remarque encore que M. le chevalier Hebert, qui traverſa le premier du cap de Horn au cap de Bonne-eſpérance, en 1708, regarda les îles de Triſtan d'Acugna comme un objet de nouvelle découverte: s'eſtimant, à la vue de ces îles, être éloigné d'environ quatre cents lieues de la poſition que ſa carte donnoit aux îles d'Acugna, il crut que c'étoient de nouvelles Iſles, & les nomma en conſéquence *îles Hebert*. C'eſt ainſi ſans doute que ſe ſont multipliées les petites îles, les Roches & les Vigies,

qu'on voit en ſi grand nombre ſur les anciennes cartes ; & qu'une navigation plus éclairée a fait diſparoître en grande partie.

Il eſt évident qu'on ne retrouveroit pas les îles *Hebert*, ſi on les cherchoit ailleurs qu'à la place des îles de Triſtan d'Acugna ; comme on ne trouvera pas vraiſemblablement l'île de *Saint-Pierre*, ni la terre de *la Roche*, ailleurs que dans la Georgie du capitaine Cook; cependant on n'en conclura pas que ces découvertes ſont fabuleuſes, ou que ces îles ont été ſubmergées. Ce ſont principalement les noms qu'on donne aux îles nouvelles ou réputées nouvelles, qui occaſionnent tant d'erreurs & de confuſion dans la géographie ; & il ſeroit à deſirer que les navigateurs ſe contentaſſent à l'avenir des noms que les îles portent dans le pays même, du moins à l'égard de celles qui ſont habitées. Outre que ce ſeroit un moyen ſûr pour reconnoitre dans la ſuite les îles qui auroient déjà été découvertes; il en réſulteroit encore de nouvelles lumières pour la géographie, en ce que les dénominations des lieux ſont pour la plupart ſignificatives, & ont rapport à la nature des pays ou à quelques productions remarquables. Magellan nous avoit déſigné par leurs veritables noms une partie des Iſles par où il avoit paſſé : on a reconnu les îles des Larrons, au nom de *Juvagana* qu'il avoit indiqué, & qui eſt le même que *Gua-han* ; & on retrouve toutes les autres découvertes de ſon vaiſſeau *la Victoire*, dans celles du capitaine Forreſt.

D'après toutes ces conſidérations, au lieu de ſuppoſer l'île de Friſlande fabuleuſe ou ſubmergée, je ſuppoſerai ſeulement que ſa poſition eſt défectueuſe dans les cartes qui la repréſentent, & ſon nom peut-être altéré ou défiguré dans la relation qui l'a fait connoître. Cette ſuppoſition me paroît d'abord pouvoir expliquer pourquoi cette île n'a été reconnue par aucun navigateur, & pourquoi on n'en trouve aucune mention dans l'hiſtoire; elle m'autoriſe auſſi à ne pas rejeter comme fabuleuſes la relation & la

carte des découvertes des Zeni; & je puis maintenant faire usage des lumières que j'y entrevois, & qui me paroissent conduire à la reconnoissance de la terre de Frislande.

Pour que l'on puisse apprécier plus facilement les conséquences que je déduis de ces deux pièces, je crois devoir rapporter ici un précis de la relation, & mettre sous les yeux une copie de la carte des Zeni.

Dans la guerre qui s'éleva, en 1377, entre les Vénitiens & les Génois, au sujet de l'île de Ténédos, Charles Zeni fut nommé Général de l'armée Vénitienne. Il avoit deux frères, Nicolas & Marc-Antoine: Nicolas voyant la guerre finie, résolut de connoître le monde & de voyager; il fit équiper un vaisseau à ses frais, & passa le détroit de Gibraltar, dans le dessein de visiter l'Angleterre & les Pays-bas. Après avoir couru durant quelques jours au nord, il essuya une tempête qui le poussa vers l'île de Frislande & brisa son vaisseau sur la côte: ce voyage se fit en 1380. Cette île appartenoit au roi de Norvège; mais un seigneur de ce pays, nommé Zichini, venoit d'y descendre avec une armée pour en faire la conquête; ce Prince possédoit les îles de *Portland*, situées au sud & près de Frislande, & qui étoient les plus riches & les plus peuplées du pays; il possédoit aussi le duché de *Sorand*, situé dans la terre & du côté qui regarde l'Écosse: il avoit déjà remporté, l'année précédente, une victoire sur le roi de Norvége.

Sur le bruit qui se répandit bientôt de l'arrivée d'un vaisseau étranger dans cette île, Zichini accourut au lieu où il étoit; il parla en latin à Zeni, & ayant appris qu'il étoit Vénitien, il le retira des mains des habitans qui se disposoient à lui faire un mauvais parti, & le prit sous sa protection, ainsi que tout l'équipage: reconnoissant ensuite son mérite & ses talens pour la navigation, il le fit monter sur ses vaisseaux, & recommanda à son Général de ne rien faire sans ses conseils.

L'armée navale ayant tiré à l'ouest, soumit sans peine

quelques îles de peu de considération, entr'autres, *Ledova* & *Ilofe;* elle entra dans un golfe nommé *Sudero*, prit quelques vaisseaux chargés de poissons salés, dans un port de la terre nommé *Saneftol*, & soumit encore d'autres îles. La mer qu'ils parcoururent étoit tellement remplie d'écueils & de sirtes ou bas-fonds, que sans le secours de Zeni, la flotte se seroit perdue cent fois.

En abordant à la ville de *Bondendono*, on apprit que Zichini avoit remporté une victoire complète, qui l'avoit rendu maître de toute l'île : Zichini y vint lui-même quelque temps après, il témoigna beaucoup d'amitié à Zeni, & de-là se rendit à Frislande, capitale de l'île, pour y faire son entrée. Cette ville est située dans la partie du sud-est & sur un golfe (car cette île en a beaucoup); il y a dans cette ville une si grande abondance de poissons, que les Anglois, les Flamands, les Écossois, les Danois & les Norvégiens y viennent en faire leurs provisions, & apportent par ce commerce beaucoup de richesses dans l'île.

Nicolas Zeni se voyant ainsi retenu & honoré par Zichini, écrivit à Marc-Antoine son frère, de le venir joindre. Celui-ci étant arrivé, Zichini partit avec les deux Zeni, sur une flotte considérable, pour aller attaquer l'*Esflande*, qui est située entre Frislande & la Norvège. Il avoit déjà commencé à ravager ce pays, quand il apprit que le roi de Norvège s'approchoit de lui : il crut devoir se retirer; mais une tempête qui survint, lui fit perdre une partie de ses vaisseaux, & le reste fut jeté à l'île *Grisland*, qui est assez grande, mais inculte. La flotte du roi de Norvège périt aussi.

Zichini voyant qu'il n'étoit pas loin de l'Islande, qui appartenoit aussi au roi de Norwège, résolut de l'attaquer; mais comme il n'avoit que peu de monde, & que cette île étoit bien gardée, il se contenta de prendre les îles Islandiques de *Talas*, *Broas*, *Iscant*, *Trans*, *Mimant*, *Damberc* & *Bressa*. Il fit construire un fort dans celle de Bressa,

dont il donna le gouvernement à Nicolas Zeni; & lui ayant laissé quelques vaisseaux, il s'en retourna à Frislande.

Dès le printemps suivant, Nicolas Zeni équipa trois vaisseaux, dans le dessein d'aller découvrir de nouveaux pays; & s'étant mis en mer au mois de Juillet, il aborda au Groenland, à l'endroit où étoient bâtis le monastère & l'église de Saint Thomas, desservie par des Frères Prêcheurs. Ne pouvant supporter la rigueur du froid de ce climat, & y étant tombé malade, il revint à l'île de Frislande, où il mourut bientôt après.

Marc-Antoine succéda à son frère dans ses richesses & ses dignités: il vouloit retourner à Venise, mais Zichini le retint, & l'engagea à faire avec lui une expédition dans l'île d'Estotiland. Il y avoit vingt-six ans que des pêcheurs Frislandois avoient été poussés par une tempête jusqu'à cette île, qui est à plus de 1000 milles à l'ouest de Frislande: il n'en étoit revenu qu'un seul à Frislande, & c'est sur le rapport qu'il avoit fait de cette île, que Zichini avoit résolu d'y aller. (On trouve ici, dans la relation, le récit de ce qui étoit arrivé à ces pêcheurs, & les noms de quelques autres terres nouvelles où ils avoient abordé; mais je passe sur ces détails, tant pour abréger, que parce qu'ils ne sont fondés que sur le rapport d'un seul homme, & n'inspirent pas le même degré de confiance que le récit des expéditions des Zeni).

Zichini se mit en mer avec une armée assez considérable, & fit route à l'ouest. Après avoir dépassé quelques îles dépendantes de Frislande, & quelques sirtes ou bas-fonds, on aborda à *Ledova*, où l'on resta sept jours pour compléter les provisions nécessaires. On en partit le 1.er Juillet, & on navigua d'abord avec le vent en poupe; on essuya ensuite une tempête qui dura huit jours, & on fut poussé vers une île qu'on ne connoissoit pas. Les habitans, qui accoururent sur le rivage, firent entendre à Zichini, que leur île s'appeloit *Icarie*, & leur Roi, *Icare*, comme tous ses prédécesseurs, & qu'ils descendoient, à ce qu'ils

croyoient, d'un roi d'Écoſſe, qui les avoit menés-là. Ils les prièrent de ne point deſcendre dans leur île, parce que c'étoit une de leurs loix de n'y point laiſſer aborder d'étrangers: ils lui offrirent en même temps de recevoir parmi eux, s'il le vouloit, un homme de ſon équipage, qui leur ſerviroit d'interprète, comme ils en avoient déjà dix de différentes nations, & qui ſeroit traité comme un de leurs concitoyens. Zichini peu ſatisfait de cette réception, voulut deſcendre à terre, mais il ne put en venir à bout, & il fut contraint de paſſer outre.

Il courut de-là ſix jours à l'oueſt avec un vent favorable; le vent ayant enſuite paſſé au ſud, on navigua encore quatre jours & on découvrit enfin la terre. On trouva que ce n'étoit qu'une île, aſſez belle à la vérité, mais habitée par le peuple le plus ſauvage du monde, d'une petite taille, & ſi timide, que d'abord qu'ils voyoient quelqu'un, ils ſe retiroient dans des cavernes. On appela le port où l'on avoit abordé, port de *Trin;* & un cap voiſin, cap de *Trin* *.

Zichini avoit réſolu de bâtir une ville dans cet endroit & d'y laiſſer une colonie. Une partie de ſon équipage paroiſſant mécontente & demandant à s'en retourner, il les renvoya ſous la conduite de Marc-Antoine Zeni, qui fut chargé de cette commiſſion bien malgré lui. Marc-Antoine, pour ſon retour, tira droit à l'eſt, & courut vingt jours dans cette direction ſans voir la terre; il porta enſuite vers le ſud, & cinq jours après il ſe trouva à l'île de *Neome,* ce qui lui fit connoître qu'il avoit dépaſſé l'Iſlande. Ayant pris dans cette île qui étoit ſoumiſe à Zichini, les rafraîchiſſemens dont il avoit beſoin, il en partit & arriva trois jours après à Friſlande.

Telles ſont les circonſtances principales de la relation

* Dans un petit vocabulaire de la langue Cambrique, ou du pays de Galles, que Laët a inſéré dans ſes Obſervations ſur l'origine des Américains, on trouve le mot *Trwyn*, en correſpondance avec celui de *Naſus, Nez*, qui eſt ſouvent employé pour déſigner un cap.

des

des Zeni, & celles qui me paroissent propres à faire reconnoître l'île de Frislande. J'ajouterai ici, d'après les remarques de Ramusio, sur cette relation, que tous ces détails sont tirés des lettres de Nicolas Zeni à son frère Marc-Antoine, & de celles de Marc-Antoine à leur autre frère Charles. Après avoir été conservées soigneusement dans la famille, elles furent publiées dans la suite par un Seigneur de cette famille, qui avertit en même temps qu'il en avoit eu beaucoup d'autres; mais que ces lettres & mémoires lui étant tombés entre les mains, pendant qu'il étoit jeune, il les avoit déchirés, ne sachant pas ce que c'étoit. On voit dans la relation le commencement d'une lettre de Marc-Antoine à son frère Charles, dans laquelle il lui mandoit que, pour ce qu'il souhaitoit de savoir touchant les mœurs des habitans & les animaux de ces pays-là, il en avoit composé un livre qu'il espéroit porter avec lui; que dans ce livre, il avoit traité de la situation des pays, des loix & des coutumes de *Frislande*, d'*Islande*, d'*Eslande*, du royaume de *Norwège*, d'*Estotiland* & de *Drogium*; qu'il avoit écrit la vie de son frère Nicolas, les terres par lui découvertes, & les affaires du Groenland; qu'il avoit aussi écrit la vie & les expéditions de Zichini, où l'on verroit la découverte des deux côtes du Groenland, & les villes qu'il avoit bâties par-tout; qu'enfin il espéroit lui dire de vive voix ce qui manqueroit à son livre. Celui des Zeni qui a mis ces lettres au jour, annonce encore qu'il a trouvé parmi ces lettres & mémoires, une ancienne carte à naviguer, toute gâtée & délabrée de vieillesse; qu'il a été assez heureux pour pouvoir en faire une copie, & qu'il la publie, afin qu'on entende mieux les choses qu'il rapporte.

Je dois avertir, en finissant ce précis de la relation, qu'en passant sous silence plusieurs particularités, dont quelques-unes ont paru peu vraisemblables & ont excité la critique, je n'ai point cherché à éviter les objections, mais seulement à abréger un récit qui pouvoit paroître déplacé ici, mais qui étoit nécessaire pour l'intelligence de la suite

de ce Mémoire. On ſait au reſte, que les premiers qui ont parlé des pays inconnus avant eux, comme du nouveau Mexique, de la Guyane, &c. en ont dit des choſes fort extraordinaires, & que cela n'empêche pas qu'il y ait un nouveau Mexique, une Guyane, &c.

Je vais maintenant expoſer les conſéquences que je crois pouvoir déduire de la relation & de la carte des Zeni, & qui me paroiſſent des données ſuffiſantes pour réſoudre la queſtion qui nous occupe. Je commence par la relation & par les rapports qu'on y voit indiqués entre l'île de Friſlande & les autres terres voiſines, telles que la Norvège, l'Écoſſe, les îles de Schetland, l'Eſtotiland & l'Iſlande.

1.° Il eſt dit que l'île de Friſlande étoit poſſédée par les rois de Norvège, lorſque Nicolas Zeni y aborda en 1380. On connoît, par l'hiſtoire, quelles ont été dans tous les temps les poſſeſſions des Norvégiens au-dehors de la Norvège: ce ſont le Groenland, l'Iſlande, les îles de Fer-oë, de Schetland & les Orcades. Les îles de Schetland & les Orcades ont paſſé ſous la domination des rois d'Écoſſe, par le mariage de Marguerite, fille de Chriſtiern I, roi de Danemarck, avec James III, roi d'Écoſſe; mais toutes les autres ſont reſtées au pouvoir des rois de Norvège & de Danemarck, juſqu'à ce jour. Or, il eſt à remarquer que les îles de *Fer-oë*, qui ſont voiſines de Schetland, & pour le moins auſſi conſidérables qu'elles, ne ſont ici nommées nulle part, ni dans la relation ni ſur la carte des Zeni. Zichini, après avoir fait la conquête de Friſlande, va attaquer l'Eſtlande & l'Iſlande, parce qu'elles appartenoient auſſi au roi de Norvège: il devoit, par la même raiſon, attaquer pareillement les Fer-oë; qui ſe trouvoient d'ailleurs ſur ſa route, entre l'Eſtlande & l'Iſlande; cependant il n'en eſt pas fait la moindre mention dans cette circonſtance ni ailleurs. Ce ſilence de la relation ſur des îles auſſi étendues que celles de Fer-oë, cette omiſſion, dans la carte ſur-tout, où elle eſt un défaut eſſentiel, ne peuvent ſe concevoir, qu'en ſuppoſant que les îles de Fer-oë ſeroient la même

terre que l'île de Frislande. Je me borne ici à annoncer ce premier résultat, & à le présenter seulement comme une des données de la question. Avant que d'aller plus loin, je crois devoir prévenir les doutes & les objections que pourroit faire naître l'entreprise de Zichini contre les rois de Norvège. On concevra sans peine comment ce Prince a pu tenter de se soustraire à leur domination, & de s'ériger lui-même en souverain, si on se rappelle qu'en l'an 1348, il arriva une grande peste, connue sous le nom de *peste noire*, & qui enleva une grande partie des habitans du Nord. La Norvège & le Danemarck furent, pour ainsi dire, épuisés; on vit disparoître tout-à-la-fois les marchands & les matelots qui composoient les compagnies du Groenland dans ces deux royaumes; la navigation & le commerce furent interrompus, & les Colonies négligées & presque abandonnées. On sait encore qu'à la suite de cette peste, le Groenland a été perdu pendant long-temps, parce qu'on avoit cessé d'y envoyer.

2.° En parlant des possessions de Zichini, à l'époque de l'arrivée des Vénitiens, il est dit qu'outre les îles de Portland, situées au sud & près de Frislande, il étoit encore seigneur du duché de Sorand, situé dans la terre & du côté qui regarde l'Écosse, *Fra terra*, &c. *posta d'alla banda verso Scotia*. Il est visible par ces expressions, que le duché de Sorand, qui regarde l'Écosse, n'en peut être éloigné de 300 lieues, ni situé près du Groenland, où les Géographes l'ont placé, & où les navigateurs l'ont cherché en vain. La relation nous indique ici une proximité entre le duché de Sorand & l'Écosse, ou du moins un intervalle peu considérable & qui n'empêche pas la communication. Or, ce duché de Sorand fait partie de l'île de Frislande, comme on le voit par la carte des Zeni, & comme l'annonce aussi la relation, dont il convient de remarquer ici les expressions & l'exactitude: elle nous dit que le duché de Sorand est dans la terre *Fra terra*, & cela signifie qu'il est situé dans l'île principale ou la

grande terre de Frislande. On sait que Pomona ou l'île principale des Orcades, se nomme encore *Mainland* ou Terre-ferme, & que la principale des îles de Schetland se nomme seulement *Mainland*; on pourroit même conclure de cette dénomination singulière, employée dans la relation, que la terre de Frislande auroit été un composé de plusieurs îles, comme les Orcades & les Schetland; & que ses habitans auroient eu la même langue ou la même manière de désigner les objets, que ceux de ces dernières îles: & à tous ces traits, on seroit tenté de reconnoître la terre de Frislande dans la terre de Fer-oë, qui est un composé de plusieurs îles, comme les Orcades & les Schetland, qui a été originairement peuplée, comme ces autres îles, par des Norvégiens, & qui d'ailleurs n'est pas fort éloignée de l'Écosse.

3.° La relation nous dit que l'*Estlande* est située entre Frislande & la Norvège: on ne peut disconvenir que cette Estlande ne soit les îles de Schetland, que l'on nomme autrement dans le pays, *Hitland* ou *Hetland*; or, si nous avions à indiquer aujourd'hui la situation des îles de Schetland, nous dirions, en consultant les cartes les plus exactes, que ces îles sont situées entre les îles de Fer-oë & la Norvège. Ce rapport de Frislande avec l'Estlande, nous indique donc encore une proximité entre les deux terres, telle qu'elle existe entre les Fer-oë & les Schetland, & telle qu'il faut la supposer aussi pour concevoir la marche de Zichini dans ses courses sur les possessions du roi de Norvège: on a vu que c'est par la terre d'Estlande qu'il a commencé ses courses, ce qui annonce que c'étoit la terre la plus proche de Frislande. C'est sur un rapport semblable, que le savant auteur de l'*Histoire des Hommes*, a reconnu la vraie position de l'ancienne *Memphis*, capitale de l'Égypte. Pline avoit dit que les pyramides étoient situées entre Memphis & le Delta, & l'Historien en a conclu avec raison que Memphis étoit située au sud des pyramides; tandis que des voyageurs qui avoient été

ſur les lieux, la plaçoient directement à l'oueſt des mêmes pyramides.

4.° La diſtance de Friſlande aux côtes de l'Amérique, telle qu'on peut l'eſtimer d'après la relation, tendroit à éloigner cette île de la poſition que les Géographes lui avoient aſſignée près du Groenland, & à la rapprocher des côtes de l'Europe. Suivant le rapport du pêcheur Friſlandois qu'on dit avoir abordé à la côte d'Eſtotiland, aujourd'hui le Labrador, il y a plus de 1000 milles de diſtance entre les deux terres; & ſuivant le rapport de Marc-Antoine Zeni, ſur ſon retour du port de *Trin* qu'on voit ſitué, ſur la carte, à l'extrémité ſud du Groenland, vers le cap Farwell, l'île de Friſlande ſeroit éloignée de la pointe ſud du Groenland, du côté de l'eſt, de plus de vingt jours de navigation. La première diſtance, celle de 1000 milles, eſt évaluée dans la relation même à 200 lieues, & ce ſont ces 200 lieues qu'il faut ſeulement conſidérer ici. Il eſt probable que c'eſt en lieues & non en milles, que le pêcheur Friſlandois aura indiqué cette diſtance, & que l'évaluation en milles n'aura été ajoutée que dans la ſuite, & relativement à l'uſage reçu en Italie, de compter les eſpaces par milles: or, ces 200 lieues, qu'on doit réputer lieues Norvégiennes ou Danoiſes, répondroient à environ 350 de nos lieues marines, & l'île de Friſlande ſeroit éloignée d'autant & même plus des côtes de l'Eſtotiland. Il s'en faut encore de 150 lieues que cette diſtance n'égale celle qui nous eſt indiquée par les meilleures cartes, entre les côtes du Labrador & les îles de Fer-oë; mais le pêcheur Friſlandois peut n'avoir conſervé qu'une eſtime fort vague de ſa route, & il peut ſe faire auſſi qu'il ait indiqué à Zichini une diſtance au-deſſous de la véritable, pour le déterminer plus facilement à aller reconnoître cette terre.

A l'égard de la diſtance qu'on peut déduire de la navigation de Marc-Antoine à ſon retour du port de *Trin*, elle ſeroit de 400 de nos lieues marines, en ſuppoſant ſeulement 20 lieues par jour, & Friſlande ſeroit éloignée

d'autant de la côte sud du Groenland. La carte des mers du Nord, de M.[rs] de Verdun, de Borda & Pingré, n'en donne que 380 du cap Farewel aux îles de Fer-oë. On peut au moins conclure de ces distances, que Frislande doit être plus éloignée du Groenland qu'on ne l'avoit cru, & qu'elle se rapproche assez de la position des îles de Fer-oë.

5.° Il résulte de la même navigation de Marc-Antoine Zeni à son retour du port de *Trin*, que l'île de Frislande étoit plus orientale que l'Islande. Après avoir couru pendant vingt jours à l'est, & ensuite cinq jours vers le sud, il aborda, suivant la relation, à l'île de Neome, & il reconnut par-là qu'il avoit dépassé l'Islande. De l'île de Neome, il se rendit en trois jours à Frislande; ainsi nous nous retrouvons encore ici ramenés vers les îles de Fer-oë, & par une circonstance qui ne laisse aucun lieu de douter.

On voit par la carte des îles de Fer-oë, que je joins ici, que ces îles sont remplies de golfes, comme l'étoit l'île de Frislande, suivant la relation. On sait que la mer, autour de ces îles, étoit autrefois extrêmement abondante en poissons; que dans tous les temps, la pêche a été la principale occupation de leurs habitans, & qu'aujourd'hui encore leur principal commerce consiste en poissons *secs*: c'est donc encore une terre semblable à celle de Frislande, où, comme on l'a vu ci-devant, les Anglois, les Flamands, les Écossois, les Danois & les Norvégiens alloient faire leurs provisions de poissons. On sait enfin que la navigation est aussi dangereuse autour des îles de Fer-oë, qu'elle l'étoit, suivant la relation, autour de Frislande. On pourroit trouver encore, dans les autres circonstances de cette relation, beaucoup d'autres traits de ressemblance assez frappans; mais il me suffira, je crois, d'ajouter ici ceux que nous présente la carte de Frislande, comparée à la Carte des îles de Fer-oë.

Je remarque d'abord que l'extrémité sud de l'île de Frislande se trouve placée, sur la carte originale & sur

toutes les cartes qui font mention de cette île, à la même latitude que l'extrémité ſud des îles de Fer-oë. La pointe ſud de ces îles eſt par $61^d\ 17'\ 45''$ de latitude, ſuivant les obſervations de M.rs de Verdun, de Borda & Pingré; & la pointe ſud de Friſlande eſt par 61 degrés moins quelques minutes ſur les anciennes cartes. On ne cherchera point à juſtifier la différence qui paroît entre ces deux réſultats, parce qu'on retrouve par-tout une différence ſemblable entre les nouvelles & les anciennes obſervations. Le rapport de latitude, que nous trouvons ici, peut donc être régardé comme aſſez exact, & venir à l'appui des autres preuves qui ſe ſont offertes d'ailleurs.

Si l'on compare maintenant les détails de la carte de Friſlande, avec ceux de la carte de Fer-oë, on aperçoit les principaux caps, des golfes, des îles & autres objets remarquables, placés dans le même ordre & ſuivant les mêmes directions, dans l'une & dans l'autre carte. On y voit auſſi un aſſez grand nombre de dénominations ſemblables, & dans les mêmes poſitions, comme ſi l'une de ces cartes eût été dreſſée d'après une deſcription groſſière de l'autre.

On remarque d'abord une petite île, ſous le nom de *Monaco,* à l'extrémité ſud de Friſlande, & une île ſemblable, avec le nom de *Munck* ou *le Moine,* à l'extrémité ſud des Fer-oë; c'eſt un haut rocher rond, & remarquable, tant à cauſe des écueils qui ſont aux environs, que parce que c'eſt un point de reconnoiſſance : il y a auprès ſix autres rochers qui s'élèvent tant ſoit peu au-deſſus de l'eau, & un courant ou ras de marée fort dangereux.

À la partie du nord-eſt de Friſlande, on voit deux petites îles nommées l'une *Ibini*, & l'autre *Piglu;* on trouve de même à l'extrémité nord-eſt des Fer-oë une petite île nommée *Biſpen* ou l'Évêque, & une autre à côté, nommée *Fugl-oë. Biſpen* eſt, comme Monaco, un haut rocher rond, & un point de reconnoiſſance pour les navigateurs: *Fugl-oë* eſt la première des îles de Fer-oë du côté du Nord-eſt, &

n'eſt éloignée de Biſpen que d'un jet de pierre, ou d'une portée de fuſil au plus.

La partie du nord-oueſt de Friſlande ſe termine par un cap nommé *Spagia*, & la même partie dans les Fer-oë ſe termine par un îlot nommé *Stachen*. À la ſuite de *Spagia*, la côte ſeptentrionale de Friſlande nous préſente une ſuite d'objets ſous les noms de *Aqua*, *Andefort*, *Forali*, *Logoſt*, *Vadin*, *Rane* & *Rovea;* & on trouve à la ſuite de Stachen, ſur la côte nord des Fer-oë, les noms de *Funding*, *Andefort-Fugle*, *Goſte Kladi*, *Arne* & *Lamhau*, qui ſe ſuivent dans le même ordre que les précédens, & entre des golfes, comme ſur la carte de Friſlande.

Par le travers, ou vis-à-vis les golfes d'Andefort, Forali & Logoſt, on voit ſur la carte de Friſlande une aſſez grande île nommée *Duilo;* & ſur la carte des Fer-oë, par le travers des golfes Anding-fiord, Fugle-fiord & Goſte-fiord, on voit un groupe de quatre îles qui ſemblent ne former qu'une même terre, n'étant ſéparées que par de très-petits détroits, & qui ne forment qu'une même province dans l'adminiſtration civile & eccléſiaſtique du pays. Ces îles ſont *Vider-oë* ou *Vid-oë*, *Cun-oë*, *Bord-oë* & *Suin-oë;* on les nomme en général *Norder-oë*, îles du nord, & c'eſt la paroiſſe de *Vid-oë* qui eſt le chef-lieu ou la capitale de cette province. Si ces îles nous repréſentent celle de *Duilo* de la terre de Friſlande, comme il y a tout lieu de le penſer, il eſt auſſi très-probable qu'elles nous repréſenteront la *Thulé* des anciens, que l'on a placée ſucceſſivement dans l'Iſlande, dans les Schetland & dans la Norvège; cette conjecture eſt au moins fondée ſur la ſituation de ces îles, conforme à la deſcription qu'on a faite de Thulé, ſur l'analogie du nom de *Duilo* à celui de *Thulé*, & ſur la ſignification du mot de *Thule* qu'on a traduit juſqu'ici par extrémité, fin, ou dernière terre.

Sur la côte orientale de Friſlande, on voit une île nommée *Stremes*, que ſon nom & ſa poſition au-devant d'un grand golfe peuvent aiſément faire reconnoître ſur la côte de l'eſt des

de Fer-oë: c'eſt ſans doute l'île de *Nols-oë* qu'on voit au-devant du grand golfe de *Strom Fleſerne*, connu par ſes courans, & qui diviſe aujourd'hui le Mainland ou la terre ferme de Fer-oë en deux parties, dont l'une en a pris, comme le golfe, le nom de *Strom-oë*.

La côte occidentale de Friſlande nous préſente un cap *Bouet* dans la partie la plus avancée à l'oueſt; au ſud de ce cap ſont deux grands golfes nommés *Nordero* & *Sudero colſo*, & vis-à-vis le dernier de ces golfes ſont deux îles nommées *Ledeuc* ou *Ledova* & *Ilove*. On reconnoîtra ſans peine ces différens objets à la côte occidentale des Fer-oë, par ſa configuration & les dénominations qu'on y trouve. Le cap *Bouet* répond à *Myg-nes*, qui eſt une petite île la plus avancée à l'oueſt, & dont le nom même indique un cap. Les golfes *Nordero* & *Sudero* ſont les deux ouvertures des détroits qui s'avancent l'un au nord & l'autre au ſud, & qui ſéparent l'île de *Strom-oë* de celles de *Wag-oë* & de *Sand-oë*: les îles *Ledova* & *Ilofe* ſeront celles de *Heſt-oë* & de *Colter*. On trouve ſur la carte des Fer-oë un golfe nommé *Suderoë-fiord*, qui ſépare l'île de Portland, au nord, de celle de *Sku-oë*; mais ce n'eſt pas là le golfe *Sudero* de la carte de Friſlande, au-devant duquel il faut trouver trois îles. Le véritable *Sudero colſo* eſt le détroit qui ſépare Strom-oë de Sand-oë, comme le *Nordero colſo* eſt le détroit qui ſépare Strom-oë de Wag-oë: & on ne ſera pas ſurpris de voir dans l'ancienne carte le nom de *golfe*, au lieu de celui de *détroit*. On ne voit pas ſur la carte des Fer-oë ce grand nombre de petites îles qu'on trouve ſur la carte de Friſlande près de Nordero colſo; ce ne ſont vraiſemblablement que des petites roches, ou ces écueils qui rendoient la navigation ſi dangereuſe, comme on l'a vu dans la relation.

D'après ces premières reconnoiſſances, qui ſont aſſez évidentes par elles-mêmes, & qui confirment de plus en plus celles que la relation nous avoit données, il n'eſt plus guère permis de douter que les îles de Fer-oë ne

ſoient l'ancienne Friſlande. Je me bornerai, pour le reſte des détails de Friſlande, à en faire l'application ſur la carte des îles de Fer-oë, d'autant plus que les rapports des noms ſont moins ſenſibles; ſoit que la copie de la carte de Friſlande ait altéré & défiguré une partie de ſes noms, comme il y a lieu de le penſer, ſoit que la carte des Fer-oë ne nous fourniſſe pas tous les détails de ces îles. J'ajouterai ſeulement ici, que la ville de *Friſlande* peut ſe rapporter à la poſition de *King's-haun*, port ſitué comme Friſlande, dans la partie du S. E. de l'île & ſur un golfe qui en a pris le nom de *Scaale-fiord;* que *Godmec*, une des principales villes de Friſlande, répond à la poſition de *Thors-hawn*, qui eſt depuis très-long-temps le chef-lieu ou la capitale de toutes les îles de Fer-oë, & qui eſt auſſi le port le plus fréquenté pour le commerce de poiſſons; que *Sorand*, duché de l'ancienne Friſlande, peut être repréſenté par le lieu nommé *Scarvenes*, ſitué à la côte ſud de l'île de Sand-oë, & dans la partie de la grande terre qui regarde l'Écoſſe; & qu'enfin les îles de *Portland*, poſſédées par Zichini, & ſituées au ſud & près de Friſlande, peuvent être repréſentées par l'île de *Suder-oë*, qui eſt, comme l'indique ſon nom, la plus ſud des Fer-oë, & qui eſt auſſi l'une des plus riches & des plus peuplées de toutes ces îles. On remarquera que cette île eſt diviſée en trois preſqu'îles, par des golfes qui s'avancent dans les terres, & que la carte des Fer-oë nous donne même les noms des deux iſthmes: ainſi ces preſqu'îles peuvent être priſes avec quelque fondement pour les îles de Portland.

On pourroit déduire encore une nouvelle preuve, en faveur de l'opinion qui réſulte de ces recherches, du rapport qu'il nous paroît y avoir entre le nom de *Friſlande* & celui de *Fer-oë*. Lucas Jacobſon Debes, qui a écrit en danois une deſcription des îles de Fer-oë, dans le pays même & dans la ville de Thors-hawn, en 1670, nous expoſe les différentes opinions des Savans ſur

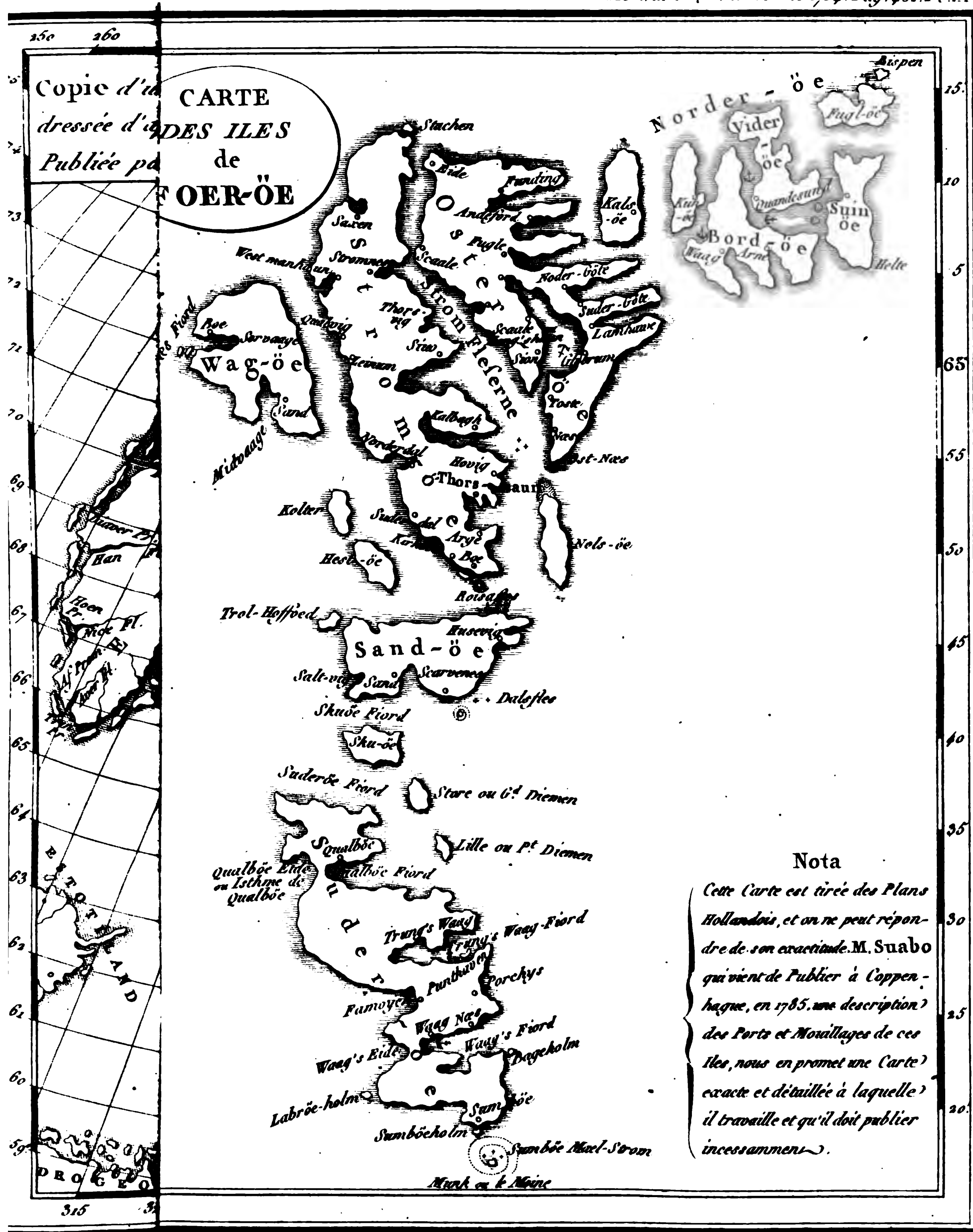
l'origine du nom de ces îles. Son opinion, entr'autres, & celle qui m'a paru la plus probable, est que les îles de *Fer-oë* ont été ainsi nommées du mot *fare*, qui, dans l'ancienne langue de ces îles, signifie la même chose que le mot *ferrie*, en anglois, c'est-à-dire, un passage d'eau; c'est à ce mot, sans doute, qu'il faut aussi rapporter l'origine des noms de *bosphore*, de *far* & de *fretum*, par lesquels on a désigné les détroits. Les îles de Fer-oë sont, comme on le voit par la carte, pleines de golfes, de détroits, de passages d'eau; c'est vraiment le pays des détroits. Or il est visible qu'on a pu les appeler *Ferrie-land*, au lieu de *Fer-oë*, c'est-à-dire, *terre*, au lieu d'*îles*, par la même raison qu'on a appelé *Schetland* ou *Hitland*, un autre corps d'îles semblable à celles-ci, & qui en est assez proche. De Ferrieland à Frislande il n'y a pas, ce me semble, de différence assez considérable, pour ne pas reconnoître l'un de ces noms dans l'autre.

La seule difficulté qui pourroit peut-être arrêter encore & empêcher de reconnoître l'île de Frislande à tant de marques, c'est la manière dont elle est figurée sur la carte ancienne, qui nous la représente comme une grande terre, avec quelques petites îles seulement aux environs, tandis que Fer-oë est une terre découpée & divisée en dix-sept îles. Pour écarter cet obstacle, il suffira de faire remarquer que les *Schetland*, qui sont une autre terre découpée & divisée comme celle de Fer-oë, sont également représentées dans la même carte, comme un grande terre, avec quelques îles autour. On pourroit citer plusieurs exemples d'erreurs semblables; Terre-neuve, entr'autres, est représentée sur les anciennes cartes, bien différente de ce que nous la connoissons aujourd'hui; elle y est divisée & coupée en plusieurs îles, tandis qu'elle n'en forme qu'une grande. C'est sans doute le peu de largeur des golfes & des détroits de Fer-oë, qui aura fait regarder & représenter la plupart de ces îles comme une terre continue; de même que c'est la grande étendue des golfes de Terre-neuve qui

aura donné lieu de diviſer cette terre en pluſieurs îles. J'ai diſtingué ſur la carte des îles de Fer-oë, celles de ces îles, dont l'enſemble me paroît devoir compoſer la grande terre de Friſlande; ce ſont *Strom-oë*, *Oſtr-oë*, *Wag-oë*, avec les îlots de Myg-nès & *Sand-oë*.

Après avoir reconnu l'île de *Friſlande* par tous les moyens que je viens d'expoſer, j'ai recherché quels pouvoient être les fondemens de la poſition que les géographes lui avoient aſſignée, & voici ce que j'ai trouvé de plus vraiſemblable à ce ſujet. Il eſt dit, dans la relation du ſecond voyage de Forbisher, que vingt-ſix jours après être ſorti des Orcades, il s'approcha de l'île de *Friſlande*, dont la côte, ſuivant cette relation, eſt pleine de montagnes pointues & très-élevées; qu'après l'avoir côtoyée quatre jours, il la quitta, & arriva huit jours après à l'endroit où il avoit abordé à ſon premier voyage, c'eſt-à-dire, au Groenland. C'eſt ſans doute d'après ce paſſage de Forbisher, que l'on aura placé l'île de Friſlande du côté du Groenland; mais il étoit aiſé de reconnoître que la Friſlande de Forbisher, ne pouvoit être celle des Zeni. Forbisher ayant rencontré ſur ſa route une île qu'il ne connoiſſoit pas, l'aura priſe pour la Friſlande des Zeni, dont la découverte étoit encore récente de ſon temps, & il l'aura nommée *Friſlande*, ſans s'embarraſſer beaucoup ſi les choſes convenoient ou non. C'eſt ainſi que ſe ſont établies pluſieurs erreurs en géographie; & lorſqu'elles ſont, comme celle-ci, la ſuite des obſervations d'un homme célèbre, elles s'accréditent & ſe perpétuent pendant des ſiècles.

S'il paroît maintenant démontré que l'île de Friſlande n'eſt point fabuleuſe ni ſubmergée, comme on l'avoit cru juſqu'à préſent, il s'enſuit néceſſairement que la relation des Zeni n'eſt point un roman, mais un monument précieux, d'où l'on peut tirer des connoiſſances utiles. On peut en conclure, entr'autres choſes, que le nouveau Groenland auroit été connu avant la découverte qui en a


CARTE
DES ILES
de
FOER-ÖE
Copie d'u
dressée d'a
Publiée pa
Norder-öe
Vider öe
Fugl-öe
Bord-öe
Suin öe
Kals-öe
Oster-öe
Stromöe
Wag-öe
Stromflesserne
Stachen
Eide
Funding
Andeford
Fugle
Scaale
Noder-Göte
Suder-Göte
Lamhave
Tolftrum
Toste
Naes
Ost-Naes
Saxen
West manhaun
Stromnes
Qualvig
Thors vig
Siaa
Leinum
Kalbagh
Norderdal
Hovig
Thors-haun
Suderdal
Kirkeb
Arge
Boe
Sørvaage
Sand
Midvaage
Koller
Hest-öe
Nols-öe
Roisafiar
Trol-Hoffoed
Sand-öe
Husevig
Salt-vig
Sand
Scarvenes
Dalefles
Skuöe Fiord
Sku-öe
Suderöe Fiord
Store ou Gd Diemen
Lille ou Pt Diemen
Qualböe
Qualböe Eide ou Isthme de Qualböe
Qualböe Fiord
Suderöe
Trangs Waag
Trang's Waag Fiord
Punthaven
Porchys
Famoye
Waag Naes
Waag's Fiord
Waag's Eide
Dageholm
Labröe-holm
Sumböe
Sumböeholm
Sumböe Mael-Strom
Munk ou le Moine
Nota
Cette Carte est tirée des Plans Hollandois, et on ne peut répondre de son exactitude. M. Suabo qui vient de Publier à Coppenhague, en 1785, une description des Ports et Mouillages de ces Iles, nous en promet une Carte exacte et détaillée à laquelle il travaille et qu'il doit publier incessamment.

été faite par les Danois; que l'Amérique auroit aussi été connue & même habitée par des Européens, avant sa découverte par Christophe Colomb; que l'histoire des colonies qu'on dit y avoir passé du pays de Galles l'an 1170, sous la conduite de Madoc, un des fils d'Owen Guineth, roi de ce pays, pourroit paroître assez fondée; & que la découverte de l'île d'*Icare*, qui nous est encore inconnue, pourroit être très-intéressante, & fourniroit peut-être de nouvelles lumières. Il résulteroit encore de la carte des Zeni, que la *Thulé* des anciens seroit plutôt l'île de Frislande ou les Fer-oë, qu'aucun des autres pays auxquels on l'a rapportée successivement.



SUITE DU MÉMOIRE
SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS,

Par M. le Marquis DE CONDORCET.

ARTICLE. VI.

*Application des principes de l'*article précédent *à quelques questions de critique.*

I.

J'AI exposé, dans l'*article précédent*, une méthode d'exprimer la probabilité des faits extraordinaires, en ayant égard à celle des témoignages qui les attestent, & à la probabilité propre de ces faits, qui, malgré la très-grande probabilité que produiroient les mêmes témoignages pour un fait ordinaire, peut alors devenir très-petite & fort au-dessous de $\frac{1}{2}$.

II.

J'ai observé en même-temps qu'il ne falloit pas dans ce cas entendre, par la probabilité propre d'un fait, le rapport du nombre des combinaisons où il a lieu, avec le nombre total des combinaisons. Par exemple, si d'un jeu de dix cartes on en a tiré une, & qu'un témoin me dise que c'est telle carte en particulier, la probabilité propre de ce fait, qu'il s'agit de comparer avec la probabilité qui naît du témoignage, n'est pas la probabilité de tirer cette carte, qui seroit $\frac{1}{10}$, mais la probabilité d'amener cette carte plutôt que telle autre carte déterminée en particulier; & comme toutes ces probabilités sont égales, la probabilité propre est ici $\frac{1}{2}$.

Cette distinction étoit nécessaire, & elle suffit pour

expliquer la contrariété d'opinions entre deux claſſes de philoſophes. Les uns ne peuvent ſe perſuader que les mêmes témoignages puiſſent produire, pour un fait extraordinaire, une probabilité égale à celle qu'ils produiſent pour un fait ordinaire; & que, par exemple, ſi je crois un homme de bon ſens qui me dit qu'une femme eſt accouchée d'un garçon, je duſſe le croire également s'il me diſoit qu'elle eſt accouchée de douze.

Les autres au contraire ſont convaincus que les témoignages conſervent toute leur force, pour les faits extraordinaires & très-peu probables, & ils ſont frappés de cette obſervation, que ſi on tire une loterie de 100,000 billets, & qu'un homme, digne de foi, diſe que le numéro 256, par exemple, a eu le premier lot, perſonne ne doutera de ſon témoignage, quoiqu'il y ait 99,999 à parier contre 1 que cet évènement n'eſt pas arrivé.

Or, au moyen de l'obſervation précédente, on voit que dans le ſecond cas la probabilité propre du fait étant $\frac{1}{2}$, le témoignage conſerve toute ſa force, au lieu que dans le premier, cette probabilité étant très-petite, réduit preſque à rien celle du témoignage.

III.

J'ai propoſé enſuite de prendre, pour la probabilité propre du fait, le rapport du nombre de combinaiſons qui donnent ce fait, ou un fait ſemblable au nombre total des combinaiſons.

Ainſi, par exemple, dans le cas où on tire une carte d'un jeu de dix cartes, le nombre des combinaiſons où l'on tire une carte déterminée quelconque eſt un; celui des combinaiſons où l'on tire une autre carte déterminée eſt auſſi un; donc $\frac{1}{2}$ exprimera la probabilité propre.

Si on me dit qu'on a tiré deux fois de ſuite la même carte, alors on trouvera qu'il n'y a que dix combinaiſons qui donnent deux fois une même carte, & quatre-vingt-dix qui donnent deux cartes différentes: la probabilité

propre du fait n'eſt donc que $\frac{2}{10}$, & celle du témoignage commence à devenir plus foible.

Mais je crois devoir abandonner cette manière de conſidérer la queſtion, 1.° parce qu'elle me paroît trop hypothétique; 2.° parce que ſouvent cette comparaiſon d'évènemens ſemblables ſeroit difficile à faire, ou, ce qui eſt encore pis, ne ſe feroit que d'après des ſuppoſitions arbitraires; 3.° parce qu'en l'appliquant à des exemples, elle conduit à des réſultats trop éloignés de ceux que donneroit la raiſon commune.

I V.

J'en ai donc cherché une autre, & il m'a paru plus exact de prendre, pour probabilité propre d'un évènement, le rapport de la probabilité de cet évènement priſe dans le ſens ordinaire, avec la probabilité moyenne de tous les autres évènemens.

Ainſi, dans l'exemple précédent, nous avons dix combinaiſons où l'on tire deux cartes ſemblables, & quarante-cinq combinaiſons où l'on tire deux cartes différentes. La probabilité de tirer deux cartes différentes déterminées eſt $\frac{2}{100}$; celle de tirer deux cartes déterminées ſemblables eſt $\frac{1}{100}$. La probabilité moyenne d'un autre évènement que celui qui amène les deux cartes ſemblables données, ſera

donc $\dfrac{45 \cdot \frac{2}{100} + 9 \cdot \frac{1}{100}}{54} = \dfrac{99}{54 \cdot 100}$; celle d'amener les deux cartes déterminées ſemblables ſera $\frac{1}{100}$; donc la probabilité propre de l'évènement ſera $\frac{54}{153}$.

Suppoſons enſuite que, dans le même exemple, on cherche la probabilité propre du fait, qu'on a tiré trois fois de ſuite la même carte.

Nous avons ici trois eſpèces de faits, 1.° ceux où l'on a amené trois cartes différentes; la probabilité de chaque fait

fait déterminé de ce genre eſt $\frac{6}{1000}$, & il y en a 120; 2.° ceux où l'on tire deux fois la même carte; ces faits ſont au nombre de 90, & la probabilité de chacun eſt $\frac{3}{1000}$: 3.° ceux où l'on tire trois fois la même carte; ils ſont au nombre de 10, & la probabilité de chacun eſt $\frac{1}{1000}$. Nous avons donc $\frac{1}{1000}$ pour la probabilité du fait déterminé, & $\frac{6.120 + 3.90 + 9}{1000.219}$ pour la probabilité moyenne des autres faits. La probabilité propre du fait allégué ſera donc $\frac{219}{1218}$.

Ainſi ſuppoſons, par exemple, que la probabilité du témoignage ſoit $\frac{99}{100}$, c'eſt-à-dire, que le témoin ne ſe trompe ou ne veuille tromper qu'une fois ſur cent, on aura, d'après ſon témoignage, la probabilité $\frac{99}{100}$ ou $\frac{9,900}{10,000}$ qu'on a tiré une carte déterminée; la probabilité $\frac{9,818}{10,000}$ qu'on a tiré deux fois la même carte; & la probabilité $\frac{9,540}{10,000}$ qu'on l'a tirée trois fois.

Suppoſons encore que l'obſervation ait conſtaté que, ſur vingt millions d'hommes, un ſeul ait vécu 120 ans, & que la plus longue vie ait été de 130; qu'un homme me diſe que quelqu'un vient de mourir à 120 ans, & que je cherche la probabilité propre de cet évènement: je regarderai d'abord comme un fait unique, celui de vivre plus de 130 ans, fait que je ſuppoſe n'être pas arrivé; j'aurai donc 131 faits différens, dont celui de mourir à 120 ans eſt un ſeul. La probabilité de celui-ci ſera $\frac{1}{20,000,131}$; la probabilité

moyenne des 130 autres sera $\frac{20,000,130}{20,000,131.130}$; donc la probabilité propre cherchée sera $\frac{130}{20,000,260}$, ou environ $\frac{1}{15384}$.

V.

Cette méthode s'appliquera également aux évènemens indéterminés. Ainsi, en continuant le même exemple, si le témoin a dit seulement que l'on a deux fois amené la même carte, sans la nommer, alors ces dix évènemens, ayant chacun la probabilité $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{100}$ exprimera leur probabilité moyenne; $\frac{2}{100}$ exprimera de même celle des 45 autres évènemens ayant chacun la probabilité $\frac{2}{100}$: ainsi la probabilité propre de l'évènement sera $\frac{1}{3}$.

Il peut paroître singulier que la probabilité propre de l'évènement, au lieu d'être la même ici que dans le cas de l'évènement déterminé, soit sensiblement moindre, qu'elle influe différemment sur la crédibilité du témoin; qu'ainsi le même homme soit moins croyable lorsqu'il dit, en général, qu'il a vu amener deux fois de suite la même carte, que lorsqu'il dit qu'il a vu amener deux *fois de* suite telle carte en particulier. Cela vient de ce que, dans le second cas, il y a neuf autres combinaisons possibles, dont l'énonciation ne seroit pas plus probable que celle qu'il a faite, au lieu que dans le premier, toutes les autres énonciations qu'il n'a pas faites, sont plus probables; c'est que dans le premier cas c'est seulement le fait extraordinaire qu'il a énoncé; & que dans le second, il a énoncé un fait extraordinaire, par rapport à une partie des évènemens possibles, & un fait commun par rapport à une autre partie. Dans le premier, il ne s'agit que du fait extraordinaire, dans le second, il s'agit du fait extraordinaire & du fait déterminé, qu'il faut comparer à la fois à

des faits déterminés plus ordinaires, & à des faits déterminés qui lui sont semblables.

On suivra encore la même règle, s'il s'agit de faits indéterminés qui renferment plusieurs combinaisons d'une probabilité différente.

Supposons, par exemple, qu'on me dise qu'un joueur de trictrac a cinq fois de suite amené plus de dix points.

Comme nous ne considérons ici que le nombre des points, nous avons, pour chaque coup, 11 évènemens possibles; c'est-à-dire, 11 dés, depuis 2 jusqu'à 12, dont les probabilités sont $\frac{1}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{6}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{2}{36}$, & $\frac{1}{36}$, & les deux derniers sont les seuls qui montent au-dessus de 10. Cela posé, comme on ne considère ici que la valeur de la somme des points dans chaque coup, il n'y aura que $\frac{15.14.13.12.11}{1.2.3.4.5}$, ou 3003 évènemens, dont 6 seulement appartiennent à la combinaison proposée; or, comme la probabilité de ces six coups est $\frac{1}{12^5}$, on aura $\frac{1}{12^5.6}$ pour leur probabilité moyenne, & $\frac{11^5}{12^5.2997}$ sera la probabilité des autres coups: la probabilité propre de l'évènement sera donc ici $\frac{2997}{11^5.6 + 2997}$, ou $\frac{2997}{969.303}$.

VI.

De la même manière que les évènemens, qui ont une probabilité propre au-dessous de $\frac{1}{2}$, deviennent moins croyables à mesure que cette probabilité diminue, les évènemens vraisemblables en eux-mêmes, & dont la probabilité propre est au-dessus de $\frac{1}{2}$, deviennent plus croyables à mesure que cette probabilité augmente, quoiqu'attestés

par un nombre égal de témoins. C'est ainsi, par exemple, qu'un fait astronomique qui se trouveroit d'accord avec la théorie de la gravitation, seroit cru facilement sur l'assertion d'un seul Savant, même par ceux qui n'auroient pas vérifié ses calculs; tandis que, si le même Savant avoit annoncé un fait contraire à cette théorie, il auroit besoin d'une assez grande autorité, même pour que l'on crût devoir raisonnablement examiner ses calculs.

VII.

Si nous considérons maintenant deux classes d'évènemens seulement *A* & *B*, que la probabilité des évènemens *A* soit a & b, celle des évènemens *B*, a étant plus grand que b; qu'il y ait m évènemens *A*, & n évènemens *B* différens, la probabilité propre d'un évènement déterminé de la classe des *B* sera exprimée par $\frac{b.(m+n-1)}{ma+b(m+2n-2)}$: quantité qui approchera de $\frac{b}{a+b}$ si m est beaucoup plus grand que n, mais ne pourra jamais être au-dessous, & ne lui sera rigoureusement égale que lorsque $n = 1$. Elle approche beaucoup de $\frac{2b}{a+b}$, si $m = n$, & que a soit incomparablement plus grand que b; & la valeur de cette probabilité propre pourra d'ailleurs surpasser $\frac{2b}{a+b}$, mais seulement dans le cas où $n > m$, & elle aura $\frac{1}{2}$ pour sa limite lorsque $a = b$.

Supposons, par exemple, qu'un certain évènement quelconque ne soit pas arrivé à un seul individu sur cent millions d'individus de la même espèce. Alors $\frac{1}{100,000,002}$ exprimera la probabilité qu'il arrivera à un individu donné, & $\frac{100,000,001}{100,000,002}$ celle qu'il n'arrivera pas.

Si, après cela, un témoin raconte que cet évènement est arrivé à un individu déterminé, alors, comme il pouvoit également arriver à tous ceux de la même espèce, on aura pour *m* & *n* de très-grands nombres égaux entr'eux, *a* surpassera *b* incomparablement; en sorte qu'on s'écartera peu de la vérité en supposant $\frac{1}{50.000,000}$ l'expression de la probabilité propre de l'évènement.

Mais nous traiterons dans la suite plus en détail de l'application de cette méthode à la probabilité que peuvent avoir les évènemens naturels, pour ceux qui ne les ont point personnellement observés.

VIII.

Je vais maintenant essayer de faire à une question de critique l'application des principes que je viens d'établir. Newton paroît être le premier qui ait eu l'idée d'appliquer le calcul des probabilités à la critique des faits. Il propose, dans son ouvrage sur la chronologie, d'employer la connoissance de la durée moyenne des générations & des règnes, telle que l'expérience nous la donne, soit pour fixer d'une manière du moins approchée, des points de chronologie fort incertains, soit pour juger du plus ou du moins de confiance que méritent les différens systèmes imaginés pour concilier entr'elles des époques qui paroissent se contredire.

Quelques philosophes se sont servis depuis de cette évaluation de la durée moyenne des règnes, pour prouver le peu de probabilité de la durée attribuée par d'anciens historiens à certaines suites de Rois, & montrer par-là combien peu cette partie de leur histoire méritoit de croyance. Ils ont pensé que la probabilité propre des faits devoit influer sur le poids qu'il falloit attribuer aux témoignages qui les attestent, & en ont conclu que, malgré l'autorité des historiens les plus accrédités, les faits invraisemblables devoient être rejetés.

Le savant Fréret, qui a combattu les principes de la chronologie de Newton, regardoit comme une espèce d'usurpation l'usage qui commençoit à s'introduire, d'employer dans la critique le calcul des probabilités : il a destiné un de ses Mémoires à essayer d'en montrer l'inutilité & le danger. Ce calcul, selon lui, doit se borner à la théorie des jeux de hasard ; on en connoissoit cependant alors des applications aux probabilités de la vie humaine, aux emprunts en rentes viagères ou en tontines, & même à quelques questions de Droit ; mais il paroît que Fréret, quoiqu'il eût en physique, en mathématiques & sur-tout en astronomie, des connoissances fort étendues, ne connoissoit pas les travaux de Halley, des Bernoulli, & de Moivre.

Il apporte pour motif principal de son opinion, que, dans les jeux de hasard, le nombre des combinaisons possibles est fini, ou du moins donné par une théorie rigoureuse : avantage que l'on perd nécessairement lorsqu'on veut appliquer le calcul à la probabilité des faits naturels.

Il est vrai qu'alors on ne connoissoit pas, comme aujourd'hui, une méthode directe de calculer la probabilité des évènemens futurs ou inconnus d'après l'observation des évènemens passés, ou plutôt de déterminer la valeur moyenne de cette probabilité : mais on pouvoit employer le calcul d'après cette hypothèse, que la suite des évènemens futurs sera semblable à celle des évènemens passés ; hypothèse qu'on savoit déjà avoir une exactitude suffisante, lorsque le nombre des observations est très-grand en lui-même, & par rapport à celui des évènemens inconnus ou futurs dont on cherche la probabilité.

Suivant toute apparence, quelques applications de calcul trop hypothétiques, fondées sur de faux principes, ou même très-bizarres, qui avoient eu alors une sorte de célébrité par leur singularité même, avoient frappé l'esprit naturellement juste & sage de ce Savant, & l'avoient prévenu contre des recherches pour lesquelles ces premiers

essais n'étoient pas propres à inspirer de la confiance; mais il ne nioit certainement pas le principe général, qu'il faut avoir égard à la probabilité propre, soit physique, soit morale, des évènemens; peu de critiques en ont même fait un usage plus heureux, & il y a eu dans ce siècle peu d'érudits qui aient plus fortement senti l'utilité de l'étude des sciences naturelles, & qui s'y soient livrés avec plus de zèle & de succès.

Parmi ceux qui ont adopté le même principe, on doit citer M. de Voltaire, qui peut-être même en a quelquefois abusé, sur-tout lorsqu'il a voulu l'appliquer à la probabilité morale des évènemens, beaucoup plus difficile à évaluer que leur probabilité physique.

Dans le nombre des applications qu'il a faites de ce principe, on lui reproche sur-tout d'avoir employé le peu de probabilité qu'il suppose à la très-longue durée du règne des sept Rois de Rome, pour jeter de l'incertitude sur cette partie de l'Histoire Romaine. Comme ce fait est un de ceux auxquels il est le plus aisé d'appliquer le calcul, nous l'avons choisi pour exemple: nous allons donc chercher quelle est la probabilité propre de cet évènement, afin de voir si elle est assez petite pour affoiblir beaucoup le témoignage des historiens qui l'ont rapporté.

IX.

Nous observerons d'abord que ces Rois étoient électifs, & au lieu d'employer ici ou les générations des Rois héréditaires, qui ne peuvent s'y appliquer, ou celles des Rois électifs, qni nous donneroient un trop petit nombre d'observations, nous préférerons une hypothèse qui ne doit pas s'écarter beaucup de la vérité, en prévenant d'ailleurs qu'elle est un peu trop favorable à la longue durée des règnes.

Nous supposerons donc, 1.° que les Rois électifs peuvent être élus, ou peuvent commencer à règner depuis l'âge de 30 ans jusqu'à celui de 60; & qu'il est également

probable qu'ils seront élus à une époque quelconque prise dans cet intervalle. Nous supposerons, 2.° que, depuis 30 jusqu'à 90 ans, la mortalité est constante, c'est-à-dire, comme si de 60 hommes de 30 ans il en mouroit un par année, un sur 45 hommes de 45 ans, un sur 30 hommes de 60 ans, &c. supposition un peu trop favorable à la durée de la vie.

Cela posé, la plus courte durée de chaque règne sera d'un an, la plus longue de 60; la plus courte durée de sept règnes sera sept ans, & la plus longue 420.

Il eût été plus exact de diminuer les règnes chacun d'une demi-année, de manière que la plus courte durée fût 3 ans $\frac{1}{2}$, & la plus longue 416 $\frac{1}{2}$, ou d'augmenter de 3 ans $\frac{1}{2}$ la durée des sept règnes; mais la différence n'est pas ici très-considérable, & nous donnons encore cet avantage à l'opinion favorable à la longue durée de ces règnes.

X.

Soit en général n la plus grande durée exprimée en années, pour celui qui est élu le plus jeune, m pour celui qui est élu le moins jeune, & p le nombre des règnes. Si l'on prend la formule

$$\frac{[(n-m+1).x(1-x)-x^{m+1}+x^{n+2}]^p}{(1-x)^{2p}.[\frac{(n+m).(n-m+1)}{2}]^p},$$

le coéfficient de x^r dans cette formule, développée en série, exprimera la probabilité que les p règnes dureront r années.

Or ici, $n = 60$, $m = 30$, $p = 7$, & comme il faut compter les règnes depuis la fondation jusqu'à la mort de Tarquin, $r = 257$.

Il faudra donc chercher le coéfficient de x^{257} dans la formule

$$\frac{[31x(1-x)-(x^{31}-x^{62})]^7}{(1-x)^{14}.45^7.31^7}.$$

XI.

XI.

Si on appelle P ce coéfficient qui exprime la probabilité que les ſept règnes ont duré 257 ans, & qu'on veuille chercher la probabilité propre que cette durée a eu lieu, on obſervera qu'il y a ici 414 évènemens, puiſque les règnes peuvent durer depuis 7 juſqu'à 420 ans; que la probabilité de l'évènement déterminé étant P, celle de la probabilité moyenne des 413 autres évènemens ſera $\frac{1-P}{413}$, & qu'ainſi, la probabilité propre ſera $\frac{413\,P}{1+412\,P}$: c'eſt donc P qu'il nous reſte à chercher.

Pour cela, il ſuffira de développer le numérateur de la fonction ci-deſſus, qui, en n'ayant égard qu'aux termes où le coéfficient de x ne ſurpaſſe pas 257, donnera 24 termes; & comme on ſait qu'en général, le coéfficient de x^n dans $\frac{1}{(1-x)^m}$ eſt $\frac{n+m-1 \ldots\ldots n+1}{1.2.3 \ldots\ldots\ldots\ldots m-1}$, on aura facilement chacun des 24 termes & la valeur de P, qui ſera $\frac{792}{1,000,000}$.

Nous aurons donc $P = \frac{792}{1,000,000}$, & la probabilité propre du fait ſera $\frac{246,169}{1,000,000}$, ou, à très-peu de choſe près, $\frac{1}{4}$.

XII.

Si, au lieu de ce fait, nous examinons celui de l'Augure *Accius Nævius*, rapporté auſſi par les écrivains de l'Hiſtoire Romaine; comme juſqu'ici aucun raſoir n'a encore coupé de cailloux, en ſuppoſant ſeulement un million de faits contraires à ce récit, que nous puiſſions regarder comme certains, il ſuit de ce que nous avons dit, *n.° VII*, que la probabilité propre de cette aventure ſeroit $\frac{1}{1,000,000}$ à peu-près.

Supposons maintenant que, pour croire un fait, le placer dans la classe de ceux d'après lesquels on peut se permettre de raisonner, on exige une probabilité $\frac{9.999}{10,000}$, nous n'avons besoin que d'attribuer une probabilité $\frac{29.997}{29.998}$ au rapport des historiens qui ont parlé de la durée du règne des sept Rois de Rome; au lieu que, pour avoir la même probabilité, il en faudroit attribuer une de $\frac{449.949.001}{449.949.002}$ à l'historien qui a rapporté le fait.

On voit, dans le premier cas, un fait extraordinaire qui, tandis qu'un fait commun exigeroit seulement, pour avoir le même degré de croyance, qu'un ou plusieurs historiens ne se trompassent qu'une fois sur dix mille, exigeroit qu'ils ne se trompassent qu'une fois sur 29,998, ou près de 30000 Dans le second, on voit un fait tellement prodigieux, que la crédulité la plus excessive ne pourroit supposer aux historiens l'autorité nécessaire pour donner un motif suffisant de le croire.

XIII.

On auroit pu, au lieu de la méthode que nous avons suivie, supposer à chaque Roi de Rome l'âge que les historiens lui donnent à son avénement, & employer, au lieu de l'hypothèse de *Moivre*, celle de *Lambert*, qui est beaucoup plus exacte, & conduit aussi à des suites sommables. On auroit eu alors une probabilité propre très-sensiblement au-dessous de $\frac{1}{4}$, mais elle n'auroit pas été assez petite pour placer cette durée des règnes au nombre des évènemens qu'il faut rejeter, & elle seroit encore dans la classe de ceux qui exigent seulement des témoignages plus forts & beaucoup plus forts que n'en exigent les évènemens ordinaires.

XIV.

Supposons maintenant quil y ait eu deux classes d'historiens, dont les premiers aient porté la durée des sept

règnes à 257 ans, & les seconds à 140 ans seulement. En suivant les mêmes raisonnemens, on trouvera que, si ces derniers étoient les seuls, la probabilité que sept Rois ont régné 140 ans, est $\frac{8,887}{1,000,000}$; & par conséquent la probabilité propre de ce fait, si l'histoire l'avoit transmis seul, seroit $\frac{3,661,444}{4,652,557}$, c'est-à-dire, plus grande que $\frac{1}{2}$; & pour avoir une probabilité $\frac{9,999}{10,000}$, d'après le témoignage des historiens, il suffiroit que celle de ce témoignage fût $\frac{9,994}{10,000}$; c'est-à-dire, qu'au lieu qu'il faut, pour la durée de 257 ans, le témoignage d'un historien qui ne se trompe qu'une fois sur 29,998, il suffiroit, pour la durée de 140 ans, du témoignage d'un historien qui ne se trompât qu'une fois sur 1666.

Mais nous supposons des témoignages en faveur des deux durées, & d'après la théorie exposée ci-dessus, les probabilités propres des deux évènemens, & d'un autre évènement indéterminé quelconque qui auroit pu avoir lieu, seront,

Pour la durée de 140 ans................ $\frac{3,652,557}{4,968,390}$,

Pour la durée de 257 ans................ $\frac{325,512}{4,968,390}$,

Pour l'évènement indéterminé, non témoigné..... $\frac{990,321}{4,968,390}$.

Désignant ces trois probabilités par a, b, c; celle du témoignage en faveur de la durée de 140 ans par x; celle du témoignage en faveur de la durée de 257 ans par y, nous aurons, pour probabilité résultante du témoignage pour le premier évènement, $\frac{x.(1-y)}{1-xy}$; pour le second, $\frac{y.(1-x)}{1-xy}$; pour que ni l'un ni l'autre n'ait lieu $\frac{(1-x).(1-y)}{1-xy}$; & par conséquent,

$$\frac{a.x.(1-y)}{c+(a-c).x+(b-c).y+(c-a-b).xy};$$
$$\frac{b.y.(1-x)}{c+(a-c).x+(b-c).y+(c-a-b)xy};$$
$$\frac{c.(1-x).(1-y)}{c+(a-c).x+(b-c).y+(c-a-b)xy},$$

pour les probabilités des deux évènemens témoignés, & pour celle qu'aucun des deux n'a eu lieu. Pour que la probabilité fût égale entre les deux évènemens, il faudroit que l'on eût $x = \frac{by}{a+(b-a).y}$, & dans l'exemple proposé, $x = \frac{325,512.y}{3,652,557 - 3,327,045.y}$. Supposons $y = \frac{9,999}{10,000}$, nous aurons $x = \frac{9,987}{10,000}$; c'est-à-dire, qu'un témoignage qui se tromperoit une fois sur 770, devroit être cru sur la durée de 140 ans, plutôt que le témoignage qui ne se tromperoit qu'une fois sur 10,000, sur la durée de 257 ans.

Supposons enfin x seulement égal à $\frac{9}{10}$, & voyons quelle valeur devroit avoir y, pour que l'évènement auquel il se rapporte ait une probabilité égale à $\frac{9,999}{10,000}$. Dans ce cas on aura l'équation $y = \frac{338,589,476,666}{338,589,802,178}$; c'est-à-dire, qu'il faudroit un témoignage qui trompât moins qu'une fois sur un million trente mille; ainsi, pour avoir une probabilité $\frac{9,999}{10,000}$ de la durée de 257 ans, il suffira de pouvoir donner aux historiens qui l'ont rapportée, une probabilité telle qu'ils ne se trompent qu'une fois sur trente mille environ; mais si en même temps d'autres historiens qui se trompent une fois sur dix, ont fixé à ces mêmes règnes une durée de 140 ans, il faudra, pour avoir la même probabilité, en pouvoir supposer aux témoignages des premiers une telle, qu'ils ne se trompent qu'une fois sur environ un million trente mille.



MÉMOIRE
SUR LA GRANDEUR APPARENTE
DES CORPS OPAQUES,
Vus ſur un fond lumineux ou autrement.

Par M. LE GENTIL.

LA matière ſur laquelle j'entreprends aujourd'hui d'entretenir cette aſſemblée, a déjà été traitée, & elle mérite de l'être plus d'une fois. La queſtion eſt de ſavoir ſi un corps opaque quelconque vu tout entier au-devant d'un corps lumineux, tel, par exemple, que le Soleil, paroîtroit plus petit que s'il étoit vu à l'oppoſite, ſans cependant changer ſa diſtance à l'œil de l'obſervateur. Après avoir ſouvent réfléchi aux raiſons pour & contre, j'ai cru qu'en cette matière, comme en toute autre matière de ſcience, la voie de l'expérience (quand on peut y avoir recours) étoit toujours la plus ſûre, & celle qui nous conduiſoit le plus infailliblement au but. C'eſt donc dans l'intention de découvrir ſi les corps opaques perdent ſenſiblement de leur grandeur apparente, lorſqu'ils ſont vus ſur un fond lumineux, que j'ai fait les expériences qui ſont l'objet de ce Mémoire. Pour faire voir en peu de mots l'importance de cette matière, il ſuffira de faire remarquer que cette diminution, ſi elle exiſte, doit influer ſur le diamètre de la Lune, dans la prédiction des éclipſes de Soleil; ſur le temps que Mercure & Vénus, dans leurs conjonctions écliptiques avec le Soleil, emploient à entrer ſur ſon diſque, & à en ſortir; ſur la grandeur réelle de ces planètes; & enfin ſur pluſieurs autres points de l'aſtronomie & de la phyſique, également intéreſſans pour le progrès de ces deux ſciences. Avant que de rapporter mes expériences, je crois qu'il ſeroit bon de faire un précis hiſto-

Lû le 14 Nov. 1753. Relû le 4 Mars 1786.

rique de tout ce qui s'est passé jusqu'à ce jour, parmi les Astronomes, de plus intéressant sur cette matière; je le crois même d'autant plus nécessaire, qu'on sera par-là plus à portée de voir ce que mes expériences y ont ajouté. Les passages de Mercure & de Vénus au-devant du disque du Soleil, observés dans le siècle passé, ont fait naître l'idée de la diminution de la grandeur apparente des corps opaques, lorsqu'ils sont vus sur un fond lumineux. Gassendi, un des grands philosophes de son temps, en a fait la remarque, pour la première fois, en 1631, dans la conjonction écliptique de Mercure: personne, avant lui, n'avoit été assez heureux pour voir cette planète sur le Soleil. Ce célèbre philosophe fut dans le plus grand étonnement de voir que Mercure lui paroissoit à peine sous un angle d'un tiers de minute; il n'avoit sous ses yeux que des observations qui avoient toutes été faites à la vue simple ou avec de très-courtes lunettes, & dans des circonstances où Mercure présente à la Terre, sinon tout son côté éclairé, au moins une assez grande partie. Il s'attendoit de le voir paroître sur le Soleil, à peu-près de la même grandeur que ces observations l'avoient établi, c'est-à-dire, sous un angle de deux ou trois minutes au moins. En lisant sa Lettre à Schickard, intitulée *de Mercurio in Sole viso*, l'on y voit qu'étant bien éloigné de penser que Mercure dût lui paroître si petit, il l'avoit d'abord pris pour quelque tache qui s'étoit formée nouvellement; qu'il reconnut enfin, par le mouvement propre & uniforme de cette prétendue tache, en peu de temps, que c'étoit Mercure: d'où il conclut la nécessité de diminuer la grandeur apparente des astres, beaucoup plus qu'on n'auroit pu se l'imaginer.

L'observation de Gassendi fut confirmée deux fois, dans le courant du siècle, une fois en 1639, par un passage de Vénus sur le Soleil, qui fut observé en Angleterre par *Horoccius* & *Crabtrée ;* & une autre fois en 1661, par un passage de Mercure sur le Soleil, qui fut observé à Dantzick par *Hevelius.* Horoccius n'ignoroit pas ce qui avoit été

remarqué dans le paſſage de Mercure ſur le Soleil en 1631, touchant le diamètre apparent de cette planète ; cela lui ſervit d'avertiſſement pour le diamètre de Vénus, de ſorte que cet Aſtronome ne fut pas ſurpris au point que l'avoit été Gaſſendi pour qui la choſe avoit été nouvelle. Voici comment Horoccius s'exprime dans ſon Traité intitulé *Mercurius in Sole viſus*, pag. 112, c. I. *Præcipuè autem diametri Veneris apparentis mirabilem parvitatem lectoris conſideratione dignam commendarem, niſi conſimili in Mercurio novitate Aſtronomorum admirationem præocupaſſet Gaſſendus: at qui veritatem primus docere non poſſum, ſecundus confirmo. Videant ergo, jam altero & notabiliori exemplo, quantùm decipiant planetarum radii in æſtimandis eorum diametris.*

Hevelius, qui nous a conſervé ce précieux Traité de Horoccius, ſur le paſſage de Vénus au-devant du Soleil, dit, à l'occaſion du diamètre de cette planète, que Mercure ne lui avoit paru, en 1661, que de 12 ſecondes, lorſqu'il paſſa ſur le Soleil ; qu'on ne devoit pas s'en étonner, puiſque le diamètre de Vénus, que les Aſtronomes les plus exacts faiſoient encore de près de 4 minutes dans ſon périgée, n'avoit été trouvé que de 1′ 16″ ſeulement dans ſon paſſage au-devant du Soleil.

Comme les diamètres de Mercure & de Vénus, qui avoient été obſervés dans leurs paſſages au-devant du Soleil, différoient ſi conſidérablement de ceux que tous les Aſtronomes attribuoient à ces planètes, cela fit croire à pluſieurs ſavans de ces temps-là, que quelque illuſion optique pouvoit en être la cauſe. Schickard, célèbre profeſſeur en aſtronomie & en hébreu dans l'univerſité de Tubinge, fut de ce ſentiment ; il compoſa, à l'occaſion du diamètre de Mercure obſervé par Gaſſendi, une diſſertation qu'il adreſſa à ce philoſophe : on y voit les raiſons qui lui faiſoient croire que cette planète, lorſqu'elle eſt vue ſur le Soleil, devoit perdre de ſa grandeur apparente. La dilatation de la lumière du Soleil qui, par ſa nature, ſe répand de tous côtés, & ſe renfle aux approches des

corps, en eſt, ſelon lui, la cauſe principale. Les lumières dont on a coutume de ſe ſervir pour éclairer les appartemens pendant la nuit, lui ſervent d'exemple: ſi l'on fait préſenter au-devant d'une de ces lumières un bâton, & qu'on l'obſerve de loin, il paroîtra dentelé profondément à l'endroit par où paſſe la lumière; d'où, par analogie, il conclut que les mêmes apparences doivent ſuivre Mercure lorſqu'il paſſe au-devant du Soleil. Horoccius convient avec Schickard, que la lumière ſe dilate à un point preſque incroyable, lorſque, pour l'apercevoir, nous n'avons d'autre ſecours que celui de la vue ſimple. Il admet auſſi l'expérience de cet Aſtronome, mais il la croit tout-à-fait étrangère à ſon ſujet; il prétend en effet que la diminution du bâton dont il eſt queſtion dans l'expérience de Schickard, n'a d'autres cauſes que les humeurs de l'œil, qui rompent & qui amplifient les rayons de la lumière; mais que ſi l'on reçoit ſur un mur l'ombre du bâton, elle paroîtra d'une grandeur uniforme. Or, continue Horoccius, c'eſt l'ombre de Mercure & de Vénus que l'on obſerve, lorſque l'on reçoit ſur un tableau, dans la chambre obſcure, l'image du Soleil qu'on a fait paſſer à travers une lunette, ce qui modère tellement les rayons de cet aſtre, que la vue n'en eſt point offenſée. On n'a donc rien à craindre alors de la trop grande dilatation des rayons du *Soleil*, & Vénus & Mercure ont été vus de la même grandeur qu'ils devoient paroître. Pour mieux combattre ſon adverſaire, Horoccius ſe ſert des éclipſes de Soleil, parce qu'à la ſimple vue l'on juge toujours la partie éclipſée trop petite, au lieu que les lunettes la repréſentent, auſſi-bien que le diamètre de la Lune, dans ſa véritable grandeur apparente: il cite l'éclipſe du 22 Mai 1639, & celle du 12 Mai 1621, dont il a obſervé la première & Gaſſendi la ſeconde.

Mais quel fonds peut-on faire ſur ces obſervations dont parle Horoccius? Quand même Gaſſendi & lui auroient excellé dans l'art d'obſerver, cet art étoit alors très-borné, les

les moyens leur manquoient pour l'exactitude, puisque le micromètre n'étoit point encore connu. Sur une quantité aussi grande qu'est celle du diamètre apparent de la Lune, comparé au diamètre apparent de Mercure, ils pouvoient aisément se tromper dans leur estime d'une ou deux minutes, sans que l'erreur pût être sensible. Les observations de Bouillaud, le plus célèbre Astronome de ces temps-là, ne sont marquées que dans cette précision, & par conséquent les deux observations dont parle Horoccius, n'attaquent en rien le sentiment de Schickard.

Il est aisé de voir, par ce qui vient d'être dit, que quoiqu'on eût, du temps de Gassendi & d'Horoccius, l'idée de la diminution des corps opaques lorsqu'ils sont vus sur un fond lumineux, on n'avoit cependant pu parvenir à établir rien de certain sur ce sujet. Personne en effet n'avoit cherché les moyens de mesurer avec exactitude les diamètres de Mercure & de Vénus, lorsqu'ils nous présentent leur côté éclairé. On peut joindre à cela que la méthode grossière dont les Astronomes s'étoient servie pour mesurer le diamètre de ces planètes dans leurs passages au-devant du Soleil, avoit dû influer sur l'exactitude de leurs observations.

M. Huguens, qui est venu dans la suite, a à la vérité observé le diamètre éclairé de Vénus, avec une exactitude qui a surpassé de beaucoup celle de ses prédécesseurs; mais comme il ne paroît pas avoir eu en vue la question présente, je n'insisterai pas sur son observation: je me contenterai seulement de faire remarquer, comme en passant, qu'entre son résultat & celui d'Horoccius & de Crabtrée, il y a 17 à 18 secondes de différence, dont Vénus leur auroit paru plus petite dans son passage au-devant du Soleil. Or, quoique l'observation d'Horoccius & de Crabtrée (comme je l'ai remarqué un peu plus haut) ne soit pas à l'abri de toute censure, cette quantité m'a paru trop considérable pour ne pas mériter attention, d'autant mieux

que j'ai pris un milieu entre les résultats de ces deux Astronomes.

L'expérience faite par Schickard, du bâton au-devant d'une chandelle, quoique simple & grossière, m'ayant paru mériter quelqu'attention, j'ai imaginé un moyen de la répéter beaucoup plus exactement.

J'ai pris une lame de cuivre d'un pouce de largeur & de cinq à six de longueur, médiocrement polie. Je l'ai élevée au dessus d'une table, de façon que ses deux surfaces fussent perpendiculaires, & ses deux grands côtés parallèles à l'horizon; je l'ai arrêtée dans cette position, par ses deux extrémités. J'ai mis, à la distance d'environ six pieds de cette règle, un large oculaire de sept pouces & quelques lignes de foyer. Cet oculaire étoit fermement arrêté sur une règle de bois placée horizontalement. Cette règle portoit un chassis peint avec du blanc de céruse, & bien uni, de manière que l'oculaire étoit entre le chassis & la lame de cuivre. Le chassis étoit destiné à recevoir l'image de la lame de cuivre; il pouvoit s'approcher ou s'écarter de l'oculaire à volonté, étant construit de façon que la règle de bois entroit dedans fort exactement, & il étoit facile de l'arrêter à un point fixe quelconque, par une vis qu'on avoit fait pratiquer en dessous. Le tout étoit fixé très-solidement, & de niveau avec la lame de cuivre. Je plaçai, pendant la nuit, une très-forte bougie au-devant de la lame, & une autre aussi forte par-derrière. J'avois partagé verticalement la lame de cuivre par un grand carton, afin que la bougie la plus proche de l'oculaire n'éclairât que la moitié de la lame; & d'ailleurs la flamme de la bougie plus éloignée étoit assez longue pour être aperçue au-dessus & au-dessous de la partie obscure de la lame. Les choses étant ainsi disposées, j'approchai mon chassis jusqu'à ce que je visse distinctement la peinture de mon objet, & ayant serré la vis, je l'arrêtai à ce point. Les principaux phénomènes que je me contenterai de rapporter, sont au nombre de

deux. Il partoit des deux bords de l'image de la partie éclairée de la lame, une lumière blanchâtre qui, semblable à la queue d'une comète, alloit toujours en s'affoiblissant, à proportion qu'elle s'éloignoit des bords de l'image de la lame, & qui finissoit à peu de distance. Une semblable lumière paroissoit aussi sur les bords de la représentation de la partie obscure de la lame, mais avec cette différence qu'elle s'étendoit, dans celle-ci, sur une partie de la largeur de cette représentation. Pour mesurer actuellement la partie éclairée & celle qui étoit opaque, j'avois fait diviser une échelle en 100.es de lignes, & l'ayant fait évider en dedans, je mis à la place des lignes, des soies de cocon très-déliées. Ces soies formoient une espèce de réticule, dont je me servis au lieu de micromètre, & que j'avois jugé très-propre pour en faire les fonctions. Il m'apprit, par un grand nombre d'observations réitérées & faites avec grand soin, que la partie opaque de la lame paroissoit $\frac{1}{10}$ de ligne plus petite que la partie éclairée; mais, pour en rendre l'effet encore plus sensible, j'ai imaginé l'expérience suivante.

J'ai fait tourner & arrondir, le plus exactement qu'il m'a été possible, deux plaques de cuivre dont la plus grande avoit onze lignes, & la plus petite neuf lignes & demie de diamètre; je les ai substituées à la lame de cuivre, & je les ai placées à deux pouces ou environ de distance l'une de l'autre; leur direction répondoit à celle de l'oculaire & du chassis, afin qu'abaissant ou élevant l'une des pièces, je pusse faire concourir leurs images l'une sur l'autre. Je plaçai une seule bougie en devant, mais un peu à côté; & le tout s'étant peint sur le chassis, je fis mouvoir une des pièces, jusqu'à ce que le bord inférieur d'une des images rasât le bord supérieur de l'autre; je fis même en sorte qu'elles avançassent un peu l'une sur l'autre, sans cependant que la chose pût être trop sensible. Je changeai la bougie de position en la plaçant par-derrière, & faisant en sorte que les deux cercles fussent vus tout entiers sur

la flamme de la bougie; j'aperçus alors très-distinctement & sans peine une interruption entre les deux ombres, qui me laissoit entrevoir la lumière. Je vis aussi, comme dans la première expérience, une lumière blanchâtre qui passoit par l'intervalle que formoit l'interruption des deux ombres, & qui s'étendoit sur une partie de ces ombres. Que peut-on conclure de cette expérience, sinon que les rayons de la lumière, pour former cette interruption & se faire apercevoir, s'étoient fléchis deux fois & en différens sens avant que de continuer leur route jusqu'à l'oculaire; qu'outre ces modifications quils avoient souffertes, ils avoient aussi un peu avancé sur la surface du premier cercle avant que d'aller joindre l'autre cercle, ce qui se prouve par cette lumière pâle & blanchâtre que j'ai aperçue de part & d'autre sur les deux cercles; & que par conséquent les corps opaques perdent de leur grandeur apparente quand ils sont vus tout entiers sur un corps lumineux.

On ne peut pas opposer à mes expériences ce que nous avons vu qu'Horoccius avoit objecté à Schickard. Mon oculaire me peignoit la représentation de mes cercles, précisément de la même façon que les objectifs ou les lunettes nous représenteroient, soit une éclipse de Soleil, soit un passage de Vénus ou de Mercure sur le *disque* apparent de cet astre; mais, pour avoir une *démonstration* complète de cette diminution, & pour savoir en même temps, d'une façon encore plus exacte, quelle en doit être la quantité relativement aux lunettes de différentes longueurs, & aux objets plus ou moins éclairés, j'avois commencé plusieurs expériences de différentes espèces, que le temps ne m'a pas permis d'achever: j'en rapporterai cependant une que j'ai faite il y a plusieurs mois avec une lunette de sept pieds & demi, dans une maison, rue des Postes. L'on peut voir d'un donjon appartenant à cette maison, un globe qui est placé à l'extrémité du dome des Invalides: le diamètre apparent de ce globe vu à cette distance, est environ quinze fois plus petit que le diamètre

apparent du Soleil, & par conséquent je pouvois espérer de voir ce globe tout entier sur le Soleil, quand cet astre viendroit à passer par-derrière. Ayant saisi ce moment, je mesurai le diamètre horizontal du globe, que je trouvai égal à 165 parties de mon micromètre. Il est bon de faire remarquer que les bords de ce globe m'ont paru tranchés avec une si grande netteté, que j'ai pu m'assurer, à une partie de micromètre près, de la quantité que je rapporte, & s'il y a eu quelqu'erreur dans l'observation, j'ose dire qu'elle a toute été en excès. Dans le cas présent, le globe étoit vu tout entier sur un corps très-lumineux; il falloit ensuite que je me trouvasse entre le Soleil & le globe, à peu-près sur la même ligne, afin qu'il l'éclairât de mon côté, pour mesurer une seconde fois le même diamètre, sans être obligé de changer ma distance de ce globe. Dans ce second cas, le diamètre du globe ne m'a paru guère plus grand que 175 parties du même micromètre, ni plus petit que 173; d'où je conclus qu'il m'avoit paru de 9 à 10 parties plus petit lorsque je l'observai au-devant du Soleil, qu'à son opposite. Ces 9 à 10 parties répondent, dans mon micromètre, à près de 6 secondes de degré.

Ce seroit donc de cette quantité, ou à peu-près, dont seroient diminués les diamètres des corps opaques vus sur un fond lumineux; mes premières expériences feroient cette quantité un peu plus grande. Il résulte toujours de toutes ces expériences, que les corps opaques, vus sur un fond lumineux, éprouvent à nos yeux une diminution réelle, lorsque nous mesurons leurs diamètres apparens avec quelqu'instrument, dans cette position, & que cette diminution est d'environ 5 à 6 secondes; ce que j'ai cru pouvoir être fort utile dans l'astronomie; j'invite, au surplus, les Astronomes à tenter de nouvelles expériences & observations sur une matière aussi intéressante.



MÉMOIRE

SUR LE FROID observé à l'Observatoire royal & aux Chartreux, à la fin de 1783.

Par M. LE GENTIL.

Lû le 20 Janvier 1784.

J'AVOIS deux thermomètres placés à côté l'un de l'autre, un à esprit-de-vin, que j'ai construit; & un à mercure, de M. Lavoisier, pareil à celui de M. Cassini, & qui ont été présentés à l'Académie par cet Académicien. Il est divisé en huitièmes, comme celui de M. de Cassini; & ayant été éprouvés dans les caves, ils ont marqué le même point.

Le 29, à 7 heures $\frac{1}{2}$ du matin, thermomètre à esprit de-vin . . . . — 9^d.
A 6 heures du soir . . . . — 10^d & 10 $\frac{1}{2}$.
Thermomètre de M. Lavoisier . . . . — 9 $\frac{3}{8}$.
A 3 heures après midi . . . . — 7^d $\frac{1}{2}$ & 8.
Le 30, à 7 heures $\frac{1}{2}$ & à 8 heures, thermomètre à esprit-de-vin . . . . — 12 $\frac{1}{4}$.
Thermomètre de M. Lavoisier . . . . — 12 $\frac{6}{8}$.
A 2 heures après midi, thermomètre à esprit-de-vin . . — 9 $\frac{7}{8}$.
Termomètre de M. Lavoisier . . . . — 10 $\frac{1}{8}$.
A 5 heures après midi, thermomètre à esprit-de-vin . . . — 11.
Thermomètre de M. Lavoisier . . . . — 11 $\frac{3}{8}$.
A 9 heures du soir, thermomètre de M. Lavoisier . . . — 12.
Thermomètre de M. Lavoisier . . . . — 12 $\frac{2}{8}$.
Le 31, à 7 h $\frac{1}{2}$ du matin, thermomètre à esprit-de-vin . . — 11.
Thermomètre de M. Lavoisier . . . . — 11 $\frac{2}{8}$.

Mais il paroît que le plus grand froid est arrivé entre minuit & 5 heures du matin: en effet voici les observations de M. Cassini qui le confirment.

Son thermomètre étoit plus élevé que le mien de 7 à

8 pieds, étant placé extérieurement à l'embrasure de la fenêtre du cabinet, du quart-de-cercle mobile, plein nord.

Le 28 Décembre, à 8 heures du matin..........	—	3^d.
Le 29, à 8 heures du matin..................	—	7.
Le 30, à 7 heures $\frac{1}{2}$ du matin..................	—	12 $\frac{7}{8}$.
A 9 heures du soir.........................	—	14 $\frac{1}{8}$.
A minuit $\frac{1}{4}$...............................	—	15 $\frac{2}{8}$.

Pendant la nuit du 30 au 31, le ciel se couvre, le froid diminue, & le dégel se prépare.

Le 31, à 8 heures du matin...................	—	10^d
A midi..	—	7. $\frac{1}{2}$.

Ces observations, du temps du plus grand froid, s'accordent avec ce que le P. Dom Germain a observé aux Chartreux de Paris, & qu'il a bien voulu me communiquer.

Le 20 Décembre, le thermomètre bien placé, vu à 7 heures & demie, 7^d au-dessous de zéro. Baromètre 28 pouces 3 lignes. Vent N. N. O.

Le 28 il a neigé toute la journée; il est tombé 7 ou 8 pouces de neige. Le Thermomètre est resté à 2 degrés au-dessous de zéro. Le Baromètre 27 pouces 4 lignes. Vent N. E.

Le temps s'est découvert pendant la nuit.

Le 29 le thermomètre, à 8 heures, étoit à 10^d au-dessous de zéro. Le baromètre 27 pouces 10 lignes. Vent N. O. A 2 heures après midi, 7^d sous zéro.

Le 30, à 8 heures, 13^d $\frac{1}{2}$ au-dessous de zéro. Le baromètre 27 pouces 9 lignes. Vent N. E. A 2 heures après midi, 11^d au-dessous de zéro.

Le 31, à 5 heures du matin, 15^d au-dessous de zéro. Le Baromètre 27 pouces 7 lignes. Le vent E. Sur les 6 heures du matin, le temps s'est couvert. A 2 heures après midi, 5^d sous zéro. Le temps s'est adouci, & le 1.er Janvier il a commencé à dégeler. A 2 heures après midi, 4. degrés $\frac{1}{2}$ au-dessous de zéro. Vent de S. E.



REMARQUE
SUR
LES VENTS QUI RÈGNENT À PARIS ET DANS LES ENVIRONS.

Par M. LE GENTIL.

Lû le 3 Mars 1784.

J'AI l'honneur d'annoncer à l'Académie que je lui demande à prendre date parmi les Mémoires qu'elle a destinés à l'impression, dans le volume de 1781, pour une conclusion que j'ai tirée d'après un très-grand nombre d'observations que j'ai faites, tant pendant mes voyages, que depuis mon retour; conclusion qu'on peut aussi entrevoir dans la dissertation du Docteur Halley, sur les vents généraux & alizés.

Cette conclusion, dis-je, est que, dans notre climat, à Paris & dans les environs, les vents généraux sont de la partie de l'Ouest, c'est-à-dire, qu'ils sont variables du Nord-ouest au Sud-ouest, selon les saisons; que ces vents soufflent ici perpétuellement, comme les vents généraux & alizés sont perpétuellement de la partie de l'Est entre les tropiques. Les autres vents variables que nous ressentons, étant, selon moi, des espèces de vents rampans sur la surface de la terre, n'empêchent point que les vents de Nord-ouest au Sud-ouest ne soient constans au-dessus d'eux, c'est-à-dire, à 1200 ou 1500 toises & même plus, au-dessus de la surface de la terre.

C'est

C'est de cette conclusion, comme d'un fait, que je demande à prendre date, à l'Académie, parmi ses Mémoires pour l'année 1781.

J'ai l'honneur de prévenir encore l'Académie que je travaille actuellement à un Mémoire sur le froid que nous avons ressenti cet hiver à Paris, comparé avec les hivers de 1684, 1709, 1740 & 1776; que ce Mémoire est déjà fort avancé ; & que j'y fais entrer l'influence de ces vents généraux dont je parle.



REMARQUES ET OBSERVATIONS SUR L'ASTRONOMIE DES INDIENS, & sur l'ancienneté de cette Astronomie.

Par M. LE GENTIL.

Lû le 13 Mars 1784.

J'AI déjà fait part à l'Académie, dans deux différens Mémoires, de ce que j'avois pu recueillir dans mon voyage à Pondichery, sur l'astronomie des Brames, & sur la conformité de cette astronomie avec celle des anciens Chaldéens : je vais l'entretenir aujourd'hui sur quelques nouvelles connoissances que j'ai acquises au sujet de cette astronomie.

La religion & l'astronomie sont tellement liées ensemble chez les Indiens, qu'il est évident qu'elles sont à peu-près de même date chez ces peuples : il y a même lieu de croire que l'astronomie a précédé la religion, telle qu'elle existe aujourd'hui ; en sorte que la religion, dans l'Inde, se peut dire en quelque sorte la fille de l'astronomie.

C'est sans doute une raison, indépendamment de celle du climat, c'est sans doute, dis-je, une raison pourquoi l'astronomie n'a fait aucuns progrès dans l'Inde, depuis son origine, ou depuis ses premiers inventeurs, que je suppose être des Indiens ; pourquoi les Indiens, de nos jours, n'observent point le ciel ; pourquoi enfin ils restent, à cet égard, dans une inaction si singulière à nos yeux. S'ils cultivent l'astronomie, ils n'y sont pas portés par les mêmes vues que nous, mais uniquement par des motifs de religion : ils montroient, à Pondichery, la plus grande indifférence pour mes instrumens d'astronomie, & pour les observations célestes que je faisois avec leur secours. Cette indifférence vient évidemment de ce qu'ils ne veulent pas emprunter la moindre chose des étrangers, & de ce

qu'ils se persuadent en savoir assez pour remplir le but unique qu'ils se sont de tout temps proposé en cultivant l'astronomie. En effet, cette science, toute imparfaite qu'elle peut être encore chez eux, leur a suffi, dans cet état d'imperfection, depuis plus de quatre mille ans, pour maintenir leur religion. Leurs tables du Soleil & de la Lune, qui ne paroissent pas avoir une date moins ancienne, sont encore passablement d'accord avec le ciel dans les conjonctions & les oppositions de la Lune, & en cela leur objet est rempli. Il est vrai que ces tables auroient certainement besoin de très-grandes corrections dans tout autre point de l'orbite lunaire, dans les quadratures, par exemple; mais que leur importent ces corrections? Il n'arrive point d'éclipses dans ces circonstances. Les quadratures ne sont donc nullement intéressantes pour eux. Le premier & le second quartier de la Lune n'ont de rapport à aucun article de leur religion. Or, il n'en est pas de même des éclipses qui ont, dans tous les temps, épouvanté les peuples foibles & ignorans. On sait que le peuple saisira toujours avec avidité les contes qu'on pourra lui faire sur ce phénomène; c'est ainsi que les Indiens ont de tout temps été bercés par les Brames, & endormis avec la fable, que les signes que l'on remarque quelquefois dans le Soleil & dans la Lune (car ils ne connoissent point les termes d'éclipses), proviennent d'un grand dragon ou serpent qui, dans ce moment, cherche à avaler le Soleil ou la Lune; & que ce n'est qu'avec les prières les plus ardentes & les plus ferventes, qu'ils parviendront à obtenir la délivrance de l'un ou de l'autre astre que le dragon cherche à dévorer: malheur qui, s'il arrivoit, leur ajoutent les Brames, entraîneroit pour jamais la privation de la lumière dans le monde entier.

Presque tous les termes astronomiques des éclipses sont tirés de cette fable, chez les Indiens: de-là les Brames ont imaginé le terme de *pat-ona-chandren*, qui veut dire *la Lune offensée par le dragon*, pour exprimer la distance

de la Lune à ſon nœud; c'eſt ce que nous appelons *l'argument de la latitude.*

Les Brames devoient donc annoncer aux peuples des phénomènes effrayans; ils devoient leur en marquer le jour & l'heure; leur prédire, pour ainſi dire, à point nommé, un évènement capable, par ſes ſuites, de les obliger d'avoir recours à la divinité, & ſur-tout aux Brames eux-mêmes, comme ſe diſant les interprètes de la divinité, & les médiateurs des peuples auprès d'elle. En conſéquence les Brames, pour s'attirer la vénération & le reſpect de ces peuples, & les tenir continuellement dans la crainte & dans la dépendance, ont eu un beſoin eſſentiel du calcul des éclipſes. Pour le faire, il leur a fallu étudier les mouvemens du Soleil & de la Lune. Nous ſommes donc redevables à la religion des Brames, de tous les fragmens d'aſtronomie que nous retrouvons épars chez les Indiens, fragmens qui ne ſont viſiblement que des reſtes ou des débris d'un dépôt conſidérable d'obſervations aſtronomiques, & de recherches qui ont péri, & qui avoient ſervi de baſe aux Indiens pour établir leurs élémens, & leur théorie des éclipſes.

Ils ont dans l'Inde, à ce qu'il m'a paru, deux différentes méthodes de calculer les éclipſes: tous les Indiens ſavans que j'ai vus & interrogés là-deſſus, à Pondichery, ſe ſont accordés en cela. L'une de ces méthodes ſe nomme, ſelon eux, *vaquiam,* qui veut dire *nouveau;* & l'autre *ſittandum,* c'eſt-à-dire, *ancien.*

La méthode que j'ai apportée avec moi, & que j'ai fait imprimer, eſt ſelon le *vaquiam:* je n'ai pu me procurer l'ancienne.

Huit à dix ans avant mon voyage, M. de l'Iſle, de cette Académie, avoit déjà eu connoiſſance de deux méthodes de calculer les éclipſes, ſelon les Indiens; l'une lui fut communiquée en 1750 par le P. Patoüillet; l'autre en

1754 par le P. Duchamp, Missionnaire. Ces deux méthodes, qui reviennent à peu-près au même, se trouvent au dépôt de la Marine; mais qu'elles sont loin de réunir l'ordre, la méthode, & la clarté nécessaires pour être facilement entendues! & j'ai eu souvent occasion, en lisant & étudiant ces méthodes, de n'avoir pu les connoître avant mon départ. Cependant, à l'aide des connoissances que j'ai pu acquérir à Pondichery, sur l'astronomie du pays, de la façon de procéder des Brames, d'envelopper & de cacher leurs opérations astronomiques, je suis parvenu a débrouiller plusieurs élémens très-importans de la théorie du Soleil, de la Lune, & des éclipses, & de les comparer à ceux qui me furent communiqués à Pondichery en 1768 & 1769.

J'ai fait voir, dans mon Astronomie Indienne, que les Brames de la côte de Coromandel avoient une époque qu'ils nommoient *caly-ougam*, & que cette époque remontoit trois mille cent deux ans avant Jésus-Christ.

Dans la méthode communiquée par le Père Patouillet, à M. de l'Isle, l'auteur semble, à la vérité, dater d'une autre époque que de *caly-ougam ;* mais il déguise sa marche, & s'il ne paroît partir que de la mort de Salivaganam, arrivée la onzième année de la période de soixante ans des Brames, l'an 78 de Jésus-Christ, c'est un moyen de plus qu'il a employé de marcher à l'ombre de grands nombres qui masquent & voilent son principal point de départ. En effet, malgré les détours qu'il emploie, sans doute pour n'être point découvert, j'ai retrouvé l'époque *caly-ougam*, & la précession des équinoxes qu'il fait de 54″, comme la supposent généralement tous les Brames.

Une chose est très-curieuse, ce sont des tables du Soleil & de la Lune, que l'on trouve à la suite de cette méthode, mais elles n'appartiennent point à la méthode ; elles en supposent encore une autre tout-à-fait différente, que nous n'avons point, & qui vraisemblablement est perdue ; car

il y a tout lieu de croire que le P. Patouillet en auroit eu communication ainsi que des tables. Au surplus, j'ai trouvé la clef de ces tables ; je peux parler ainsi, car ces tables n'ont aucun titre ; les chiffres n'y ont nulle valeur apparente : on ne distingue, au premier coup d'œil, qu'une multitude de nombres assez simples en apparence, rangés cependant avec une espèce d'ordre, mais que le Missionnaire, qui n'entendoit point la matière, n'a pu débrouiller sans doute. Il a pris ces nombres tels qu'on les lui a donnés, avec les fautes (car il y en a), & nous les a transmis de même.

Ces tables ont une forme lapidaire, c'est-à-dire, que je conjecture que, dans le principe, elles furent gravées sur des pierres d'où on les aura extraites. Je crois avoir quelques raisons de le soupçonner, & même d'assez vraisemblables ; d'après les calculs que j'ai faits, leur époque paroîtroit environ mille ans plus ancienne encore que l'Ère *caly-ougam*, qui remonte déjà trois mille cent deux ans avant Jésus-Christ. Ces tables auroient par cette raison précédé le déluge ; mais si en effet elles avoient été gravées sur des pierres, il n'y auroit rien d'étonnant qu'elles eussent resisté, & échappé à l'inondation générale ; & Josèphe ne semble-t-il pas favorable à cette opinion ?

Ces tables, pour le Soleil, sont comprises sous neuf carrés-longs, ou parallèlogrammes, renfermant chacune soixante-dix petites cases. Dix de ces cases sont horizontales, ou de suite ; & sept sont verticales.

Afin de conserver l'authenticité de ces tables, je les présente à l'Académie dans la forme qu'elles ont dans le manuscrit : j'ai cru qu'il suffisoit d'en exposer ici le premier & le neuvième carré, qui donneront suffisamment l'idée des sept autres.

La première suite de chiffres du premier carré, celle qui est en tête, renferme les nombres naturels depuis 1 jusqu'à 10.

Pareillement la première ſuite du carré ſuivant renferme la ſuite des nombres naturels depuis 10 juſqu'à 20, & ainſi de ſuite dans les ſept autres carrés qui ſuivent; en ſorte que le neuvième carré renferme à ſa première ſuite les chiffres de la neuvième dixaine, ou depuis 80 juſqu'à 90 degrés.

Or, ayant ſuppoſé que ces nombres étoient une eſpèce de titre renfermant des degrés, j'en ai dès-lors conclu, avec la plus grande facilité, les autres nombres de chaque carré.

Cette première ſuite de chiffres n'étant donc évidemment autre choſe, ſelon moi, que des degrés qui repréſentent la diſtance du Soleil à ſon apogée & à ſon périgée en même temps; la ſeconde ſuite ſera l'équation du centre du Soleil, exprimée en minutes de degré, & la troiſième ſera les ſecondes de ces minutes.

La quatrième renfermera le mouvement journalier du Soleil, exprimé en minutes de degré, en partant de ſon périgée; & la cinquième marquera les ſecondes de ces minutes.

Ce mouvement, par cette raiſon, va en diminuant dans la table.

La ſixième ſuite de caſes renferme pareillement le mouvement journalier du Soleil, mais en partant de ſon apogée, en ſorte que ce mouvement-ci fait tout le contraire du premier, puiſqu'il va inſenſiblement en augmentant; enfin la ſeptième ſuite donne les ſecondes.

Ces deux mouvemens s'avancent donc, pour ainſi dire, en ſens contraire l'un de l'autre, pour ſe rencontrer & s'accorder enſemble à 90 degrés, où doit être la moyenne diſtance du Soleil à la Terre. Là, ils ſont de la même quantité; ils forment ce que nous appelons le moyen mouvement journalier, qui eſt, dans le Soleil, de 59′ 8″, ſelon ces tables.

On voit encore que l'auteur suppose l'équation du centre du Soleil, de 130′ 34″ (2ᵈ 10′ 34″) à 90 degrés juste de son périgée: c'est ce que nous appelons la plus grande équation du centre du Soleil, que Ptolémée faisoit de 2ᵈ 23′ 10″; mais les tables Indiennes ne la supposent, comme l'on voit, que de 2ᵈ 10′ $\frac{1}{2}$: les Astronomes modernes ne trouvent que 1ᵈ 56′. L'on en doit conclure que la détermination des Indiens approche beaucoup davantage de la nôtre, que ne fait celle de Ptolémée.

Les tables de la Lune ont la même forme que celles du Soleil: on y trouve le moyen mouvement journalier de la Lune, de 790′ 35″ (13ᵈ 10′ 35″), & la plus grande équation de son centre, de 302′ 26″ (5ᵈ 2′ 26″). M. Cassini la suppose de 4ᵈ 58′ 44″, & M. Halley de 4ᵈ 57′ 46″.

Cette équation est la seule qui ait lieu dans les syzygies. C'est aussi la seule qu'il importoit aux Brames de connoître dans leur système d'appliquer l'astronomie au maintien de la religion.

On remarque dans la Lune une autre inégalité, dont on attribue la découverte à Ptolémée; celle-ci peut encore aller jusqu'à 2ᵈ $\frac{1}{2}$. Elle est très-considérable, comme l'on voit; mais comme elle ne se fait remarquer que dans les quadratures, les Brames qui ne font nulle attention à ces points de l'orbite lunaire, l'ont de tout temps ignorée, ils s'inquiètent même fort peu de son existence; si on leur en parle, ils ont l'air de ne pas seulement vous écouter.

À la suite de ces tables du Soleil & de la Lune, on en trouve une autre intitulée *(pour les Planètes)*, & qui ne renferme cependant que les diamètres du Soleil & de la Lune. Cette table est construite avec un art tout-à-fait ingénieux, que ni les Hypparque, ni les Ptolémée, ni aucun astronome Grec de l'école d'Alexandrie, n'ont jamais connu; mais il a fallu encore deviner cette table, car le titre que l'on voit qu'elle porte, n'en peut guère indiquer l'usage. Elle m'a paru fondée sur trois suppositions, dont

dont l'une eſt conforme aux obſervations modernes les plus préciſes.

La première de ces trois ſuppoſitions eſt que, dans tous les cas poſſibles, depuis 0^d juſqu'à 90^d, le demi-diamètre apparent de la Lune & celui du Soleil ajoutés enſemble, ſont égaux à un demi-degré, ou à 30'. Cette ſuppoſition eſt à la vérité en défaut d'un peu plus d'une minute; mais il n'y a guère plus d'un ſiècle que nous ne connoiſſions pas en Europe la ſomme des demi-diamètres du Soleil & de la Lune, à une minute près.

La ſeconde ſuppoſition, qui ſuit de la nature de ces tables, eſt que le demi-diamètre du Soleil apogée eſt égal au demi-diamètre de la Lune dans ſes moyennes diſtances; cette ſuppoſition eſt confirmée par les obſervations de nos jours : en effet, ſelon M. Caſſini, ces diamètres ne diffèrent entr'eux, dans ces circonſtances, que de 4", & ſelon M. Halley, ils ne diffèrent point du tout.

Enfin la troiſième ſuppoſition eſt que le demi-diamètre apparent du Soleil, dans ſes moyennes diſtances, excède de 2' 30" celui de la Lune apogée, ſuppoſition qui n'eſt en excès que de 1' 5 à 6".

D'après ces trois ſuppoſitions, l'auteur Indien a conſtruit ſa table dans la même forme que les précédentes. Les nombres naturels qui ſont en tête de chaque carré, depuis 1 juſqu'à 90^d, repréſentent donc, pour le Soleil, les degrés de ſon éloignement à ſon apogée; & pour la Lune, ce ſont les degrés de ſon éloignement à ſa moyenne diſtance à la Terre, en allant à ſon apogée : en conſéquence, la ſeconde ſuite de caſes renferme les demi-diamètres apparens du Soleil, depuis ſon apogée juſqu'à 90^d de diſtance; la troiſième ſuite donne les ſecondes.

La quatrième ſuite donne les demi-diamètres apparens de la Lune, depuis ſa moyenne diſtance juſqu'à ſon apogée; la cinquième renferme les ſecondes.

Il ſuit de-là, que les demi-diamètres du Soleil vont en croiſſant, dans cette table, & ceux de la Lune en diminuant,

& cela selon une proportion qui est telle qu'un demi-diamètre quelconque, pris à volonté dans cette table, celui du Soleil, par exemple, à quelque degré qu'il réponde, est toujours complétement à un demi-degré de celui de la Lune, & réciproquement.

Je n'ai plus qu'un mot à dire concernant la latitude de la Lune, dont la table termine tout ce qui appartient au Soleil & à la Lune. L'inclinaison de l'orbite de la Lune n'est, dans cette table, que de $4^d\ 30'$; c'est le seul élément de la théorie de la Lune, qui diffère de nos tables, d'une quantité même assez considérable, car cette inclinaison s'observe de 5 degrés au moins.

Cette différence d'un demi-degré ou 30 minutes, suffit pour faire trouver écliptique une pleine Lune qui pourroit cependant n'être pas éclipsée; mais dans ce cas même, la Lune n'éviteroit l'ombre de la Terre que d'une très-petite quantité; elle en effleureroit au moins la pénombre, & vraisemblablement en apercevroit-on quelques vestiges.

Nous ne savons pas comment les Brames ont déterminé l'inclinaison de l'orbite de la Lune: s'ils l'ont déduite des éclipses, on sait qu'à une si petite distance du nœud, une erreur de 4 à 5 secondes dans la latitude, en occasionne une de 4 à 5 minutes, à 90 degrés du nœud, dans l'arc qui mesure l'inclinaison de l'orbite.

Il est beaucoup plus vraisemblable de penser qu'ils ont déterminé cette inclinaison, en comparant la Lune à des étoiles remarquables. Cette méthode qu'ils paroissent avoir suivie dans toutes les observations qu'ils ont faites originairement sur la Lune, étoit infiniment plus sûre que la première; pour qu'ils se trompassent en effet d'un demi-degré sur l'inclinaison, il eût fallu qu'ils se fussent trompés dans leurs observations, d'une quantité égale au diamètre entier de la Lune, ce qui est impossible.

Enfin des Astronomes qui ont déterminé la plus grande équation du centre de la Lune, à deux ou trois minutes près de ce que nous trouvons aujourd'hui pour cette

équation, ne peuvent pas avoir commis une erreur de 30 minutes & même plus sur l'inclinaison de l'orbite lunaire. Il se peut très-bien, & je serois assez porté à le penser, que les Brames, en construisant leurs tables, aient diminué à dessein l'inclinaison de l'orbite lunaire; à moins que l'on n'aime mieux supposer encore que cette inclinaison a augmenté depuis la construction de ces tables, comme on admet une diminution dans l'obliquité de l'écliptique depuis deux à trois mille ans.

Un fait est certain, c'est que la même table qui donne ici la latitude de la Lune de degré en degré, l'inclinaison de son orbite de $4^d\ 30'$ seulement, donne également la déclinaison du Soleil pour les mêmes degrés, & l'obliquité de l'écliptique de 24 degrés juste, mais que nous n'observons cependant aujourd'hui que de $23^d\ 28'\ \frac{1}{4}$; en sorte que la somme de l'obliquité de l'écliptique & de l'inclinaison de l'orbite de la Lune, est de $28^d\ 30'$ dans ces tables, & de 28^d 29 à $30'$ dans les nôtres; ce qui sembleroit indiquer que les Brames auroient bien observé; & que l'inclinaison de l'orbite de la Lune auroit augmenté d'un degré ou environ, depuis leurs premières observations & la construction de leurs tables.

Dans la supposition que les Brames auroient diminué à dessein l'inclinaison observée de l'orbite de la Lune, on en pourroit peut-être trouver la raison dans les motifs qui les engagent à prédire les éclipses, mais je réserve ces détails pour nos assemblées particulières.

TABLES INDIENNES des mouvemens du Soleil, de la Lune, & de leurs diamètres apparens ; de la latitude de la Lune, & de l'obliquité de l'Écliptique, dont il est question dans le Mémoire précédent.

Pour le Soleil.

Ravimanda.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Padacani.	2.	4.	7.	9.	11.	13.	16.	18.	20.	23.
Danagatti.	20.	20.	0.	19.	38.	57.	15.	33.	51.	8.
Bougogatti.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.
	26.	26.	26.	26.	25.	25.	24.	24.	24.	23.
	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.
	50.	50.	50.	50.	51.	51.	51.	52.	52.	53.

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
25.	27.	29.	32.	34.	36.	38.	41.	43.	45.
24.	40.	55.	10.	24.	37.	49.	0.	11.	21.
61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.
22.	22.	21.	21.	20.	29.	16.	17.	17.	16.
56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	57.
54.	54.	55.	55.	56.	57.	58.	59.	59.	0.

21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
47.	49.	51.	53.	55.	57.	60.	62.	63.	65.
30.	38.	45.	51.	56.	59.	0.	0.	59.	57.
61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.
15.	14.	13.	12.	10.	9.	7.	6.	5.	4.
57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.
1.	2.	3.	4.	6.	7.	9.	10.	11.	12.

31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
67.	69.	71.	73.	75.	77.	79.	70.	72.	84.
53.	49.	43.	36.	27.	17.	6.	54.	40.	25.
61.	61.	61.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.
3.	2.	0.	59.	57.	56.	55.	54.	52.	51.
57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.
13.	14.	16.	17.	19.	20.	21.	22.	24.	25.

41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
86.	87.	89.	91.	92.	94.	95.	97.	98.	100.
8.	49.	28.	5.	40.	15.	50.	23.	53.	20.
60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.
49.	45.	45.	44.	42.	41.	40.	38.	37.	35.
57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.
27.	29.	31.	32.	34.	35.	36.	38.	39.	41.

51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
101.	103.	104,	105.	107.	108.	109.	110.	112.	113.
45.	9.	32.	53.	11.	28.	43.	13.	7.	15.
60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.
34.	31.	30.	28.	26.	24.	22.	20.	18.	16.
57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	58.
43.	45.	46.	48.	50.	52.	56.	57.	58.	0.

61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
114.	115.	116.	117.	118.	119.	120.	121.	121.	122.
21.	25.	28.	27.	27.	23.	17.	9.	59.	47.
60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	59.	59.	59.
13.	11.	9.	6.	6.	4.	1.	59.	57.	55.
58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.
3.	4.	7.	8.	10.	12.	15.	17.	21.	21.

71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
123.	124.	124.	125.	126.	126.	127.	127.	128.	128.
33.	14.	58.	36.	11.	44.	15.	44.	11.	36.
59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.
53.	51.	48.	45.	42.	40.	38.	36.	34.	32.
58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.
23.	25.	28.	31.	34.	36.	38.	40.	42.	44.

81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.
128.	129.	129.	129.	130.	130.	130.	130.	130.	130.
59.	19.	36.	51.	5.	15.	22.	21.	31.	34.
59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.
30.	27.	24.	22.	20	17.	15.	12.	11.	8.
58.	58.	58.	58.	58.	58.	59.	59.	59.	59.
46.	49.	52.	54.	56.	59.	1.	4.	5.	8.

Pour la Lune.

Chandra.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Padacani.	5.	10.	16.	21.	26.	31.	37.	42.	47.	52.
	20.	40.	0.	19.	38.	35.	12.	28.	44.	59.
	860.	860.	860.	860.	859.	859.	859.	859.	859.	858.
	15.	15.	15.	11.	52.	43.	32.	21.	3.	51.
	720.	720.	720.	720.	721.	721.	721.	721.	722.	722.
	55.	55.	55.	59.	8.	27.	38.	49.	4.	19.

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
58.	63.	68.	73.	79.	84.	89.	94.	99.	104.
13.	26.	38.	50.	9.	13.	23.	31.	37.	40.
858.	858.	857.	857.	857.	856.	856.	856.	855.	855.
36.	16.	58.	38.	22.	51.	30.	2.	48.	0.
722.	722.	722.	723.	723.	724.	724.	725.	725.	726.
35.	54.	5.	37.	48.	19.	40.	8.	21.	10.

21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
109.	114.	119.	124.	128.	133.	137.	142.	146.	151.
39.	35.	26.	12.	51.	26.	57.	28.	57.	37.
854.	854.	853.	853.	852.	851.	851.	850.	850.	849.
43.	7.	42.	9.	48.	50.	50.	58.	16.	58.
726.	727.	727.	728.	728.	729.	729.	730.	730.	730.
37.	8.	28.	1.	22.	20.	40.	10.	14.	12.

31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
156.	160.	165.	169.	173.	178.	182.	186.	190.	194.
5.	25.	0.	23.	45.	3.	15.	24.	30.	34.
849.	848.	847.	847.	846.	845.	845.	844.	844.	843.
10.	34.	58.	23.	39.	58.	23.	38.	3.	31.
732.	732.	733.	733.	734.	735.	735.	736.	737.	737.
0.	24.	12.	47.	31.	12.	47.	32.	7.	36.

41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
198.	202.	206.	210.	213.	227.	221.	224.	228.	231.
34.	30.	24.	16.	58.	36.	11.	45.	15.	44.
842.	842.	841.	840.	839.	839.	837.	836.	835.	834.
51.	58.	21.	35.	42.	0.	45.	40.	35.	31.
738.	739.	739.	740.	741.	742.	743.	748.	745.	746.
19.	12.	49.	35.	28.	10.	25.	30.	38.	39.

51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
235.	238.	241.	244.	247.	250.	253.	256.	259.	261.
6.	24.	37.	45.	45.	46.	41.	32.	27.	55.
833.	832.	831.	830.	829.	828.	821.	826.	824.	823.
35.	34.	31.	12.	33.	47.	1.	30.	48.	20.
747.	748.	749.	750.	751.	752.	753.	754.	756.	757.
35.	36.	39.	58.	31.	29.	3.	40.	21.	61.

61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
264.	267.	269.	271.	274.	276.	278.	280.	282.	284.
30.	3.	28.	49.	6.	18.	28.	34.	28.	20.
822.	822.	821.	890.	819.	818.	816.	815.	814.	813.
53.	53.	13.	13.	2.	13.	58.	45.	54.	41.
758.	758.	759.	759.	762.	762.	764.	765.	766.	767.
13.	50.	57.	57.	8.	57.	12.	15.	16.	39.

Azamayanamou.

71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
285.	287.	289.	290.	292.	293.	294.	295.	297.	298.
54.	35.	5.	39.	6.	28.	45.	57.	4.	6.
812.	811.	810.	809.	808.	806.	805.	804.	803.	802.
34.	25.	20.	5.	7.	43.	42.	31.	16.	9.
768.	769.	770.	772.	773.	774.	775.	776.	777.	779.
36.	45.	50.	5.	3.	37.	39.	39.	54.	1.

81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.
299.	299.	300.	301.	301.	301.	301.	309.	309.	302.
0.	50.	37.	10.	25.	59.	52.	4.	15.	26.
800.	799.	798.	797.	796.	794.	793.	792.	791.	790.
56.	30.	21.	20.	11.	51.	38.	23.	13.	35.
780.	781.	782.	783.	784.	786.	787.	788.	789.	790.
14.	31.	49.	50.	59.	19.	33.	47.	57.	35.

Pour les Planètes.

Abazarda.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Padacani.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
Danam.	1.	2.	3.	4.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
Bouſſam.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
	59.	58.	57.	56.	54.	53.	52.	51.	50.	49.

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	21.	22.	23.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
47.	46.	45.	43.	43.	42.	41.	39.	38.	37.

21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
24.	25.	26.	27.	29.	30.	31.	32.	33.	34.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
36.	35.	34.	33.	31.	30.	28.	27.	27.	26.

31.	32,	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
36.	37.	38.	39.	40.	41.	42.	43.	44.	45.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
24.	23.	22.	21.	20.	19.	18.	17.	16.	15.

41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
46.	47.	48.	49.	50.	51.	52.	53.	54.	55.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.	8.	6.	5.

51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	16.	16.	16.	16.
56.	57.	58.	58.	59.	0.	1.	2.	2.	3.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	13.	13.	13.	13.
4.	3.	2.	2.	1.	0.	59.	58.	57.	57.

61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.
4.	4.	5.	6.	7.	7.	8.	8.	9.	9.
13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.
56.	56.	53.	54.	53.	53.	52.	52.	51.	51.

71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.
10.	10.	11.	12.	12.	12.	12.	13.	13.	13.
13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.
50.	50.	49.	48.	48.	48.	48.	47.	47.	47.

81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.
16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.
13.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	15.	15.
13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.
47.	46.	46.	46.	46.	46.	46.	46.	45.	45.

Les Tables ſuivantes repréſentent la latitude de la Lune & l'obliquité de l'écliptique: la clé que j'ai trouvée pour ouvrir l'entrée aux Tables précédentes ſervira pour les ſuivantes.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	Cranti
24.	48.	73.	197.	121.	145.	170.	194.	218.	242.	Chach
23.	46.	8.	28.	44.	57.	10.	20.	23.	30.	Cheba
4.	9.	14.	18.	23.	28.	37.	37.	42.	46.	
44.	28.	11.	53.	34.	13.	52.	30.	8.	46.	

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
266.	290.	314.	338.	361.	385.	408.	432.	455.	478.
28.	25.	15.	1.	41.	17.	47.	10.	28.	38.
51.	55.	60.	65.	69.	74.	78.	83.	87.	62.
23.	59.	35.	10.	44.	15.	45.	17.	42.	8.

21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
501.	524.	547.	570.	592.	614.	636.	659.	680.	702.
41.	35.	22.	5.	27.	46.	58.	2.	50.	39.
96.	100.	105.	109.	113.	118.	122.	126.	130.	135.
30.	55.	18.	57.	52.	22.	26.	38.	53.	0.

31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
723.	745.	766.	787.	808.	828.	848.	868.	887.	908.
56.	33.	40.	31.	9.	33.	47.	45.	37.	7.
139.	143.	147.	150.	154.	158.	162.	166.	169.	173.
3.	5.	3.	58.	50.	40.	26.	9.	49.	25.

41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
927.	946.	965.	983.	1001.	1019.	1037.	1054.	1071.	1088.
21.	27.	13.	41.	52.	50.	29.	48.	47.	26.
176.	180.	183.	187.	190.	194.	197.	200.	203.	206.
58.	30.	53.	23.	44.	2.	17.	29.	36.	40.

51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
1104.	1120.	1136.	1152.	1167.	1181.	1196.	1220.	1223.	1237.
50.	54.	40.	5.	10.	54.	16.	14.	44.	15.
209.	212.	215.	218.	221.	223.	226.	228.	231.	233.
39.	35.	29.	17.	0.	41.	18.	49.	18.	43.

61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
1250.	1262.	1274.	1286.	1297.	1308.	1319.	1329.	1338.	1348.
3.	31.	36.	20.	27.	30.	3.	9.	48.	7.
236.	238.	240.	242.	244.	246.	248.	250.	251.	253.
2.	18.	29.	35.	45.	27.	20.	7.	50.	29.

71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
1356.	1365.	1373.	1380.	1387.	1394.	1400.	1406.	1411.	1416.
55.	20.	20.	53.	55.	29.	49.	33.	52.	46.
255.	256.	257.	259.	260.	261.	262.	263.	264.	265.
5.	34.	58.	19.	36.	47.	54.	57.	51.	40.

81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.
1421.	1425.	1428.	1431.	1435.	1436.	1437.	1439.	1439.	1440.
8.	6.	36.	29.	5.	14.	55.	0.	41.	0.
266.	267.	267.	267.	268.	268.	269.	269.	269.	270.
22.	0.	23.	59.	47.	47.	8.	28.	46.	0.



SUPPLÉMENT

Où l'on fait voir que les Équations aux différences ordinaires, pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites, sont susceptibles d'une véritable intégration, & que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux différences partielles élevées.

Par M. MONGE.

I.

ON sait que toutes les équations aux différences ordinaires à deux variables, appartiennent à des courbes réelles. En effet, pour le premier ordre, elles peuvent toutes, excepté une seule, être mises sous la forme $Mdx + Ndy = 0$; & par conséquent, étant pris un point à volonté, c'est-à-dire, étant données les valeurs de x & de y, on peut toujours trouver par cette équation l'inclinaison de la tangente à la courbe en ce point, ou, ce qui revient au même, trouver la direction du point décrivant, parce que cette direction est déterminée par le rapport de dy à dx, que donne cette équation. Pour le second ordre, toutes les équations à deux variables, excepté une seule, peuvent être mises sous la forme $Lddy + Mddx + N = 0$, L, M, N, renfermant les variables avec leurs différences premières. Ainsi, étant donné un point à volonté, & la direction de la tangente en ce point, ce qui détermine $x, y, \frac{dy}{dx}$; & faisant la valeur de ddx, une hypothèse arbitraire, ce dont on est le maître; il est toujours possible, au moyen de

l'équation différentielle, de trouver la valeur de ddy, & par conséquent, le changement de direction que le point décrivant éprouve dans cet endroit de la courbe, ou, ce qui revient au même, de trouver le rayon de courbure de la courbe. Il en est de même des ordres supérieurs.

Lorsque les équations différentielles du premier ordre renferment plus de deux variables, on peut les diviser en deux classes; les unes, comme les suivantes,

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2),$$
$$z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2),$$

sont élevées par rapport aux différences, & elles sont toutes regardées comme absurdes; les autres peuvent être ramenées à la forme linéaire

$$Ldx + Mdy + Ndz \ldots = 0,$$

dans laquelle les coéfficiens $L, M, N \ldots$ peuvent renfermer les variables sous des radicaux; & parmi ces dernières, celles qui ne satisfont pas à certaines conditions, sont encore regardées comme absurdes. Le nombre des conditions dont il s'agit ici, est toujours égal au nombre des variables, moins deux; par exemple, pour le cas de trois variables, si l'équation différentielle est mise sous la forme $dz = pdx + qdy$, l'équation de condition est $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$, que l'on peut développer de la manière suivante:

$$L\left[\left(\frac{dM}{dz}\right) - \left(\frac{dN}{dy}\right)\right] + M\left[\left(\frac{dN}{dx}\right) - \left(\frac{dL}{dz}\right)\right]$$
$$+ N\left[\left(\frac{dL}{dy}\right) - \left(\frac{dM}{dx}\right)\right] = 0.$$

Pour le cas de quatre variables, si l'équation différentielle est mise sous la forme $dz = pdu + qdx + rdy$, les conditions sont

$$\left(\frac{ddp}{dudy}\right) = \left(\frac{ddq}{dudy}\right).$$

$$\left(\frac{ddp}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{ddr}{du\,dx}\right),$$

& on peut les développer comme dans le cas précédent.

S'il y a cinq variables, & que l'équation différentielle soit sous la forme $dz = pdv + qdu + rdx + sdy$, les trois conditions sont

$$\left(\frac{d^3 p}{du\,dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^3 q}{dv\,dx\,dy}\right),$$

$$\left(\frac{d^3 p}{du\,dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^3 r}{dv\,du\,dy}\right),$$

$$\left(\frac{d^3 p}{du\,dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^3 s}{dv\,du\,dx}\right);$$

& ainsi de suite, pour un plus grand nombre de variables.

Je me propose de faire voir qu'il n'y a aucune équation différentielle qui soit absurde, si toutefois l'on entend par le mot qu'elle exprime, une propriété impossible, imaginaire,....... &c. Je ferai voir que toutes les équations différentielles expriment des propriétés réelles, soit qu'elles satisfassent ou non aux conditions que je viens de rapporter; je montrerai qu'elles sont toutes susceptibles d'une véritable intégration, & pour jeter sur cette matière un plus grand jour, j'exposerai ce que signifient, dans l'espace, celles qui sont à trois variables.

I I.

De toutes les équations aux différences ordinaires du premier ordre, & à deux variables, il n'y en a qu'une seule qui ne soit pas linéaire, & cette équation est

$$M^2 dx^{2m} + N^2 dy^{2m} = 0,$$

M, N étant fonctions de x, y; or, cette équation ne peut rien exprimer de réel, à moins que l'on n'ait en même temps $M = 0$, $N = 0$, ou que l'on n'ait en même temps $dx = 0$, $dy = 0$. Le premier de ces deux résultats ne peut pas être regardé comme une intégrale, parce

parce qu'il ne renferme pas de constante arbitraire; donc, la véritable intégrale de cette équation est le système des deux équations simultanées $x = a$, $y = b$; c'est-à-dire, que l'équation dont il s'agit n'appartient pas à une ligne courbe, mais à un point unique quelconque, pris sur le plan des x, y. Il y a donc cette différence entre les équations linéaires du premier ordre à deux variables, & la seule équation de cet ordre qui soit élevée, que les premières appartiennent toutes à des courbes, & que l'intégrale de chacune d'elles est une équation unique, complétée par une seule constante arbitraire; tandis que la dernière appartient à un point, & que son intégrale est le système de deux équations finies simultanées, & complétées par deux arbitraires.

La propriété de l'équation aux différences ordinaires élevées, du premier ordre & à deux variables, avoit déjà été observée; mais comme cette équation est unique, on l'avoit regardée comme une exception à la règle générale, & l'on n'avoit pas remarqué que c'étoit le commencement d'une chaîne immense, à laquelle tenoient les plus grandes difficultés du calcul intégral. En effet, parmi les équations aux différences ordinaires à trois variables, celles qui satisfont à la condition que j'ai rapportée dans l'*article précédent*, & qui est connue sous le nom de *condition d'intégrabilité*, appartiennent toutes à des surfaces courbes, & l'intégrale de chacune d'elles est une équation unique, complétée par une seule constante arbitraire; mais toutes les équations qui ne satisfont pas à cette condition, sont en nombre infini, & elles n'appartiennent pas à des surfaces; leurs lieux sont des courbes à double courbure, tracées dans l'espace, & l'intégrale de chacune d'elles est le système de deux équations simultanées. Enfin, parmi ces équations, il n'y en a qu'une seule,

$$M^2 dx^{2m} + N^2 dy^{2m} + P^2 dz^{2m} = 0,$$

dont l'intégrale soit le système de trois équations finies simultanées, $x = a$, $y = b$, $z = c$; elle n'appartient ni à une surface courbe, ni à une courbe à double courbure; son lieu est un point unique pris arbitrairement dans l'espace.

Pour les équations aux différences ordinaires du premier ordre, à quatre variables, l'intégrale de celles qui satisfont en même temps aux deux conditions que j'ai rapportées, est une seule équation complétée par une seule constante arbitraire; l'intégrale de celles qui ne satisfont qu'à une seule de ces deux conditions, est le système de deux équations simultanées; l'intégrale de celles qui ne satisfont à aucune des deux conditions, est le système de trois équations finies simultanées; enfin il n'y en a qu'une seule,

$$M^2 du^{2m} + N^2 dx^{2m} + P^2 dy^{2m} + Q^2 dz^{2m} = 0,$$

dont l'intégrale soit le système de quatre équations simultanées, $u = a$, $x = b$, $y = c$, $z = e$. Il en est de même pour un plus grand nombre de variables.

Ainsi l'objet des équations connues sous le nom de *conditions d'intégrabilité*, n'est pas, comme on l'a cru jusqu'ici, d'indiquer celles des équations différentielles dont les intégrales sont possibles, mais de faire connoître le nombre des équations finies simultanées dont doivent être composées les intégrales qui sont toujours possibles. Avant que d'aller plus loin, éclaircissons ce qu'on vient de voir, par des exemples simples.

III.

EXEMPLE I. Soit proposée l'équation

$$(A) \qquad dz^2 = a^2 (dx^2 + dy^2),$$

dans laquelle a est une constante donnée. Il est bien évident que cette équation appartient à la courbe à double courbure, dont les élémens font un angle constant avec le plan des x, y; ainsi les équations de toutes les droites

qui font le même angle avec le plan des x, y, doivent satisfaire à la proposée, quelles que soient d'ailleurs les directions de ces droites; or ces équations sont

$$(B) \qquad x = \alpha z + \beta,$$

$$(C) \qquad y = z\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha^2} - \alpha^2\right)} + \gamma,$$

α, β, γ étant trois constantes arbitraires; donc le système de ces deux équations prises simultanément est une solution de la proposée. En effet, si l'on différencie ces deux équations, les deux constantes arbitraires β, γ, s'évanouiront, & l'on aura

$$dx = \alpha dz,$$

$$dy = dz\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} - \alpha^2\right)};$$

& éliminant α entre ces deux dernières équations, on aura

$$dz^2 = a^2 (dx^2 + dy^2).$$

Quoique le système des deux équations *(A)*, *(B)*, soit complété par trois constantes arbitraires, α, β, γ, on va voir qu'il n'est pas l'intégrale complète de l'équation *(A)*, & que cette intégrale complète est encore plus générale.

Si l'on élimine entre *(A)* & *(B)* la constante α, l'équation résultante

$$(x - \beta)^2 + (y - \gamma)^2 = \frac{z^2}{a^2}$$

sera celle de toutes les surfaces coniques dont les sommets seront dans le plan des x, y, & dont les côtés feront avec ce plan l'angle constant; si l'on fait $\gamma = \varphi\beta$, φ étant une fonction arbitraire, l'équation

$$(x - \beta)^2 + (y - \varphi\beta)^2 = \frac{z^2}{a^2}$$

appartiendra seulement à celles de ces surfaces coniques dont le sommet sera placé sur une certaine courbe tracée dans le plan des x, y, l'équation de cette courbe étant

$y = \varphi x$; & si l'on considère deux de ces surfaces courbes consécutives, elles se couperont en une droite dont on aura la seconde équation, en différenciant l'équation des cônes par rapport au paramètre variable ζ; ainsi les équations de cette droite seront

$$(D) \quad (x - \zeta)^2 + (y - \varphi\zeta)^2 = \frac{z^2}{a^2},$$

$$(E) \quad x - \zeta + (y - \varphi\zeta)\varphi'\zeta = 0.$$

Cette droite formera encore avec le plan des x, y, l'angle constant, & elle sera une de celles qui satisfont à l'équation (A). Mais si l'on considère la suite des surfaces coniques, on aura une suite de droites comme la précédente, qui ne différeront de position qu'en vertu du paramètre variable ζ; & toutes ces droites se trouvant deux à deux consécutivement sur une même surface conique, elles se couperont nécessairement deux à deux consécutivement, & elles seront par conséquent les tangentes d'une même courbe à double courbure: donc les tangentes de cette courbe à double courbure étant également inclinées au plan des x, y, les élémens de cette courbe feront, avec ce plan, des angles constans; donc enfin les équations de cette courbe seront l'intégrale complète de la proposée.

Or il est évident que l'on aura les équations de la courbe à double courbure, en différenciant les deux équations (D), (E), par rapport au paramètre variable ζ; de plus, l'équation (E) est déjà la différentielle de (D) prise de cette manière: donc l'intégrale complète de l'équation (A), est le système des trois équations simultanées,

$$(D) \quad (x - \zeta)^2 + (y - \varphi\zeta)^2 = \frac{z^2}{a^2},$$

$$(E) \quad x - \zeta + (y - \varphi\zeta)\varphi'\zeta = 0,$$

$$(F) \quad -1 - (\varphi'\zeta)^2 + (y - \varphi\zeta)\varphi''\zeta = 0,$$

dont les deux dernières sont les différentielles première

& seconde de *(D)*, prises en ne faisant varier que l'indéterminée ζ, & dans lesquelles φ est une fonction arbitraire; c'est-à-dire, que cette intégrale est le résultat de l'élimination de l'indéterminée ζ entre les trois équations *(D)*, *(E)*, *(F)*.

Il est facile de vérifier cette intégrale par la différenciation : en effet, les différentielles des deux équations *(D)*, *(E)*, prises par rapport à ζ, ayant lieu, il s'ensuit que l'on peut différencier ces deux équations, en regardant ζ comme constante, ce qui donnera

$$(d) \quad (x - \zeta)\,dx + (y - \varphi\zeta)\,dy = \frac{z\,dz}{a^2},$$

$$(e) \quad dx + dy\,\varphi'\zeta = 0;$$

& éliminant entre les quatre équations *(D)*, *(E)*, *(d)*, *(e)*, les trois indéterminées ζ, $\varphi\zeta$, $\varphi'\zeta$, on aura

$$(A) \quad dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

Le filet d'une vis dont l'axe est perpendiculaire au plan des x, y, est un cas particulier de cet exemple; & le filet d'une vis tracée sur une surface cylindrique à base quelconque, & perpendiculaire au plan des x, y, en est le cas général.

I V.

EXEMPLE II. Soit proposée l'équation

$$(A) \quad z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2),$$

dans laquelle a est une constante donnée. Il est évident, à cause de la proportion

$$a : z :: \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} : \sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$

que si l'on conçoit un cercle dont le rayon soit a, dont le centre soit dans le plan des x, y, & dont le plan soit perpendiculaire à ce dernier, la proposée appartient à toutes les courbes dont l'élément fait avec le plan des x, y, le même angle que l'élément du cercle pris à même hauteur, ou, ce qui revient au même, pris pour un z égal à celui

de la courbe; donc tous les cercles, dont le rayon eſt a, dont les plans ſont parallèles aux z, & dont les centres ſont placés dans le plan des x, y, doivent ſatisfaire à la propoſée : or les équations de ces cercles ſont

$$(B)\ (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = a^2,$$
$$(C)\ \ x - \alpha = \gamma\,(y - \beta),$$

α, β, γ étant trois conſtantes arbitraires; donc le ſyſtème de ces deux équations priſes ſimultanément, eſt une ſolution particulière de l'équation (A). En effet, ſi l'on différencie les deux (A), (B), on aura

$$(x - \alpha)\,dx + (y - \beta)\,dy + z\,dz = 0,$$
$$dx = \gamma\,dy,$$

& ſi l'on élimine entre ces quatre équations les trois arbitraires α, β, γ, l'équation réſultante ſera la propoſée. Quoique le ſyſtème des deux équations (A), (B), ſoit complété par trois arbitraires, on verra cependant que l'intégrale complète de la propoſée eſt encore plus générale.

L'équation (B) appartient à une ſphère dont le rayon eſt a, & dont le centre eſt placé ſur le plan des x, y, en un point dont les coordonnées ſont α, β; ſi l'on fait $\beta = \varphi\alpha$, l'équation

$$(D)\ (x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + z^2 = a^2$$

appartiendra à toutes les ſphères de même rayon, dont les centres ſeront placés dans le plan des x, y, ſur une certaine courbe, l'équation de cette courbe étant $y = \varphi x$; ſi parmi ces ſphères on en conſidère deux conſécutives, elles ſe couperont ſuivant un cercle, dont on aura la ſeconde équation en différenciant l'équation de la ſphère par rapport au paramètre variable β; ainſi les équations de ce cercle ſeront

$$(D)\ (x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + z^2 = a^2$$
$$(E)\ \ x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\,\varphi'\alpha = 0,$$

& ces équations ſatisferont encore à la propoſée. Mais ſi l'on conſidère la ſuite des ſphères, dont les centres ſont placés ſur la même courbe, on aura une ſuite de cercles comme le précédent, qui ne différeront qu'en vertu du paramètre variable β; tous ces cercles ſe trouvant deux à deux conſécutivement ſur une même ſphère, ils pourront ſe couper deux à deux conſécutivement, & la ſuite de leurs points d'interſection formera une courbe à double courbure touchée par tous les cercles : donc chaque élément de cette courbe à double courbure étant commun à un des cercles, cet élément fera, avec le plan des x, y, l'angle comporté par la propoſée ; donc les équations de cette courbe à double courbure ſeront l'intégrale complète de l'équation *(A)*.

Or il eſt évident que, pour avoir les équations de cette courbe à double courbure, il faut différencier les équations *(D)*, *(E)*, par rapport au paramètre variable α ; de plus l'équation *(E)* eſt déjà la différentielle de *(D)* priſe de cette manière : donc il ſuffira de différencier *(E)* ; donc l'intégrale complète de la propoſée ſera le ſyſtème des trois équations ſimultanées

$$(D)\ (x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + z^2 = a^2,$$
$$(E)\ x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\varphi'\alpha = 0,$$
$$(F)\ -1 - (\varphi'\alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)\varphi''\alpha = 0;$$

dont les deux dernières ſont les différentielles première & ſeconde de *(D)*, priſe en regardant α comme ſeule variable, & dans leſquelles φ eſt une fonction arbitraire ; c'eſt-à-dire que l'intégrale complète eſt le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations *(D)*, *(E)*, *(F)* ; & que, dans chaque cas particulier, cette intégrale ne peut être exprimée que par le ſyſtème de deux équations ſimultanées.

Pour vérifier ce réſultat par la différenciation, il faut remarquer que les différentielles des deux équations *(D)*, *(E)*, priſes par rapport à α, ont lieu, & qu'ainſi on peut

différencier les deux équations (D), (E), en regardant α comme constante : or si l'on exécute cette différenciation, on a les deux équations

$$(d)\quad (x - \alpha)dx + (y - \varphi\alpha)dy + z\,dz = 0\,;$$
$$(e)\quad dx + dy\,\varphi'\alpha = 0,$$

& si, entre les quatre équations (D), (E), (d), (e), on élimine les trois indéterminées α, $\varphi\alpha$, $\varphi'\alpha$, on trouve

$$(A)\quad z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2),$$

donc l'intégrale que l'on vient de trouver est exacte.

V.

EXEMPLE III. Soit proposée l'équation

$$(A)\quad \left.\begin{array}{l}(x\,dy - y\,dx)^2\\(y\,dz - z\,dy)^2\\(z\,dx - x\,dz)^2\end{array}\right\} = a^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,;$$

dans laquelle a est une constante donnée. Si l'on met cette équation sous la forme

$$d.\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)},$$

il sera facile de reconnoître qu'elle appartient à toutes les courbes à double courbure dont les tangentes sont en même-temps tangentes à une sphère dont le rayon est a, & dont le centre est à l'origine ; donc les équations de toutes les tangentes à la sphère seront une solution particulière de la proposée ; or les équations de ces tangentes sont

$$(B)\quad \alpha x + \beta y + z\sqrt{(a^2 - \alpha^2 - \beta^2)} = a^2\,;$$
$$(C)\quad x - \alpha = \gamma(y - \beta),$$

α, β étant les coordonnées du point de contact, & γ déterminant la direction de la tangente ; donc si, dans ces équations

équations, on regarde comme arbitraires les trois quantités α, β, γ, on aura une ſolution particulière de la propoſée, ce dont il eſt facile de s'aſſurer par la différenciation.

Quoique les deux équations *(B)*, *(C)*, ſoient complétées par trois arbitraires, on va voir cependant qu'elles ne ſont pas encore l'intégrale complète de l'équation *(A)*.

L'équation *(B)* eſt celle du plan tangent à la ſphère pour un point de contact, dont les coordonnées, dans les ſens des x & y, ſont reſpectivement α, β: ſi l'on fait $\beta = \varphi\alpha$, on détermine le point de contact à être placé ſur une certaine courbe, dont la projection ſur le plan des x, y, a pour équation $y = \varphi x$; & l'équation du plan tangent devient

$$(D)\quad \alpha x + y\varphi\alpha + z\sqrt{[a^2 - \alpha^2 - (\varphi\alpha)^2]} = a^2.$$

Si l'on conſidère deux plans tangens conſécutifs, ces plans ſe couperont ſuivant une droite tangente à la ſphère, & on aura la ſeconde équation de cette droite, en différenciant celle du plan par rapport au paramètre variable α; ainſi les deux équations de cette droite ſeront

$$(D)\quad \alpha x + y\varphi\alpha + z\sqrt{[a^2 - \alpha^2 - (\varphi\alpha)^2]} = a^2,$$

$$(E)\quad x + y\varphi'\alpha - z\,\frac{\alpha + \varphi\alpha\,\varphi'\alpha}{\sqrt{[a^2 - \alpha^2 - (\varphi\alpha)^2]}} = 0;$$

& parce que la droite, à laquelle appartiennent ces deux équations, eſt tangente à la ſphère, il s'enſuit qu'elles ſatisfont à la propoſée. Mais ſi l'on conſidère la ſuite de tous les plans qui touchent la ſphère dans les points pris ſur la courbe, on aura une ſuite de droites comme la précédente, & ces droites priſes deux à deux conſécutivement ſe couperont, puiſqu'elles ſeront deux à deux dans un même plan tangent; donc elles ſeront les tangentes d'une même courbe à double courbure; & les équations de cette courbe à double courbure ſeront l'intégrale complète de la propoſée. Or il eſt évident que, pour

avoir les équations de cette courbe à double courbure; il faut différencier les équations *(D)*, *(E)*, de la droite, par rapport au paramètre variable α; de plus l'équation *(E)* étant déjà la différentielle de *(D)* prise de cette manière, il suffira de différencier *(E)*: donc en faisant, pour abréger,

$$a^2 - \alpha^2 - (\varphi\alpha)^2 = (\psi\alpha)^2,$$

l'intégrale complète de la proposée sera le système des quatre équations simultanées

$$\begin{array}{ll} (D) & \alpha x + y\varphi\alpha + z\psi\alpha = a^2, \\ (E) & x + y\varphi'\alpha + z\psi'\alpha = 0, \\ (F) & y\varphi''\alpha + z\psi''\alpha = 0, \\ & \alpha^2 + (\varphi\alpha)^2 + (\psi\alpha)^2 = a^2, \end{array}$$

dans lesquelles φ & ψ sont des fonctions arbitraires; de ces quatre équations la dernière est destinée à l'élimination actuelle de la fonction surabondante; & *(E)*, *(F)*, sont les différences première & seconde de *(D)*, prises en regardant α comme seule variable. L'élimination d'une des fonctions étant faite, l'intégrale sera le résultat de l'élimination de α entre les trois équations *(D)*, *(E)*, *(F)*.

Il est facile de vérifier ce résultat par la différenciation, comme ceux des deux exemples précédens.

Dans mon Mémoire sur les développées des courbes à double courbure *(Tome X des Savans étrangers)*, j'ai donné le nom d'*Arrête de rebroussement* à la courbe touchée par toutes les droites qui constituent une surface développable; d'après cela, l'équation dont il s'agit ici appartient à l'arrête de rebroussement d'une surface quelconque développable circonscrite à la sphère.

VI.

LES trois exemples que je viens de rapporter suffisent pour faire voir, 1.° que les équations aux différences ordi-

naires à trois variables élevées, & qui ne fatisfont pas aux conditions d'intégrabilité, ne font pas abfurdes, mais qu'elles expriment des propriétés réelles; 2.° que ces équations font fufceptibles d'une véritable intégration, & que leurs lieux font des courbes à double courbure qui ne peuvent être exprimées que par le fyftème de deux équations fimultanées, les autres équations, quand leur nombre eft plus grand que deux, étant deftinées à éliminer des indéterminées, ou des fonctions furabondantes; 3.° que les intégrales de ces équations différentielles doivent être complétées par une fonction arbitraire, ce que les Géomètres ne s'étoient encore permis que pour les intégrales des équations aux différences partielles.

Ces confidérations ouvrent un nouveau champ à l'analyfe & à la géométrie, & elles donnent lieu à un calcul intégral qui mérite l'attention des Géomètres, car on verra dans la fuite que l'intégration des équations aux différences partielles élevées, ne dépend que de ce genre de calcul.

Je vais expofer quelques réfultats d'une affez grande généralité.

VII.

THÉORÈME I. L'intégrale complète de l'équation aux différences ordinaires à trois variables,

$$(A)\quad F\left(\frac{dx}{dz},\ \frac{dy}{dz}\right)=0,$$

dans laquelle les variables elles-mêmes n'entrent pas, & où F eft une fonction quelconque de deux quantités, algébrique ou tranfcendante, déterminée ou arbitraire, eft le réfultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations fuivantes,

$$(B)\quad F\left(\frac{x-\alpha}{z},\ \frac{y-\varphi\alpha}{z}\right)=0,$$

$$(C)\quad \left(\frac{dF}{d\alpha}\right)=0,$$

$$(D) \quad \left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

dans lesquelles F est la même fonction de deux quantités que celle de la proposée, & où φ est une fonction arbitraire.

Pour le démontrer, il faut observer que les différentielles des deux équations (B), (C), par rapport à l'indéterminée α ont lieu, & que par conséquent on peut différencier ces équations en regardant α comme constante, ce qui, en faisant pour abréger

$$\frac{x-\alpha}{z} = m, \quad \frac{y-\varphi\alpha}{z} = n,$$

donne

$$\left(\frac{dF}{dm}\right) dm + \left(\frac{dF}{dn}\right) dn = 0;$$

$$\left.\begin{array}{l} \left[\left(\frac{ddF}{dm^2}\right) + \left(\frac{ddF}{dn\,dm}\right) \varphi'\alpha\right] dm \\ + \left[\left(\frac{ddF}{dm\,dn}\right) + \left(\frac{ddF}{dn^2}\right) \varphi'\alpha\right] dn \end{array}\right\} = 0;$$

or ces deux dernières équations ne peuvent pas subsister indépendamment de la valeur de la fonction F, à moins que l'on n'ait en même-temps les deux équations suivantes $dm = 0$, $dn = 0$, ou

$$\frac{x-\alpha}{z} = \frac{dx}{dz},$$
$$\frac{y-\varphi\alpha}{z} = \frac{dy}{dz};$$

donc éliminant α & $\varphi\alpha$ de l'équation (B), au moyen des deux dernières, on aura la proposée

$$F\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0.$$

VIII.

L'ÉQUATION $dz^2 = a^2\,(dx^2 + dy^2)$ de l'*article III*, est dans le cas du théorème précédent, car elle peut être mise sous la forme

$$a^2\left(\frac{dx^2}{dz^2}+\frac{dy^2}{dz^2}\right)-1=0;$$

aussi nous avons vu que son intégrale complète est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre l'équation suivante,

$$a^2\left[\left(\frac{x-\alpha}{z}\right)^2+\left(\frac{y-\varphi\alpha}{z}\right)^2\right]-1=0,$$

& ses deux différentielles première & seconde, prises en regardant α comme seule variable.

I X.

THÉORÈME II. Les trois quantités X, Y, Z, étant composées chacune des trois variables x, y, z, l'intégrale complète de l'équation aux différences ordinaires du premier ordre,

$$F\left(\frac{dX}{dZ},\ \frac{dY}{dZ}\right)=0,$$

est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations suivantes,

$$F\left(\frac{X-\alpha}{Z},\ \frac{Y-\varphi\alpha}{Z}\right)=0,$$

$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right)=0,$$

$$\left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right)=0,$$

dans lesquelles la fonction F est la même que celle de la proposée, & où φ est une fonction arbitraire.

Ce théorème se démontre comme le précédent.

X.

L'ÉQUATION

$$z^2(dx^2+dy^2+dz^2)=a^2(dx^2+dy^2)$$

de l'*article IV*, est dans le cas du dernier théorème, car on peut le mettre sous la forme

$$\frac{z^2 dz^2}{a^2 - z^2} = dx^2 + dy^2,$$

ou ſous la ſuivante,

$$[d\sqrt{(a^2 - z^2)}]^2 = dx^2 + dy^2:$$

auſſi nous avons vu que ſon intégrale complète eſt le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre l'équation

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2 - z^2} + \frac{(y - \varphi\alpha)^2}{a^2 - z^2} = 1,$$

& ſes différentielles, première & ſeconde, priſes en regardant α comme ſeule variable.

X I.

Il ſuit de tout ce qu'on vient de voir, que ſi l'on conçoit une ſurface courbe dont l'équation $M = 0$, outre les trois coordonnées x, y, z, renferme encore un paramètre variable α, & une fonction arbitraire de ce paramètre, repréſentée par $\varphi\alpha$; & que ſi l'on imagine toutes les ſurfaces courbes différentes que l'on obtiendroit en donnant ſucceſſivement à α toutes les valeurs poſſibles, & en ſuppoſant que la forme de la fonction φ ſoit invariable, deux quelconques de ces ſurfaces, priſes conſécutivement, ſe couperont en une courbe, dont les équations ſeront

$$(A) \qquad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0;$$

la ſuite de ces courbes d'interſection compoſera une ſurface courbe qui ſera l'enveloppe de toutes les premières, & on aura l'équation finie de cette enveloppe, en x, y, z, en éliminant le paramètre variable α entre les deux équations *(A)*, *(B)*; mais cette élimination n'eſt pas poſſible en général, parce que la fonction φ eſt arbitraire.

De plus, ſi l'on conſidère les courbes d'interſection dont la ſuite compoſe l'enveloppe, deux quelconques de ces

courbes, prises conſécutivement, ſe couperont en un certain point dont les coordonnées ſeront déterminées par les trois équations

$$(A)\qquad M = 0,$$

$$(B)\quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(C)\quad \left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0;$$

& la ſuite de ces points compoſera une courbe à double courbure, dont on auroit les deux équations finies, en éliminant le paramètre α entre les trois équations *(A), (B), (C)*. La courbe à double courbure dont il s'agit ici, non-ſeulement touche toutes les ſurfaces poſſibles compriſes dans l'équation $M = 0$, mais encore chacun de ſes élémens ſe trouve ſur trois de ces ſurfaces priſes conſecutivement; enfin cette courbe eſt la limite de l'enveloppe.

Pour avoir l'équation différentielle de l'enveloppe, délivrée de la fonction arbitraire φ, il faut différencier l'équation *(A)*, & par rapport à x & par rapport à y, en regardant α & $\varphi\alpha$ comme conſtantes dans ces deux cas, ce qui eſt permis à cauſe de l'équation *(B)*; on aura donc alors les trois équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{dx}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = 0;$$

entre leſquelles, éliminant les deux quantités α & $\varphi\alpha$, on aura une équation aux différences partielles, $V = 0$, qui appartiendra à l'enveloppe, indépendamment de la forme de la fonction φ qui a diſparu, c'eſt-à-dire, qui appartiendra à toutes les enveloppes que l'on auroit en donnant, dans $M = 0$, à la fonction φ, ſucceſſivement toutes les formes poſſibles.

Quant à la limite, nous avons déjà vu que pour avoir

son équation il faut différencier aux différences ordinaires les deux équations *(A)*, *(B)*, en regardant α & $\varphi\alpha$ comme constantes, ce qui est permis en vertu des équations *(B)* *(C)*, & éliminer entre les quatre équations

$$(A) \qquad M = 0,$$
$$(B) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$d(A) \qquad dM = 0,$$
$$d(B) \quad d.\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

les trois quantités α, $\varphi\alpha$, $\varphi'\alpha$, ce qui produit une équation $U = 0$ du premier ordre, aux différences ordinaires élevées à trois variables, & pour laquelle la condition d'intégrabilité n'est pas satisfaite.

XII.

ACTUELLEMENT les deux équations

$$V = 0,$$
$$U = 0$$

dont la première est aux différences partielles, & dont la seconde est aux différences ordinaires, sont telles, que l'une quelconque étant donnée, il est toujours facile d'obtenir l'autre sans connoître leurs équations intégrales.

1.° Étant donnée l'équation aux différences partielles, $V = 0$, si l'on substitue pour p ou pour q sa valeur prise dans $dz = pdx + qdy$ (supposons que ce soit la valeur de p que l'on substitue), on aura une équation $V' = 0$, composée des variables x, y, z, de leurs différences ordinaires dx, dy, dz, & de la quantité q; & le résultat de l'élimination de la quantité q entre les deux équations

$$V' = 0,$$
$$\left(\frac{dV'}{dq}\right) = 0,$$

donnera l'équation aux différences ordinaires $U = 0$.

2.° Réciproquement, étant donnée $U = 0$, si l'on substitue

pour dz sa valeur $pdx + qdy$, on aura une équation $U' = 0$, composée des variables x, y, z, des différences partielles p, q, & de la quantité $\frac{dy}{dx}$. Je représente cette dernière quantité par ω; cela posé, le résultat de l'élimination de ω entre les deux équations

$$U' = 0,$$
$$\left(\frac{dU'}{d\omega}\right) = 0,$$

donnera l'équation aux différences partielles $V = 0$.

Par exemple, dans l'*article III*, l'équation $M = 0$ est

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 = \frac{z^2}{a^2},$$

& les deux équations $V = 0$, $U = 0$, sont

$$p^2 + q^2 = a^2,$$
$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

La première de ces deux équations étant posée, pour avoir la seconde, il faut substituer pour p sa valeur $\frac{dz - qdy}{dx}$, ce qui donne

$$q^2(dx^2 + dy^2) - 2qdydz + dz^2 - a^2dx^2 = 0;$$

différencier cette dernière équation en regardant q comme seule variable, ce qui donne

$$q(dx^2 + dy^2) = dydz,$$

en vertu de laquelle la précédente devient

$$qdydz = dz^2 - a^2dx^2;$$

& éliminant q entre les deux dernières, on trouve l'équation aux différences ordinaires

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

Réciproquement étant donnée l'équation

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2),$$

pour trouver l'équation aux différences partielles, il faut

ſubſtituer pour dz ſa valeur $pdx + qdy$, ce qui, en faiſant $\frac{dy}{dx} = \omega$, donne

$$\omega^2 (q^2 - a^2) + 2\omega pq + p^2 - a^2 = 0;$$

différencier cette équation en regardant ω comme ſeule variable, ce qui donne

$$\omega (q^2 - a^2) + pq = 0,$$
$$\omega pq + p^2 - a^2 = 0;$$

& éliminant ω, on trouve l'équation aux différences partielles

$$p^2 + q^2 = a^2.$$

XIII.

POUR démontrer en général la propoſition de l'*article précédent*, je ferai d'abord remarquer que le réſultat de l'élimination des deux quantités α, ζ, entre les trois équations

$$\varphi (\alpha, \zeta) = 0,$$
$$\left(\frac{d.\varphi (\alpha, \zeta)}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{d.\varphi (\alpha, \zeta)}{d\zeta}\right) = 0,$$

eſt le même que celui qu'on obtiendroit en éliminant d'abord α entre les deux équations

$$\varphi (\alpha, \zeta) = 0,$$
$$\left(\frac{d.\varphi (\alpha, \zeta)}{d\alpha}\right) = 0,$$

ce qui donneroit un premier réſultat $\psi\, \zeta = 0$; puis en éliminant ζ entre les deux équations

$$\psi\, \zeta = 0,$$
$$d\left(\frac{\psi\, \zeta}{d\zeta}\right) = 0,$$

Cela poſé, l'équation aux différences ordinaires $U = 0$, eſt le réſultat de l'élimination des quantités α, $\varphi\alpha$, $\varphi'\alpha$ entre les quatre équations

$$M = 0,$$
$$dM = 0,$$
$$\frac{dM}{d\alpha} = 0,$$
$$\frac{ddM}{d\alpha^2} = 0;$$

ou bien si l'on représente par $k = 0$, le résultat de l'élimination de $\varphi\alpha$, entre les deux premières, l'équation $U = 0$, est alors le résultat de l'élimination de α, entre les deux équations

$$k = 0,$$
$$\left(\frac{dk}{d\alpha}\right) = 0.$$

Pareillement, l'équation aux différences partielles $V = 0$, est le résultat de l'élimination des quantités α, $\varphi\alpha$, dz entre les quatre équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{dx}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = 0,$$
$$dz = p\,dx + q\,dy;$$

ou bien, en représentant $\frac{dy}{dx}$ par ω, on aura l'équation $V = 0$, en éliminant d'abord $\varphi\alpha$ & dz entre les équations

$$M = 0,$$
$$dM = 0,$$
$$dz = p\,dx + q\,dy;$$

puis après avoir représenté le résultat par $k' = 0$, en éliminant α & ω entre les suivantes,

$$k' = 0,$$

$$\left(\frac{d\,k'}{d\,\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dk'}{d\,\omega}\right) = 0;$$

& pour faire cette dernière opération, on peut, en vertu du lemme, éliminer d'abord α entre $k' = 0$, & $\left(\frac{dk'}{d\,\alpha}\right) = 0$, ce qui donnera un résultat $k'' = 0$, & éliminer ensuite ω entre $k'' = 0$, & $\left(\frac{d\,k''}{d\omega}\right) = 0$.

Or l'équation $k' = 0$ étant le résultat de l'élimination de dz entre $k' = 0$, & $dz = pdx + qdy$, le résultat de l'élimination de α entre $k' = 0$, & $\left(\frac{dk'}{d\,\alpha}\right) = 0$, sera le même que celui de l'élimination de dz entre

$$U = 0,$$

$$\& \; dz = pdx + qdy;$$

donc on aura l'équation $V = 0$, en éliminant d'abord dz entre ces deux dernières équations, ce qui donnera un résultat $k'' = 0$, & éliminant ensuite ω entre les deux suivantes

$$k'' = 0,$$

$$\left(\frac{dk''}{d\,\omega}\right) = 0;$$

ce qui est la première partie de la proposition.

Quant à la seconde partie, il faut observer que puisque l'équation $V = 0$, résulte des deux suivantes

$$U = 0,$$

$$dz = pdx + qdy,$$

réciproquement l'équation $U = 0$ doit résulter de ces deux-ci,

$$V = 0,$$

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

par l'élimination des deux quantités p, q: or l'élimination actuelle d'une de ces deux quantités étant faite, ce qui donne un résultat que je représente par $h = 0$, il ne reste aucune équation pour éliminer l'autre de ces quantités; donc, si c'est q qui reste, pour le faire disparoître, il faut l'éliminer entre les deux équations

$$h = 0,$$

$$\left(\frac{dh}{dq}\right) = 0;$$

ce qui est la seconde partie de la proposition.

XIV.

Nous avons vu *(XII)* que l'intégrale de l'équation aux différences partielles $V = 0$ est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les deux équations

$$(A) \quad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0;$$

& que celle de l'équation aux différences ordinaires élevées $U = 0$, est le résultat de l'élimination de la même indéterminée α entre les trois suivantes,

$$(A) \quad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(C) \quad \left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0:$$

il suit de-là, que des deux équations $V = 0$, $U = 0$, l'une quelconque étant proposée, si l'on connoît l'intégrale de l'autre, sous la forme que je viens de rapporter, on

connoîtra auſſi celle de la première ; c'eſt-à-dire, que ſi l'on connoît l'intégrale de l'équation $U = 0$, & que cette intégrale ſoit ſous la forme des trois équations *(A)*, *(B)*, *(C)*, on aura celle de l'équation $V = 0$, en ſupprimant l'équation *(C)*. Réciproquement étant connue l'intégrale de l'équation $V = 0$, ſous la forme des deux équations *(A)*, *(B)*, on aura celle de l'équation $U = 0$, en combinant les deux équations *(A)*, *(B)*, avec la différentielle de *(B)* priſe en regardant l'indéterminée a comme ſeule variable.

Ainſi le calcul intégral des équations aux différences ordinaires élevées, & celui des équations aux différences partielles ſont abſolument dépendans l'un de l'autre ; & de la perfection de l'une de ces eſpèces de calcul s'enſuivroit néceſſairement celle de l'autre.

X V.

Tout ce qui précède ne préſenteroit qu'un cercle inutile, ſi les formes des équations que l'on fait intégrer ſe correſpondoient dans l'un & l'autre calcul ; mais je vais faire voir, par deux exemples, que certaines équations aux différences ordinaires, compriſes dans les formes que j'ai traitées ci-deſſus, correſpondent à des équations aux différences partielles que l'on ne peut encore intégrer par aucune autre méthode, & réciproquement.

Exemple I. L'équation aux différences ordinaires

$$(U)\left\{\begin{array}{l} (x\,dy - y\,dx)^2 \\ + (y\,dz - z\,dy)^2 \\ + (z\,dx - x\,dz)^2 \end{array}\right\} = a^2(dx^2 + dy + dz^2),$$

dont j'ai trouvé l'intégrale par des conſidérations géométriques, & qui appartient aux arrêtes de rebrouſſement de toutes les ſurfaces développables circonſcrites à la même ſphère, n'eſt compriſe dans aucune des formes générales dont j'ai donné les intégrales ; mais ſi l'on ſubſtitue pour

∂z la valeur $p\,dx + q\,dy$, & qu'enſuite on élimine $\frac{dy}{dx}$ au moyen de la différentielle, priſe en regardant $\frac{dy}{dx}$ comme ſeule variable, l'équation aux différences partielles que l'on obtiendra, ſera

$$z - px - qy = a^2 \sqrt{(1 + p^2 + q^2)},$$

qui appartient à toutes les ſurfaces développables circonſcrites à la même ſphère. Or cette équation eſt compriſe dans celles que M. de la Grange a intégrées, & en faiſant, pour abréger

$$z - \alpha x - \varphi\alpha . y - a^2 \sqrt{[1 + \alpha^2 + (\varphi\alpha)^2]} = M,$$

ſon intégrale eſt le réſultat de l'élimination de α entre les deux équations ſuivantes:

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0;$$

donc l'intégrale de l'équation aux différences ordinaires (U), eſt le réſultat de l'élimination de la même indéterminée α entre les trois équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0.$$

Exemple II. Réciproquement l'équation aux différences partielles

$$(V) \quad \left\{ \begin{array}{r} bx^2(z + px - qy)^2 \\ + aby^2(z - px + qy)^2 \\ + az(z + px + qy)^2 \end{array} \right\} = 0,$$

ne peut s'intégrer par aucune des méthodes connues; mais si l'on substitue pour p sa valeur prise dans $dz = pdx + qdy$, & qu'après avoir différencié en regardant q comme seule variable, on élimine q, on aura

$$(xdz + zdx)^2 + a(zdy + ydz)^2 + b(xdy + ydz)^2 = 0;$$

équation aux différences ordinaires élevées, comprise dans le cas du *théorème III*, & dont l'intégrale, en faisant, pour abréger,

$$\left(\frac{xz - \alpha}{xy}\right)^2 + a\left(\frac{yz - \varphi\alpha}{xy}\right)^2 + b = M,$$

est le résultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0;$$

donc l'intégrale de l'équation aux différences partielles *(V)*, est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les deux premières seulement de ces trois équations, c'est-à-dire, entre

$$M = 0$$
$$\& \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0.$$

XVI.

JUSQU'ICI il n'a été question, dans ce Mémoire, que des équations aux différences ordinaires élevées; mais les équations aux différences ordinaires linéaires à trois variables, & qui ne satisfont pas aux anciennes conditions d'intégrabilité, ne sont pas absurdes, elles appartiennent de même toutes à des courbes à double courbure, & elles sont toutes susceptibles d'une véritable intégration; enfin la

la recherche de leur intégrale ne dépend que de l'intégration d'une équation aux différences ordinaires à deux variables.

En effet, ſoit

$$(A) \qquad L dx + M dy + N dz = 0,$$

une équation aux différences ordinaires, linéaire, & qui ne ſatisfaſſe pas à la condition d'intégrabilité; d'après ce ce qu'on vient de voir ſur les équations élevées, on mettra pour dz ſa valeur $p dx + q dy$, ce qui donnera

$$(L + Np) dx + (M + Nq) dy = 0;$$

puis, après avoir différencié cette équation, en ne faiſant varier que $\frac{dy}{dx}$, on éliminera $\frac{dy}{dx}$, ce qui ſe réduit à égaler à zéro les coéfficiens de dx & dy, & l'on aura les deux équations ſimultanées,

$$(B) \qquad L + Np = 0,$$

$$(C) \qquad N + Nq = 0.$$

Cela fait, on intégrera ou l'une ou l'autre de ces deux équations, en regardant comme conſtante la variable qui n'a pas varié dans la différence partielle; par exemple, on intégrera la première,

$$L dx + N dz = 0,$$

en regardant y comme conſtante, & on complétera l'intégrale par une fonction arbitraire de y; enfin on ſubſtituera dans (C) pour q ſa valeur tirée de l'intégrale, ce qui produira une ſeconde équation ſans différentielles; & ces deux équations appartiendront à la courbe à double courbure, qui eſt le lieu de la propoſée.

XVII.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$(A) \qquad dz = xy\,(x\,dx + y\,dy).$$

Les deux équations aux différences partielles sont, pour ce cas,

$$(B) \qquad p = x^2 y,$$
$$(C) \qquad q = xy^2,$$

l'intégrale de la première est

$$z = \frac{x^3 y}{3} + \varphi y;$$

φ étant une fonction arbitraire; je la différencie en regardant y comme seule variable, ce qui donne

$$q = \frac{x^3}{3} + \varphi' y;$$

& substituant pour q cette valeur dans (C), je trouve

$$xy^2 = \frac{x^3}{3} - \varphi' y;$$

donc l'intégrale de la proposée est le système des deux équations simultanées,

$$z = \frac{x^3 y}{3} + \varphi y$$
$$xy^2 = \frac{x^3}{3} + \varphi' y.$$

Cette intégrale peut être mise sous une autre forme, car les deux équations (B), (C), peuvent être remplacées par les suivantes,

$$py - qx = 0,$$
$$p = x^2 y.$$

Or l'intégrale de la première est $z = \varphi\,(x^2 + y^2)$; &

pour que la seconde soit satisfaite, il faut que l'on ait $xy = z\varphi'(x^2 + y^2)$; donc l'intégrale complète de la proposée est encore le système des deux équations simultanées,

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$
$$xy = z\varphi'(x^2 + y^2),$$

ce qu'il est facile de vérifier par la différenciation. Ainsi la proposée appartient à une courbe à double courbure tracée sur une surface quelconque de révolution, l'axe coïncidant avec la ligne des z; mais la projection de cette courbe sur le plan perpendiculaire à l'axe, dépend de la courbe génératrice, d'une manière énoncée par la seconde des deux équations intégrales.

XVIII.

EXEMPLE II. Soit proposé d'intégrer

(A) $$dz = xy(dx - dy).$$

Les deux équations aux différences partielles deviennent

(B) $$p = xy,$$
(C) $$q = -xy;$$

l'intégrale de la première est $z = \frac{x^2 y}{2} + \varphi y$, & pour que l'équation (C) soit satisfaite, il faut que l'on ait

$$xy + \frac{x^2}{2} + \varphi' y = 0;$$

donc l'intégrale de l'équation (A) est le système des deux équations simultanées

$$z = \frac{x^2 y}{2} + \varphi y,$$
$$xy + \frac{x^2}{2} + \varphi' y = 0.$$

Autrement, les deux équations *(B)*, *(C)*, peuvent être remplacées par les deux suivantes,

$$p + q = 0,$$
$$p = xy.$$

L'intégrale de la première est

$$z = \varphi(x - y);$$

& pour que la seconde soit satisfaite, il faut que l'on ait

$$xy = \varphi'(x - y);$$

donc l'intégrale complète de la proposée est encore le système des deux équations simultanées

$$z = \varphi(x - y),$$
$$xy = \varphi'(x - y),$$

c'est-à-dire, que la proposée *(A)* appartient à une courbe à double courbure, tracée sur une surface cylindrique à base quelconque, les droites de la surface étant parallèles à la droite qui partage en deux parties égales l'angle formé par les axes des x & des y; mais la projection de la courbe sur le plan des x, y, dépend de la base de la surface cylindrique, d'une manière exprimée par la seconde des deux équations intégrales.

XIX.

Si le nombre des variables étoit plus grand que trois, on se comporteroit d'une manière analogue, c'est-à-dire, qu'on substitueroit d'abord pour dz sa valeur

$$p\,du + q\,dx + r\,dy \ldots\ldots \&c.$$

& qu'ensuite, pour éliminer $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$ ..... &c. on différencieroit le résultat, en regardant chacune de ces

quantités comme ſeule variable, ce qui produiroit un nombre d'équations ſuffiſant pour l'élimination ; & alors on auroit des équations aux différences partielles, que l'on traiteroit comme celles des deux cas précédens.

Exemple III. Soit propoſé d'intégrer

$$u\,du + y\,dx + z\,dy + x\,dz = 0.$$

Je ſubſtitue pour dz ſa valeur, & je trouve

$$(u + px)du + (y + qx)dx + (z + rx)dy = 0;$$

je différencie, en regardant $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$, chacune en particulier, comme ſeule variable, & j'élimine ces deux quantités; ce qui, dans le cas où toutes les différences ſont linéaires, ſe réduit à égaler à zéro les coéfficiens de du, dx, dy, & j'obtiens les trois équations aux différences partielles,

$$u + px = 0,$$
$$y + qx = 0,$$
$$z + rx = 0.$$

L'intégrale de la première eſt

$$xz + u^2 = \varphi(x, y),$$

φ étant une fonction de deux quantités; & pour que les deux autres équations ſoient ſatisfaites, il faut que l'on ait

$$y + \varphi'(x, y) = 0,$$
$$z + \varphi''(x, y) = 0,$$

φ' & φ'' étant les coéfficiens de dx & dy, dans la différentielle de la fonction φ ; donc, l'intégrale complète de la propoſée eſt le ſyſtème des trois équations ſimultanées

$$xz + u^2 = \varphi(x, y),$$
$$y = \varphi'(x, y),$$
$$z = \varphi''(x, y).$$

XX.

LE nombre des équations intégrales n'eſt pas toujours, comme dans le cas précédent, égal au nombre des variables diminué d'une unité.

Exemple IV. Soit propoſée l'équation

$$(A) \qquad udu + xdx + xdy + zdz = 0.$$

On voit d'abord qu'on peut la réduire à trois termes, ſous la forme ſuivante :

$$udu + x(dx + dy) + zdz = 0,$$

dont l'intégrale eſt évidemment le ſyſtème des deux équations ſimultanées

$$u^2 + z^2 + \varphi(x + y) = 0,$$

$$2x - \varphi'(x + y) = 0.$$

Ainſi toutes les fois que la propoſée ſera ſuſceptible d'être réduite à trois termes, ſon intégrale ne contiendra pas plus de deux équations ; mais dans tous les cas où elle ſera ſuſceptible de cette forme, il ne ſera pas toujours auſſi facile que dans cet exemple ſimple, de l'y ramener ; alors, en opérant comme dans l'*article XX,* le calcul indiquera la réduction des équations. En effet, ſi dans la propoſée on met pour dz ſa valeur $pdu + qdx + rdy$, on aura les trois équations aux différences partielles,

$$u + pz = 0,$$

$$x + qz = 0,$$

$$x + rz = 0;$$

l'intégrale de la première eſt

$$(E) \qquad z^2 + u^2 = \varphi(x, y),$$

φ étant ſuppoſée une fonction de deux quantités ; & pour que les deux autres ſoient ſatisfaites, il faut que l'on ait

$$(F) \qquad -2x = \varphi'(x, y),$$

$$(G) \qquad -2x = \varphi''(x, y),$$

φ' & φ'' étant les coéfficiens de dx & dy dans la différentielle de $\varphi(x, y)$.

Mais les deux équations (F), (G), étant entre les deux mêmes variables x & y, il s'ensuit que la fonction φ, qui étoit regardée comme composée de deux quantités, n'est composée que d'une seule; car si l'on fait

$$\varphi(x, y) = z', \ \& \ dz' = p'dx + q'dy,$$

les équations (F), (G), deviennent

$$(F') \quad -2x = p',$$

$$(G') \quad -2x = q',$$

ce qui donne $p' - q' = 0$, & par conséquent

$$z' = \psi(x + y),$$

ψ étant une fonction arbitraire de la seule quantité $x + y$; donc l'équation (E) deviendra

$$z^2 + u^2 = \psi(x + y),$$

& une des deux équations (F') ou (G') sera employée: & pour que l'autre soit satisfaite, il faudra que l'on ait

$$-2x = \psi'(x + y);$$

donc l'intégrale de la proposée (A) est le système des deux dernières équations prises simultanément, comme on l'avoit trouvée d'abord.

CONCLUSION.

Les équations aux différences ordinaires, soit élevées, soit linéaires, qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, ne renferment rien d'absurde, si l'on entend par-là qu'elles expriment des propriétés impossibles, imaginaires....; elles énoncent toutes des propriétés réelles, & elles sont susceptibles d'une véritable intégration en quantités finies. Ce qu'il y avoit d'absurde, c'étoit que leurs intégrales pussent être exprimées par une seule équation; par exemple, pour le cas de trois variables, il étoit absurde que l'équation appartînt à une surface courbe, ce que l'on supposoit tacitement; dans ce cas

elle appartient à une courbe à double courbure, qui peut être déterminée par une ſeule équation différentielle, mais qui ne peut être exprimée en quantités finies, que par le ſyſtème de deux équations ſimultanées.

Des Équations aux différences ordinaires élevées du ſecond ordre, & pour un nombre de variables plus grand que deux.

XXI.

DANS le Mémoire que j'ai donné ſur les développées des courbes à double courbure, imprimé parmi ceux des Savans étrangers, *tome X*, j'ai fait voir, 1.° que, quoique chaque courbe eût un nombre infini de développées, elle n'avoit cependant, pour chacun de ſes points, qu'un ſeul rayon de courbure; 2.° que lorſque la courbe étoit à double courbure, la ſuite des centres de courbure formoit une ligne courbe qui n'étoit pas une des développées; 3.° que x, y, z, étant les coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe, l'expreſſion du carré du rayon de courbure pour ce point, en ne faiſant nulle aucune différence ſeconde, étoit

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3 : \left\{ \begin{array}{l} (dxddy - dyddx)^2 \\ + (dzddx - dxddz)^2 \\ + (dyddz - dzddy)^2 . \end{array} \right.$$

Si donc on vouloit avoir l'équation différentielle de toutes les courbes à double courbure, dont le rayon de courbure eſt conſtant, il faudroit égaler l'expreſſion précédente à une conſtante a, ce qui donneroit

$$(A)\ (dx^2 + dy^2 + dz^2)^3 = a^2 \left\{ \begin{array}{l} (dxddy - dyddx)^2 \\ + (dzddx - dxddz)^2 \\ + (dyddz - dzddy)^2 , \end{array} \right.$$

équation élevée, du genre de celles que l'on regarde ordinairement comme abſurdes, & qui cependant exprime une

une propriété réelle, & qui est susceptible d'une véritable intégration, même en quantités finies.

XXII.

D'ABORD il est évident que tous les cercles dont le rayon est a, quelles que soient d'ailleurs leurs positions dans l'espace, doivent satisfaire à cette équation; or les équations d'un cercle placé d'une manière quelconque dans l'espace, sont

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = a^2,$$
$$x - \alpha + (y - \beta)\varepsilon + (z - \gamma)\eta = 0,$$

α, β, γ, étant les coordonnées du centre, & ε, η, déterminant les deux directions du plan du cercle; donc, si dans ces deux équations on regarde les cinq quantités α, β, γ, ε, η, comme des constantes arbitraires, elles satisferont à l'équation aux différences ordinaires du second ordre (A); ce qu'il est facile de vérifier par la différenciation; car si l'on différencie aux différences ordinaires, premières & secondes, chacune de ces équations, on aura en tout six équations, entre lesquelles éliminant les cinq constantes arbitraires, on trouvera l'équation (A). Mais quoique les équations au cercle contiennent cinq arbitraires, elles ne sont encore qu'un cas particulier de l'intégrale complète; car les angles que les élémens consécutifs de la circonférence du cercle font entr'eux, sont égaux & dans un même plan, & l'on peut concevoir une courbe telle que ces angles, sans cesser d'être égaux, soient dans des plans perpétuellement différens: les équations de cette courbe satisferoient à l'équation (A), puisque son rayon de courbure seroit constant; & elles ne seroient pas comprises dans celle du cercle, puisque la courbe seroit à double courbure.

Les trois coordonnées rectangulaires de la courbe que l'on considère étant x, y, z, soient α, β, γ, les coordonnées respectives du centre de courbure qui correspond

à ce point; de plus ſoient $\beta = \varphi\alpha$, $\gamma = \psi\alpha$, les équations de la courbe qui paſſe par tous les centres de courbure, φ & ψ, étant deux fonctions de α. Cela poſé, la longueur du rayon de courbure devant être égale à une conſtante a, on aura d'abord

$$(B)\quad (x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + (z - \psi\alpha)^2 = a.$$

Puis, dans toute courbe à double courbure, les diſtances d'un même centre quelconque de courbure aux trois points conſécutifs de la courbe, dont il eſt le centre, ſont toujours égales entr'elles; donc la diſtance du point de la courbe au centre de courbure correſpondant ne change pas, lorſqu'on fait varier deux fois de ſuite l'ordonnée α; donc les différences première & ſeconde de l'équation (B), priſes en regardant α comme ſeule variable, doivent avoir lieu; donc on aura encore

$$(C)\quad x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\varphi'\alpha + (z - \psi\alpha)\psi'\alpha = 0,$$

$$(D)\left\{\begin{array}{l} -1 - (\varphi'\alpha)^2 - (\psi'\alpha)^2 \\ + (y - \varphi\alpha)\varphi''\alpha + (z - \psi\alpha)\psi''\alpha \end{array}\right\} = 0.$$

La conſidération qui vient de fournir les dernières équations eſt générale, & elle appartient à toutes les courbes à double courbure; mais la courbe dont il s'agit, a cela de particulier, que ſon rayon de courbure étant conſtant, la diſtance du même centre de courbure à quatre points conſécutifs de la courbe eſt toujours la même; donc la diſtance du point de la courbe au centre de courbure ne change pas encore, lorſqu'on fait varier une troiſième fois l'ordonnée; donc la différence troiſième de l'équation (B), priſe en regardant α comme ſeule variable, doit encore avoir lieu; donc on aura la quatrième équation

$$(E)\left\{\begin{array}{l} -3\varphi'\alpha\varphi''\alpha - 3\psi'\alpha\psi''\alpha \\ + (y - \varphi\alpha)\varphi'''\alpha + (z - \psi\alpha)\psi'''\alpha \end{array}\right\} = 0.$$

Ainsi, en représentant l'équation *(B)* par $M = 0$, le système des quatre équations simultanées,

$$(B) \qquad M = 0,$$

$$(C) \qquad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(D) \qquad \left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

$$(E) \qquad \left(\frac{d^3M}{d\alpha^3}\right) = 0,$$

appartient à la courbe dont le rayon de courbure est constant & $= a$, & il exprime la même chose que l'équation aux différences secondes ordinaires *(A)*.

Les quatre équations que je viens de trouver seroient l'intégrale finie de l'équation *(A)*, si leur nombre n'excédoit pas celui des variables x, y, z; mais, entre ces quatre équations, on peut éliminer x, y, z, & il reste entre α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, une équation de condition qui doit être satisfaite, pour que les trois équations employées à l'élimination soient l'intégrale demandée.

Il résulte au moins de-là que les fonctions φ & ψ ne doivent pas être toutes deux arbitraires; & que l'une des deux étant prise à volonté, la forme de l'autre s'ensuit, pour que la courbe dont les équations sont $\beta = \varphi\alpha$, $\gamma = \psi\alpha$, passe par les centres de courbure d'une courbe dont la courbure est constante. De plus, si l'on élimine les coordonnées x, y, z, l'équation résultante est en α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, précisément la même que l'équation *(A)* en x, y, z, ce qui tient à une propriété remarquable des courbes de courbure constante, & que nous exposerons bientôt.

XXIII.

QUOIQUE les quatre équations *(B)*, *(C)*, *(D)*, *(E)*, ne présentent qu'un résultat différentiel, leur considération

conduit cependant à l'intégrale première de l'équation *(A)*. En effet si, de ces quatre équations, on différencie les deux premières, en regardant α comme constante, ce qui est permis en vertu de la seconde & de la troisième; & qu'entre les quatre équations *(B)*, *(C)*, $d(B)$, $d(C)$, on élimine les fonctions φ, φ', on aura les deux équations

$$(b) \quad (x-\alpha)^2(dy^2+dx^2)+2(x-\alpha)(z-\psi\alpha)dxdz + (z-\psi\alpha)^2(dy^2+dz^2)=a^2dy^2,$$

$$(c) \quad (x-\alpha)(dy^2+dx^2)+[(x-\alpha)\psi'\alpha+(z-\psi\alpha)]dxdz + (z-\psi\alpha)\psi'\alpha(dy^2+dz^2)=0.$$

Puis, après avoir pris dans l'équation $d.(B)$, la valeur de $\varphi'\alpha$, qui est $\varphi'\alpha = -\frac{\psi'\alpha dz+dx}{dy}$, si on la différencie en regardant α comme constante, ce qui est encore permis, en vertu de l'équation *(E)*, on trouvera

$$\varphi''\alpha = -\frac{dz}{dy}\psi''\alpha.$$

Enfin substituant cette valeur de $\varphi''\alpha$ dans *(D)*, on aura la troisième équation

$$(d) \quad -(dx^2+dy^2)-(dy^2+dz^2)(\psi'\alpha)^2-2dxdz\psi'\alpha + (x-\alpha)\psi''\alpha dxdz+(z-\psi\alpha)\psi''\alpha(dy^2+dz^2)=0;$$

les trois équations *(b)*, *(c)*, *(d)*, sont le résultat de l'élimination de la fonction φ & de ses différences entre les quatre équations *(B)*, *(C)*, *(D)*, *(E)*, & celles de leurs différentielles que l'on a pu prendre en regardant α comme constante.

Or, si l'on représente l'équation *(b)* par $N=0$, les équations *(c)*, *(d)* seront $\left(\frac{dN}{d\alpha}\right)=0$, $\left(\frac{ddN}{d\alpha^2}\right)=0$, ce quil est facile de reconnoître à l'inspection; donc une des intégrales, première & complète de l'équation *(A)*

aux différences ordinaires ſecondes, eſt le réſultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$(b) \qquad N = 0,$$

$$(c) \qquad \left(\frac{dN}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(d) \qquad \left(\frac{ddN}{d\alpha^2}\right) = 0.$$

Il eſt facile de vérifier ce réſultat par la différenciation, car ſi l'on différencie aux différences ordinaires les deux premières de ces équations, en regardant α comme conſtante, ce qui eſt permis en vertu de la ſeconde & de la troiſième ; & qu'entre les quatre équations (b), (c), $d(b)$, $d(c)$, on élimine les trois quantités α, $\psi\alpha$, $\psi'\alpha$, le réſultat de l'élimination ſera l'équation (A) de l'*article XXII.*

XXIV.

Si, au lieu d'éliminer la fonction φ & ſes différentielles φ', φ'' entre les équations (B), (C), $d(B)$, $d(C)$, on eût éliminé la fonction ψ & ſes différentielles ψ', ψ'', on auroit trouvé, en faiſant, pour abréger,

$$(x - \alpha)^2 (dz^2 + dx^2) + 2(x - \alpha)(y - \varphi\alpha)\, dx\, dy + (y - \varphi\alpha)^2 (dy^2 + dz^2) - a^2 dz^2 = N',$$

que l'autre intégrale première & complète de l'équation (A) eſt le réſultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$(b') \qquad N' = 0,$$

$$(c') \qquad \left(\frac{dN'}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(d') \qquad \left(\frac{ddN'}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

intégrale qui eſt complétée par la fonction arbitraire φ,

comme l'autre l'étoit par la fonction ψ, & qu'on peut vérifier de même par la différenciation.

XXV.

ACTUELLEMENT que nous avons les deux intégrales premières & complètes de l'équation *(A)*, il est facile de trouver son intégrale finie. Pour cela il faut observer que, s'il étoit possible d'éliminer α entre les trois équations de la première intégrale, ce qui produiroit deux équations sans α, & ensuite d'éliminer encore α entre les trois équations de la seconde intégrale, ce qui produiroit deux autres équations sans α; on auroit alors quatre équations sans α, qui contiendroient les quantités différentielles $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, & les deux fonctions arbitraires φ, ψ; & en éliminant entre ces quatre équations les deux quantités $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, les deux équations résultantes seroient l'intégrale finie de l'équation *(A)*. Mais, quoique les éliminations dont il s'agit ici ne puissent pas se faire en général, on peut néanmoins les indiquer; d'ailleurs il est nécessaire de remarquer que α devant être éliminé d'abord entre les trois équations *(b)*, *(c)*, *(d)*, prises en particulier, & ensuite entre les trois autres *(b')*, *(c')*, *(d')*, prises de même en particulier, avant de combiner ces six équations, il faut accentuer α dans un des systèmes, par exemple, dans le second. D'après cela, en faisant, pour abréger,

$$(x - \alpha)(dy^2 + dx^2) + 2(x - \alpha)(z - \psi\alpha)\,dx\,dz$$
$$+ (z - \psi\alpha)^2(dy^2 + dz^2) - a^2dy^2 = N,$$
$$(x - \alpha')(dz^2 + dx^2) + 2(x - \alpha')(y - \varphi\alpha')\,dx\,dy$$
$$+ (y - \varphi\alpha')^2(dy^2 + dz^2) - a^2dz^2 = L,$$

l'intégrale finie & complète de l'équation *(A)* est le résultat

de l'élimination des quatre quantités α, α', $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, entre les ſix équations ſuivantes,

$$L = 0, \qquad N = 0,$$
$$\left(\frac{dL}{d\alpha'}\right) = 0, \qquad \left(\frac{dN}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddL}{d\alpha'^2}\right) = 0, \qquad \left(\frac{ddN}{d\alpha^2}\right) = 0:$$

& parce que les deux quantités $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, ne ſont pas ſous les fonctions arbitraires, l'élimination actuelle de ces quantités eſt poſſible. Cette élimination étant faite, il reſtera quatre équations ſans différentielles, & l'intégrale finie de l'équation *(A)* ſera le réſultat de l'élimination des deux indéterminées α, α' entre ces quatre équations, que je ne rapporte pas, parce qu'elles ſont d'un trop grand développement.

On opérera d'une manière analogue pour avoir l'intégrale finie d'une équation aux différences ordinaires d'un ordre quelconque, toutes les fois qu'on aura toutes ſes intégrales premières complètes.

On voit donc, non-ſeulement que l'équation *(A)* aux différences ſecondes ordinaires, qui ne ſatisfait pas aux conditions d'intégrabilité, n'eſt pas abſurde, & qu'elle exprime une propriété réelle, puiſqu'elle appartient à toutes les courbes à double courbure, dont le rayon de courbure eſt conſtant & $= a$; mais encore que cette équation eſt ſuſceptible de deux véritables intégrations aux différences premières & d'une intégration en quantités finies; enfin que ſes deux intégrales premières ſont complétées chacune par une fonction arbitraire particulière, & que ſon intégrale finie eſt complétée par ces deux fonctions.

XXVI.

Avant que de quitter cet exemple, je rapporterai quelques propriétés de la courbe qui en eſt l'objet, moins

parce qu'elles sont très-remarquables, que pour donner une idée des résultats auxquels peut conduire la considération des équations aux différences ordinaires élevées.

1.° Nous avons vu, *article XXIII*, qu'en faisant, pour abréger,

$$(x - a)^2 + (y - \varphi a)^2 + (z - \psi a)^2 - a^2 = M,$$

le système des quatre équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{da}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddM}{da^2}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{d^3M}{da^3}\right) = 0,$$

appartient à la courbe dont la courbure est constante; mais que ce système n'est pas une intégrale, parce qu'en éliminant entre ces quatre équations, les trois coordonnées x, y, z, on arrive à une équation de condition qui est entre a, φa, ψa, la même que l'équation aux différences ordinaires secondes, en x, y, z. Il résulte de-là que la courbe dont les coordonnées sont a, φa, ψa, est aussi de courbure constante; & parce que les quatre équations expriment que quatre points consécutifs de la seconde courbe sont à égales distances du même point correspondant de la première, il s'ensuit que le rayon de courbure de la seconde courbe est le même, de grandeur & de position, que celui de la première.

Donc, *lorsque la courbure d'une courbe est constante, cette courbe, & celle qui passe par ses centres de courbure, sont réciproques, c'est-à-dire, que ces deux courbes sont réciproquement, l'une, la ligne des centres de courbure de l'autre.* On

On pourroit arriver à ce résultat par une autre considération, car j'ai fait voir dans le Mémoire sur les développées *(Savans étrangers, tome X)*, que les équations d'une courbe à double courbure étant $y = \varphi x$, $z = \psi x$, & α, β, γ, étant les coordonnées de la courbe qui passe par ses centres, pour avoir en α, β, γ, les équations de cette dernière, il falloit, en faisant, pour abréger,

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - \varphi x)^2 + (\gamma - \psi x)^2 - a^2 = M,$$

éliminer x entre les trois équations

$$\left(\frac{d\,M}{d\,x}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d\,d\,M}{d\,x^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^3\,M}{d\,x^3}\right) = 0;$$

donc, si le rayon de courbure de la première courbe est constant, & $= a$, il faut de plus, que l'on ait $M = 0$. Ainsi, une courbe de courbure constante étant donnée, les équations de la ligne de ses centres satisfont aux quatre équations

$$M = 0; \qquad \left(\frac{d\,M}{d\,x}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{d\,d\,M}{d\,x'^2}\right) = 0, \qquad \left(\frac{d^3\,M}{d\,x^3}\right) = 0.$$

Mais nous avons vu, *article XXIII*, que la ligne des centres étant donnée, les équations de la courbe de courbure constante satisfaisoient aux quatre équations

$$M = 0, \qquad \left(\frac{d\,M}{d\,\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d\,d\,M}{d\,\alpha^2}\right) = 0; \qquad \left(\frac{d^3\,M}{d\,\alpha^3}\right) = 0.$$

De plus, les x, y, z entrent dans M, de la même manière que les α, β, γ; donc, la courbe de courbure

constante, & celle qui passe par ses centres de courbure, se déduisent l'une de l'autre de la même manière, & sont par conséquent réciproques, comme je l'ai énoncé plus haut.

2.° L'élément de la courbe qui passe par les centres de courbure d'une autre courbe, est toujours dirigé dans le plan normal à la seconde, car deux centres de courbure consécutifs sont toujours sur le même plan normal; mais lorsque la courbure d'une courbe est constante, l'élément de sa ligne des centres est de plus perpendiculaire au rayon de courbure commun; donc les tangentes correspondantes des deux courbes sont toujours à la même distance, & dirigées dans des plans rectangulaires.

Donc, *lorsque la courbure d'une courbe est constante, cette courbe & celle qui passe par ses centres de courbure, sont par-tout à la même distance l'une de l'autre; elles s'entrelacent perpétuellement, en se présentant toujours leurs concavités, à peu-près comme les torons d'une corde à deux brins, & leurs tangentes aux extrémités du rayon de courbure commun sont dans des plans rectangulaires.*

Le filet d'une vis à base circulaire, est évidemment une courbe à courbure constante, & ses équations satisfont à l'équation *(A)*. La ligne des centres de cette courbe est le filet d'une autre vis de même pas & de même axe, mais tracée sur un cylindre d'un diamètre plus ou moins grand que celui de la première, suivant que l'inclinaison constante de la tangente de la première est plus ou moins grande que 45 degrés; & le diamètre du cylindre de la seconde courbe est tel que, pour le même pas, l'inclinaison des tangentes des deux courbes sont complément l'une de l'autre.

Enfin, tout le monde connoît les vis à deux filets équidistans; on les emploie fréquemment dans les arts, & principalement dans les balanciers des monnoies: lorsque les tangentes de ces filets font des angles de 45 degrés avec le plan de la base du cylindre, ces deux courbes sont réciproquement l'une la ligne des centres de courbure de l'autre.

XXVII.

THÉORÈME I. La différence dx de la variable principale étant constante, si l'on a une équation aux différences secondes ordinaires à trois variables

$$(A) \quad F\left(\frac{ddy}{dx^2}, \frac{ddz}{dx^2}\right) = 0,$$

dans laquelle il n'entre que les différences secondes & la différence première constante dx; l'intégrale première de cette équation sera le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations suivantes,

$$(B) \quad F\left(\frac{dy - \alpha dx}{x\,dx}, \frac{dz - \varphi\alpha . dx}{x\,dx}\right) = 0,$$

$$(C) \quad \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(D) \quad \left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

dans lesquelles la fonction F est la même que celle de la proposée, & où φ est une fonction arbitraire.

Pour le démontrer, soit fait, pour abréger,

$$\frac{dy - \alpha dx}{x\,dx} = u, \quad \frac{dz - \varphi\alpha dx}{x\,dx} = v,$$

les deux premières équations intégrales (B), (C), deviendront

$$(B') \quad F(u, v) = 0,$$

$$(C') \quad \left(\frac{dF}{du}\right) + \left(\frac{dF}{dv}\right)\varphi'\alpha = 0;$$

si l'on différencie ces deux dernières équations, en regardant α comme constante, ce qui est permis en vertu des deux équations (C), (D), les différentielles seront toutes deux de la forme

$$M du + N dv = 0;$$

elles ne pourront pas ſubſiſter ſimultanément, & indépendamment de la forme de la fonction *F*, à moins que l'on n'ait en même-temps $du = 0$, $dv = 0$; ou, développant les valeurs de du & dv, à moins que l'on n'ait

$$\frac{dy - \alpha dx}{x dx} = \frac{ddy}{dx^2},$$

$$\frac{dz - \varphi\alpha dx}{x dx} = \frac{ddz}{dx^2};$$

or ſi l'on élimine de l'équation *(B)* les quantités α, $\varphi\alpha$, au moyen des deux dernières équations, on aura la propoſée *(A)*; donc, &c.

XXVIII.

THÉORÈME II. La différence dx de la variable principale étant toujours regardée comme conſtante, & les quantités *Y*, *Z* étant compoſées l'une & l'autre, d'une manière quelconque, des trois variables x, y, z, & de leurs différences premières; ſi l'on a une équation aux différences ordinaires ſecondes

$$F\left(\frac{dY}{dx^2}, \frac{dZ}{dx^2}\right) = 0;$$

dans laquelle il n'entre que les différences des quantités x, Y, Z, l'intégrale première de cette équation ſera le réſultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$F\left(\frac{Y - \alpha dx}{x dx}, \frac{Z - \varphi\alpha . dx}{x dx}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

dans leſquelles *F* eſt la fonction de la propoſée, & où φ eſt une fonction arbitraire.

Ce théorème eſt une ſuite du précédent.

XXIX.

THÉORÈME III. Quel que ſoit le nombre des variables u, x, y, z...., parmi leſquelles u eſt la variable principale, dont la différence première du eſt regardée comme conſtante; de plus, les trois quantités X, Y, Z, étant compoſées d'une manière quelconque de toutes les variables & de leurs différences premières; ſi l'on a une équation aux différences ordinaires ſecondes

$$F\left(\frac{dY}{dX}, \frac{dZ}{dX}\right) = 0,$$

qui ne renferme que les différences des quantités X, Y, Z, une des intégrales premières de cette équation ſera le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations

$$F\left(\frac{Y - \alpha du}{X}, \frac{Z - \varphi\alpha du}{X}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0.$$

XXX.

THÉORÈME IV. Quel que ſoit le nombre des variables parmi leſquelles u eſt la variable principale, dont la différence première du eſt regardée comme conſtante; de plus, les trois quantités U, V, W, étant compoſées d'une manière quelconque de toutes les variables; ſi l'on a l'équation aux différences ordinaires ſecondes

$$F\left(\frac{ddU}{ddW}, \frac{ddV}{ddW}\right) = 0,$$

outre l'intégrale première déduite du théorème précédent; cette équation en aura encore une autre, qui ſera le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α' entre les trois équations ſuivantes

$$F\left[\frac{udU-(U-\alpha')du}{udW-Wdu},\frac{udV-(V-\varphi\alpha')du}{udW-Wdu}\right]=0,$$

$$\left(\frac{dF}{d\alpha'}\right)=0,$$

$$\left(\frac{ddF}{d\alpha'^2}\right)=0.$$

Ces deux derniers théorèmes ſe démontrent comme le premier.

CONCLUSION.

ON voit donc, 1.° que les équations aux différences ordinaires ſecondes, qui ne ſatisfont pas aux anciennes conditions d'intégrabilité, & par une analogie évidente celles des ordres ſupérieurs, n'énoncent rien d'abſurde; qu'elles ſont ſuſceptibles d'une véritable intégration, & que leurs intégrales ſont complétées par des fonctions arbitraires; 2.° que celles de ces équations qui ne renferment que trois variables, appartiennent à des courbes à double courbure, dont elles expriment la génération; & c'eſt lorſque cette génération ne dépend pas ſeulement de quelques points donnés à volonté, mais de courbes priſes arbitrairement, que les intégrales de ces équations différentielles ſont complétées par des fonctions arbitraires.

Des Équations aux différences partielles du premier ordre.

XXXI.

ON a déjà vu qu'étant propoſée une équation aux différences partielles du premier ordre, & à trois variables, repréſentée par $V=0$, ſi l'on ſubſtitue dans cette équation pour p ou q, pour p, par exemple, ſa valeur priſe dans l'équation $dz=pdx+qdy$, & qu'on élimine q du réſultat, au moyen de ſa différentielle priſe en regardant q comme ſeule variable, on aura une équation aux différences ordinaires $U=0$, qui en général ſera élevée. On a vu pareillement que ſi l'intégrale complète de l'équation aux différences ordinaires eſt le réſultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0;$$

M étant trouvée par intégration, & contenant une fonction arbitraire de α, l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles $V = 0$, est le résultat de l'élimination de α entre les deux premiéres de ces équations intégrales; en sorte que de la perfection du calcul intégral des équations aux différences ordinaires, s'ensuivroit celle du calcul des équations aux différences partielles.

Ce que j'ai dit dans le Mémoire précédent sur l'intégration des équations aux différences partielles linéaires, est un cas particulier de la méthode que je viens de proposer, car l'équation linéaire est toujours de la forme

$$Lp + Mq + N = 0.$$

Si l'on élimine p, au moyen de l'équation $dz = pdx + qdy$, on a

$$Ldz + Ndx + q\,(Mdx - Ldy) = 0;$$

& si l'on différencie cette dernière équation, en regardant q comme seule variable, on a

$$Mdx - Ldy = 0,$$

& par conséquent

$$Ldz + Ndx = 0,$$

qui sont les deux équations que j'ai données, & que M. de la Grange avoit publiées auparavant.

XXXII.

Les intégrales de toutes les équations aux différences partielles, même du premier ordre & à trois variables, ne sont pas susceptibles d'être mises sous la forme précédente, parce que cette forme suppose tacitement que l'équation

appartient à une ſurface courbe; & il y a un nombre infini d'équations aux différences partielles qui appartiennent à des courbes à double courbure, & dont l'intégrale ne peut être exprimée que par le ſyſtème de deux équations ſimultanées, entre leſquelles il n'y a rien à éliminer, ou par le ſyſtème de trois équations, entre leſquelles il faut éliminer une indéterminée, comme je vais le faire voir dans l'exemple ſuivant.

Soit propoſé d'intégrer l'équation

$$p - Ay = \varphi(q + Ax),$$

dans laquelle A eſt une conſtante, & où φ eſt une fonction arbitraire.

Ce que cette équation a de remarquable, c'eſt que ſi l'on fait $A = 0$, elle devient $p = \varphi q$, qui appartient à toutes les ſurfaces développables, & dont l'intégrale eſt connue; tandis que ſi on laiſſe ſubſiſter A, elle n'appartient plus à une ſurface courbe, mais à une courbe à double courbure.

En effet, ſoit fait, pour abréger,

$$q + Ax = \alpha,$$

ce qui donnera

$$p - Ay = \varphi\alpha.$$

Il eſt clair que la quantité α eſt une indéterminée ſur la valeur de laquelle rien ne doit être prononcé, & qui eſt deſtinée à diſparoître par élimination. Si l'on ſubſtitue pour p & q les valeurs précédentes dans $dz = pdx + qdy$, on aura

$$dz = dx\varphi\alpha + \alpha dy - A(xdy - ydx).$$

Actuellement, ſi cette équation aux différences ordinaires étoit intégrable en regardant α comme conſtant, & ſi ſon intégrale complétée par une fonction arbitraire de α étoit $M = 0$, il eſt évident, par les principes de ce genre de calcul, que l'intégrale complète de la propoſée ſeroit

feroit le réfultat de l'élimination de α entre les deux équations $M = 0$, $(\frac{dM}{d\alpha}) = 0$; mais l'équation aux différences ordinaires ne fatisfait pas aux conditions d'intégrabilité, elle appartient à une courbe à double courbure, qui ne peut être exprimée en quantités finies, que par le fyftème de deux équations, & d'après l'*article XVI*, fi la quantité α étoit une conftante abfolue, ces deux équations feroient

$$z = x\varphi\alpha + \alpha y + \psi(\frac{y}{x}),$$

$$\psi'(\frac{y}{x}) = - Ax^2.$$

De plus, α n'eft pas une conftante abfolue, elle doit feulement être regardée comme conftante dans l'intégration précédente, c'eft-à-dire, que cette intégration eft prife en regardant comme conftantes les deux quantités $\frac{y}{x}$ & α; donc la fonction ψ qui complète l'intégrale doit être compofée de ces deux quantités; donc l'intégrale complète de la propofée eft le réfultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations

$$(A) \quad z = x\varphi\alpha + \alpha y + \psi(\frac{y}{x}, \alpha)$$

$$(B) \quad x\varphi'\alpha + y + \psi''(\frac{y}{x}, \alpha)$$

$$(C) \quad \psi'(\frac{y}{x}, \alpha) = - Ax^2,$$

dont la feconde eft la différentielle de la première, prife en regardant α comme feule variable, & dans lefquelles ψ eft une fonction arbitraire de deux quantités, ψ' & ψ'' étant les coëfficiens de du & dv dans la différentielle de $\psi(u, v)$. Le réfultat de cette élimination comporte deux équations qui font celles de la courbe à double

courbure, à laquelle appartient l'équation aux différences partielles.

Parmi les équations aux différences partielles, il y en a donc qui appartiennent à des courbes à double courbure; leur intégrale finie ne peut être exprimée que par le système de deux équations entre lesquelles il n'y a rien à éliminer, & cette intégrale est complétée par une fonction arbitraire de deux quantités, ce que les Géomètres ne s'étoient encore permis que pour les intégrales des équations à quatre variables.

Comme la conclusion précédente est extraordinaire, je vais la vérifier de plusieurs manières.

1.° Si, dans l'intégrale, on fait $A = 0$, l'équation *(C)* donne $\psi' = 0$, ce qui indique que la quantité $\frac{y}{x}$ n'entre pas dans la fonction ψ; ainsi cette intégrale se réduit aux deux équations

$$z = x\varphi\alpha + \alpha y + \psi\alpha$$
$$x\varphi'\alpha + y + \psi'\alpha = 0,$$

qui sont l'intégrale connue de l'équation $p = \varphi q$, que l'on obtient en faisant de même dans la proposée $A = 0$.

2.° Si l'on différencie l'équation *(A)* en regardant α comme constante, ce qui est permis en vertu de *(B)*, on trouve

$$p = \varphi\alpha - \frac{y}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}, \alpha\right),$$

$$q = \alpha + \frac{1}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}, \alpha\right):$$

si l'on substitue pour ψ', sa valeur, prise dans *(C)*, on a

$$p = \varphi\alpha + Ay,$$
$$q = \alpha - Ax;$$

& enfin, éliminant α, on obtient

$$p - Ay = \varphi(q + Ax),$$

qui est la proposée.

3.° Si l'on prend des cas particuliers, c'est-à-dire, si l'on donne aux fonctions φ, ψ, des formes déterminées, & qu'on élimine α entre les trois équations *(A)*, *(B)*, *(C)*, on aura deux équations qui, par la différenciation, satisferont à la proposée.

XXXIII.

En opérant d'une manière analogue, on trouve qu'étant proposée l'équation aux différences partielles à quatre variables u, x, y, z,

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) + Aux = \varphi\left[\left(\frac{dz}{du}\right) - Axy, \left(\frac{dz}{dx}\right) - Auy\right],$$

dans laquelle A est une constante absolue, & φ une fonction arbitraire de deux quantités; son intégrale complète est le résultat de l'élimination des deux indéterminées α, β, entre les quatre équations suivantes,

$$z = \alpha u + \beta x + y\varphi(\alpha, \beta) + \psi\left(\frac{ux}{y}, \alpha, \beta\right),$$
$$u + y\varphi'(\alpha, \beta) + \psi'' = 0,$$
$$x + y\varphi''(\alpha, \beta) + \psi''' = 0,$$
$$\psi' = Ay^2,$$

dont la deuxième & la troisième sont les différentielles de la première, prises en regardant α pour l'une, & β pour l'autre, comme seule variable; dans lesquelles ψ est une fonction arbitraire de trois quantités; où φ' & φ'' sont les deux coéfficiens de la différence de φ; & où ψ', ψ'', ψ''', sont les coéfficiens de la différence de ψ.

Le calcul intégral des équations aux différences ordinaires, & celui des équations aux différences partielles, dépendant réciproquement l'un de l'autre, tous les pas que l'on fait dans la seconde de ces deux espèces de calculs, sont utiles à la première; ainsi, je vais rapporter quelques théorèmes, qui ne sont pas compris dans ceux de M. de la Grange.

XXXIV.

JE ſuppoſerai que le nombre des variables ſoit quelconque, & je ferai, pour abréger,

$$dz = p\,du + q\,dx + r\,dy \ldots\ldots\ldots$$

THÉORÈME I. Les quantités U, X, Y, étant des fonctions données reſpectivement en u, x, y, l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles

$$F(z,\, pU,\, qX,\, rY \ldots\ldots) = 0,$$

ne dépend que des quadratures.

Soit fait

$$pU = \alpha r Y,$$
$$qX = \beta r Y,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

α, β.... étant des indéterminées ſur la valeur deſquelles on ne doit rien ſtatuer, & qui ſont deſtinées à diſparoître par l'élimination ; & ſoient ſubſtituées dans la propoſée pour pU, qX.... leurs valeurs, l'équation deviendra

$$f(z,\, \alpha,\, \beta,\, \ldots\ldots rY) = 0,$$

de laquelle on pourra tirer la valeur de rY en z, α, β.....Soit cette valeur

$$rY = \mathrm{f}(z,\, \alpha,\, \beta \ldots\ldots),$$

on en conclura

$$pU = \alpha\,\mathrm{f}(z,\, \alpha,\, \beta \ldots\ldots),$$
$$qX = \beta\,\mathrm{f}(z,\, \alpha,\, \beta \ldots\ldots);$$

ſubſtituant pour p, q, r.... ces valeurs dans

$$dz = p\,du + q\,dx + r\,dy \ldots\ldots;$$

on aura

$$\frac{dz}{\mathrm{f}(z,\, \alpha,\, \beta \ldots\ldots)} = \frac{\alpha\,du}{U} + \frac{\beta\,dx}{X} + \frac{dy}{Y} \ldots\ldots$$

équation dont l'intégrale, en regardant α, β... comme conſtantes, ne dépend que des quadratures, & doit être complétée par une fonction arbitraire des conſtantes hypothétiques α, β.... Soit $M = 0$, cette intégrale ainſi complétée; elle ne pourra pas être employée ſeule, parce qu'il faut indiquer ce qui a été regardé comme conſtant dans l'intégration; on aura donc, ſimultanément,

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\beta}\right) = 0,$$

....

Toutes ces équations devant avoir lieu, indépendamment des valeurs de α, β... ſi l'on élimine ces indéterminées, on aura l'intégrale complète de la propoſée. L'élimination dont il s'agit ici, ne peut pas s'exécuter en général, parce que les quantités α, β... ſont ſous la fonction arbitraire & ſous les différences partielles.

XXXV.

THÉORÈME II. Les quantités L, M, N, P..... en même nombre que les variables, étant compoſées des variables & des différences partielles premières, de manière que toutes les équations ſuivantes, moins une, étant poſées, la dernière s'enſuive néceſſairement,

$$dL = 0,$$

$$dM = 0,$$

$$dN = 0,$$

$$dP = 0,$$

....

si l'on a une équation composée de toutes ces quantités, & que je représente par

$$F(L, M, N, P \ldots\ldots) = 0,$$

F étant une fonction quelconque donnée, algébrique ou transcendante, arbitraire ou déterminée; on aura l'intégrale de cette équation, en éliminant d'abord toutes les différences partielles, & une des deux fonctions arbitraires φ ou ψ, entre les équations suivantes,

$$L = \varphi(\alpha, \beta \ldots),$$
$$M = \psi(\alpha, \beta \ldots),$$
$$N = \alpha,$$
$$P = \beta,$$
$$\ldots\ldots$$
$$F(\varphi, \psi, \alpha, \beta \ldots) = 0;$$

dans lesquelles F est la même fonction que celle de la proposée; ce qui produira une équation unique que je représente par $M = 0$, puis en éliminant toutes les indéterminées α, $\beta \ldots$ entre les équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\beta}\right) = 0,$$
$$\ldots\ldots$$

Exemple. Soit proposée l'équation

$$F[p, q, r \ldots (z - pu - qx - ry \ldots)] = 0,$$

dans laquelle F indique une fonction quelconque donnée. Comme de toutes les équations

$$dp = 0,$$

$$dq = 0,$$
$$dr = 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$d(z - pu - qx - ry\ldots\ldots) = 0,$$

une quelconque ſuit de toutes les autres, la propoſée eſt dans le cas du théorème, & ſon intégrale eſt le réſultat de l'élimination des indéterminées $\alpha, \beta\ldots$ entre les équations ſuivantes,

$$F\{\varphi(\alpha,\beta\ldots),\alpha,\beta\ldots[z - u\varphi(\alpha,\beta\ldots) - \alpha x - \beta y\ldots]\} = 0,$$
$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{dF}{d\beta}\right) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

M. de la Grange avoit donné un réſultat analogue, ſeulement pour le cas de deux variables principales.

XXXVI.

Sur les équations aux différences partielles des ordres ſupérieurs.

CE que nous avons dit des équations aux différences partielles du premier ordre, a pareillement lieu pour celles des ordres ſupérieurs; c'eſt-à-dire qu'en faiſant, pour abréger,

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

ſi l'on ſubſtitue dans une équation aux différences partielles ſecondes $V = 0$, pour r & t leurs valeurs en dp, dq, dx, dy, priſes dans les équations précédentes, on aura une équation qui ne renfermera plus d'autres différences

partielles secondes que s; & si l'on différencie cette équation en regardant s comme seule variable, & qu'ensuite on élimine s au moyen de cette différentielle, on aura une équation $U = 0$ aux différences ordinaires entre les variables x, y, z, p, q, dont l'intégrale fournira celle de la proposée.

Le résultat aux différences ordinaires que j'ai représenté en général par $U = 0$, peut arriver sous plusieurs formes très-différentes.

1.° Ce résultat peut comporter deux équations aux différences ordinaires, ce qui aura toujours lieu lorsque la proposée sera linéaire, & dans quelques cas des différences élevées; alors si les intégrales de ces deux équations aux différences ordinaires sont $M = \alpha$, $N = \beta$, α & β étant les constantes arbitraires introduites par les intégrations, l'intégrale première de la proposée sera $M = \varphi N$.

2.° Si le résultat aux différences ordinaires ne renferme qu'une seule équation élevée, & que l'intégrale complète de cette équation soit le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre trois équations de cette forme

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

l'intégrale première de la proposée sera le résultat de l'élimination de α entre les deux premières équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0.$$

3.° Enfin si le résultat aux différences ordinaires est une équation linéaire unique, & pour laquelle les anciennes conditions d'intégrabilité ne soient pas satisfaites, on se comportera

comportera d'une manière analogue à ce que j'ai fait, *article XXXII.*

Je vais apporter un exemple pour chacun de ces trois cas.

XXXVII.

Exemple I. Soit proposé d'intégrer l'équation aux différences partielles secondes

$$rt - s^2 + A = 0,$$

dans laquelle A est une constante.

Je substitue pour r & t leurs valeurs prises dans

$$dp = rdx + sdy, \; dq = sdx + tdy,$$

ce qui donne

$$s(dqdy + dpdx) = dpdq + Adxdy.$$

Je différencie cette équation en regardant s comme seule variable, & j'élimine s, ce qui, dans ce cas où s est linéaire, se réduit à égaler à zéro chacun des deux membres; & j'ai les deux équations aux différences ordinaires

$$dqdy + dpdx = 0,$$
$$dpdq + Adxdy = 0,$$

desquelles on tire

$$dp = - dy\sqrt{(A)},$$
$$dq = dx\sqrt{(A)}:$$

or ces deux équations sont des différences exactes, & leurs intégrales complètes sont

$$p + y\sqrt{(A)} = \alpha,$$
$$q + x\sqrt{(A)} = \beta;$$

donc faisant $\alpha = \varphi\beta$, l'intégrale complète première de la proposée est

$$p + y\sqrt{(A)} = \varphi[q - x\sqrt{(A)}].$$

Si dans la proposée on fait $A = 0$, elle devient $rt - s^2 = 0$, équation des surfaces développables; & si on fait la même supposition dans l'intégrale, on a $p = \varphi q$, qui est une des intégrales premières de cette équation.

Actuellement, l'intégrale que l'on vient de trouver, est précisément l'équation que j'ai traitée, *article XXXII;* donc l'intégrale complète de la proposée est le résultat de l'élimination de l'indéterminée a entre les trois équations

$$z = x\varphi a + ay + \psi\left(\frac{y}{x}, a\right),$$

$$x\varphi' a + y + \psi''\left(\frac{x}{x}, a\right),$$

$$\psi'\left(\frac{y}{x}, a\right) = x^2 \sqrt{(A)},$$

dont la seconde est la différentielle de la première, prise en regardant a comme seule variable; & dans lesquelles φ est une fonction arbitraire d'une quantité, ψ est une fonction arbitraire de deux quantités, ψ' & ψ'' sont les coéfficiens de du & dv dans la différentielle de $\psi(u, v)$.

Ainsi la proposée appartient à une courbe à double courbure, excepté dans le cas où l'on a $A = 0$; alors elle appartient à toutes les surfaces développables.

XXXVIII.

EXEMPLE II. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$(rt - s^2)^2 + 4rs = 0.$$

Je chasse r & t, au moyen des équations

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy,$$

ce qui donne

$$\left.\begin{array}{l}[dpdq - s(dqdy + dpdx)]^2 \\ + 4sdxdy^2(dp - sdy)\end{array}\right\} = 0;$$

différenciant cette équation, en regardant s comme seule variable, & éliminant ensuite s au moyen de cette différentielle, je trouve l'équation aux différences ordinaires,

$$dpdq = dy^2.$$

Or, cette équation élevée est comprise dans celles que j'ai traitées, *article VII*, & en faisant, pour abréger,

$$(p - \alpha)(q - \varphi\alpha) - y^2 = M,$$

son intégrale est le résultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0;$$

donc une des intégrales premières de la proposée est le système des deux premières de ces trois équations, c'est-à-dire, le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les deux suivantes,

$$(p - \alpha)(q - \varphi\alpha) - y^2 = 0,$$
$$(p - \alpha)\varphi'\alpha + q - \varphi\alpha = 0.$$

Pour avoir l'intégrale finie, je tire de ces deux équations les valeurs de p & q, ce qui donne

$$p = \alpha + \frac{y}{\sqrt{(-\varphi'\alpha)}},$$
$$q = \varphi\alpha + y\sqrt{(-\varphi'\alpha)};$$

& substituant ces valeurs dans $dz = pdx + qdy$, je trouve

$$dz = \alpha dx + dy\varphi\alpha + \frac{y}{\sqrt{(-\varphi'\alpha)}}(dx - dy\varphi'\alpha).$$

Si cette dernière équation étoit intégrable, en regardant α comme constante, & que son intégrale, complétée par

une fonction arbitraire de a, fût $M = 0$, l'intégrale finie demandée seroit le résultat de l'élimination de a entre les deux équations $M = 0$, $(\frac{dM}{da}) = 0$, & cette intégrale appartiendroit à une surface courbe. Mais la dernière équation aux différences ordinaires n'est pas intégrable en regardant a comme constante; & pour qu'elle le devînt, il faudroit encore regarder $x - y\varphi' a$ comme constante; donc je pourrai l'intégrer dans cette double hypothèse, & alors il faudra, 1.° compléter l'intégrale par une fonction arbitraire des deux quantités regardées comme constantes dans l'intégration; 2.° exprimer par deux équations, que ces deux quantités n'ont pas varié, ce qui donnera

$$z = ax + y\varphi a + \psi[(x - y\varphi' a), a]$$

$$x + y\varphi' a - y\varphi'' a \psi' + \psi'' = 0;$$

$$\psi' = \frac{y}{\sqrt{(-\varphi' a)}};$$

donc l'intégrale finie de la proposée est le résultat de l'élimination de a entre les trois équations précédentes, dont la seconde est la différentielle de la première, prise en regardant a comme constante, & dans lesquelles φ est une fonction arbitraire d'une quantité, ψ est une fonction arbitraire de deux quantités, & ψ', ψ'' sont les coéfficiens de du & dv dans la différentielle de $\psi(u, v)$. Ainsi la proposée appartient à une courbe à double courbure.

XXXIX.

EXEMPLE III. Soit proposé

$$Ar + Bq + z = 0,$$

dans laquelle A & B sont des constantes.

Je substitue pour r sa valeur dans $dp = rdx + sdy$, & je trouve

$$Adp + (Bq + z)\,dx = Asdy;$$

éliminant s au moyen de la différentielle prise en regardant s comme seule variable, ce qui se réduit à égaler à zéro les deux membres de l'équation, j'obtiens les deux équations aux différences ordinaires simultanées,

$$Adp + (Bq + z)\,dx = 0,$$
$$dy = 0;$$

en sorte que si la premiére satisfaisoit aux conditions d'intégrabilité, & que son intégrale fût $M = \alpha$, l'intégrale première de la proposée seroit $M = \varphi\, y$. Mais la première équation ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité, & son intégrale, prise indépendamment de la seconde équation, seroit le systême des deux équations simultanées,

$$Ap + \varphi x = 0,$$
$$\varphi' x = Bq + z;$$

donc cette intégrale devant être prise en supposant que la seconde équation ait lieu, l'arbitraire qui la complète doit être aussi fonction de y; & l'on doit avoir pour intégrale première de la proposée, le systême des équations simultanées,

$$Ap + \varphi(x, y) = 0,$$
$$\varphi'(x, y) = Bq + z,$$

dans lesquelles φ' est le coéfficient de dx dans la différentielle de $\varphi(x, y)$.

Cette intégrale première peut être mise sous une autre forme; car si l'on tire de ces équations les valeurs suivantes de p, q,

$$p = \frac{-\varphi(x,y)}{A},$$
$$q = \frac{\varphi'(x,y) - z}{B},$$

& qu'on les substitue dans $dz = p\,dx + q\,dy$, on aura

$$dz = \frac{-dx\,\varphi(x,y)}{A} + \frac{dy\,\varphi'(x,y) - z\,dy}{B},$$

équation aux différences ordinaires du premier ordre, qui ne renferme aucune indéterminée, & qui devant subsister sans condition, est elle-même la véritable intégrale première de l'équation aux différences partielles du second ordre, c'est-à-dire, qu'elle exprime la même chose, & qu'elle est de la même généralité que la proposée; & parce que cette équation ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité, & que son intégrale ne peut être exprimée que par le système de deux équations simultanées, il s'ensuit que la proposée appartient à une courbe à double courbure.

Actuellement, pour intégrer encore une fois cette équation, soit $\varphi(x, y)$ le coéfficient de dx dans la différentielle d'une autre fonction arbitraire $\psi(x, y)$, de manière que l'on ait

$$\varphi(x,y) = \psi(x,y),$$
$$\varphi'(x,y) = \psi'(x,y),$$

ψ' étant le coéfficient de dx^2 dans la différence seconde de ψ, l'équation aux différences ordinaires deviendra

$$dz = -d\frac{\psi(x,y)}{A} + dy\left[\frac{\psi'(x,y) - z}{B} + \frac{\psi''(x,y)}{A}\right],$$

ψ'' étant le coéfficient de dy dans la différentielle de $\psi(x,y)$. Or d'après ce que j'ai dit sur l'intégration des équations aux différences ordinaires linéaires, l'intégrale de cette équation est le système des deux équations simultanées

$$z = -\frac{\psi(x,y)}{A} + \pi y,$$
$$\pi' y = \frac{\psi'(x,y) - z}{B} + \frac{\psi''(x,y)}{A},$$

dans lesquelles π est une fonction arbitraire de la seule quantité y; donc ce système d'équations est aussi l'intégrale finie & complète de la proposée; ce qu'il est très-facile de vérifier par la différenciation.

XL.

Le même procédé s'applique aux équations d'ordres supérieurs. Je ne me permettrai qu'un seul exemple.

Soit proposé d'intégrer l'équation aux différences partielles du troisième ordre

$$\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right) = \left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right)\left(\frac{d^3 z}{dx\, dy^2}\right),$$

je chasse trois de ces différences partielles au moyen des trois équations suivantes

$$dr = \left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) dx + \left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right) dy,$$

$$ds = \left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right) dx + \left(\frac{d^3 z}{dx\, dy^2}\right) dy,$$

$$dt = \left(\frac{d^3 z}{dx\, dy^2}\right) dx + \left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right) dy,$$

ce qui donne, en conservant $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)$,

$$\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)(dt\,dy^2 - dr\,dx^2) = dr(ds\,dy - dr\,dx);$$

je différencie cette équation en regardant $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)$ comme seule variable, & j'élimine cette quantité au moyen de la différentielle, ce qui, à cause que $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)$ est linéaire, se réduit à égaler à zéro chacun des membres de l'équation, & j'ai les deux équations aux différences ordinaires

$$dr(ds\,dy - dr\,dx) = 0,$$

$$dt\,dy^2 - dr\,dx^2 = 0.$$

La première de ces deux équations a deux racines, dont l'une est $dr = 0$, en vertu de laquelle la seconde équation devient $dt\,dy^2 = 0$; dont une des racines est $dt = 0$; donc on a simultanément les deux équations

$$dr = 0,$$
$$dt = 0;$$

or les intégrales complètes de ces équations sont $r = \alpha$, $t = \mathcal{C}$; donc une des intégrales premières de la proposée est

$$t = \varphi r,$$

ce qu'il est facile de vérifier par la différenciation.

X L I.

Les équations aux différences partielles élevées ne sont pas les seules qui puissent appartenir à des courbes à double courbure; la plupart des équations linéaires sont encore dans le même cas; nous nous contenterons de le faire voir par l'équation

$$(A)\quad Ar + Bs + Ct + Dp + Eq + F = 0,$$

dans laquelle tous les coéfficiens sont constans. Nous avons déjà traité cette équation dans le Mémoire précédent, *article XXX;* mais l'intégrale que nous avons trouvée est encore trop particulière.

Si l'on substitue dans cette équation par r & t leurs valeurs prises dans

$$dp = r\,dx + s\,dy,\ dq = s\,dy + t\,dy,$$

& qu'ensuite l'on élimine s au moyen de la différentielle prise en regardant s comme seule variable, on aura les deux équations aux différences ordinaires simultanées

$$(B)\qquad A\,dy^2 - B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0,$$

$$(C)\ A\,dp\,dy^2 - C\,dq\,dx + dx\,dy\,(Dp + Eq + F) = 0,$$

les

les racines de la première sont

$$dy - kdx = 0, \quad \& \quad dy + k'dx = 0,$$

k & k' étant les racines de l'équation algébrique

$$Ak^2 - Bk + C = 0;$$

ainsi, en employant la première racine, & l'introduisant dans l'équation (C), les deux équations aux différences ordinaires simultanées deviennent

$$(D) \qquad dy - kdx = 0,$$

$$(E) \quad A(dp + k'dq) + dx(Dp + Eq + F) = 0.$$

Ce sont ces deux équations qui doivent donner une des intégrales premières de la proposée.

L'intégrale de l'équation (D) est $y - kx = \alpha$, α étant la constante arbitraire; si celle de l'équation (E) étoit $M = C$, l'intégrale première seroit $M = \varphi\alpha$; mais, 1.° l'équation (E) n'appartient pas en général à une surface courbe, & son intégrale ne peut être une équation unique que dans le cas où les coéfficiens de la proposée satisfont à l'équation

$$CD^2 + AE^2 = BDE;$$

dans tous les autres cas, l'intégrale de l'équation aux différences ordinaires (E), considérée indépendamment de l'équation (D), ne peut être exprimée que par le système des deux équations simultanées

$$A(p + k'q) + \varphi x = 0,$$

$$\varphi' x = Dp + Eq + F;$$

2.° l'équation (E) ne doit pas être considérée seule, & son intégrale doit être prise en supposant que l'équation (D) ait lieu, c'est-à-dire, que α soit constant; donc cette intégrale doit être complétée, non pas par une fonction de x seulement, mais par une fonction de x & de α; donc

la forme sous laquelle se présente d'abord l'intégrale première de la proposée, est le système des deux équations

$$(F)\ A(p + k'q) + \varphi(x, y - kx) = 0,$$
$$(G)\ \varphi'(x, y - kx) = Dp + Eq + F,$$

dans lesquelles φ est une fonction arbitraire de deux quantités, & où φ' est le coéfficient de du dans la différence de $\varphi(u, v)$.

Cette intégrale se vérifie par la différenciation; d'ailleurs si l'on fait $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, la proposée devient

$$Ar + Bs + Ct = 0,$$

& l'équation (G) donne $\varphi'(x, y - kx) = 0$, ce qui exprime que la fonction φ, n'est composée que de la seule quantité $y - kx$; donc alors l'intégrale première se réduit à l'équation unique & connue

$$A(p + k'q) + \varphi(y - kx) = 0.$$

Des deux équations (F), (G) on tire les valeurs suivantes de p & de q,

$$p(Dk' - E) = \frac{E}{A}\varphi(x, y - kx) - k'[F - \varphi'(x, y - kx)],$$
$$q(Dk' - E) = -\frac{D}{A}\varphi(x, y - kx) + F - \varphi'(x, y - kx);$$

& en les substituant dans $dz = pdx + qdy$, on trouve

$$(H)\ dz(Dk' - E) = \frac{\varphi}{A}(Edx - Ddy) + (F - \varphi')(dy - k'dx),$$

équation aux différences ordinaires, qui exprime seule la même chose que la proposée, & qui est une de ses intégrales premières, complétée par une fonction de deux

quantités. Si dans cette équation, l'on change les deux quantités k, k' l'une en l'autre, il est évident que l'on aura l'autre intégrale première de la proposée.

Les deux intégrales premières de l'équation *(A)* aux différences partielles linéaires, sont donc l'une & l'autre une véritable équation aux différences ordinaires, dans laquelle il n'est plus question des manières différentes dont la quantité z a pu varier; & parce que ces deux équations ne satisfont pas à la condition d'intégrabilité, & que leur intégrale commune ne peut être exprimée que par le système de deux équations simultanées, il s'ensuit que la proposée n'appartient pas en général à une surface courbe, mais à une courbe à double courbure.

Pour intégrer l'équation *(H)*, il faut observer d'abord que l'intégrale du premier membre doit être une fonction des deux quantités $Ex - Dy$ & $y - k'x$, & ensuite que les différences partielles de cette fonction doivent être égales aux deux termes respectifs du second membre; ainsi l'intégrale finie de l'équation *(A)* est comportée par le système des trois équations

$$z(Dk' - E) = \psi(Ex - Dy, y - k'x),$$
$$A\psi'(Ex - Dy, y - k'x) = \varphi(x, y - kx),$$
$$\psi''(Ex - Dy, y - k'x) = F - \varphi'(x, y - kx),$$

dans lesquelles ψ est une fonction arbitraire de deux quantités, & où ψ' & ψ'' sont les coéfficiens de du & dv dans la différentielle de $\psi(u, v)$. De ces trois équations, la seconde est destinée à donner la forme de la fonction φ, d'après celle de la fonction ψ, & les deux autres équations sont celles de la courbe à double courbure, qui est le lieu de la proposée.

Si dans les équations *(D)*, *(E)* on substitue pour dx, dy, leurs valeurs tirées des deux suivantes,

$$dy - k\,dx = d\alpha, \quad dy - k'dx = d\alpha',$$

en opérant enſuite comme nous avons fait, on trouve que l'intégrale complète de la propoſée eſt le ſyſtème des deux équations

$$z = \pi(y - kx,\ y - k'x),$$

$$\left.\begin{array}{l}(kD - E)\pi' + (k'D - E)\pi'' \\ \quad + \frac{B^2 - 4AC}{A}\pi'^{''} - F\end{array}\right\} = 0,$$

dans leſquelles π eſt une fonction arbitraire de deux quantités, où π' & π'' ſont les coéfficiens de du, dv dans la différentielle de $\pi(u, v)$, & où $\pi'^{''}$ eſt la moitié du coéfficient de $dudv$ dans la différentielle ſeconde de la même fonction.

Comme l'équation d'une ſurface courbe quelconque peut toujours être miſe ſous la forme

$$z = \pi(y - kx,\ y - k'x),$$

il s'enſuit qu'il n'y a aucune ſurface courbe ſur laquelle on ne puiſſe tracer une des courbes à double courbure qui ſatisfont à la propoſée; & lorſque la fonction π eſt telle que la ſeconde équation eſt naturellement ſatisfaite, l'équation de la ſurface eſt elle-même un cas de l'intégrale complète, parce qu'alors la ſurface eſt toute compoſée de courbes qui ſatisfont à la propoſée.

Ce que nous venons de dire ſur cet exemple doit auſſi s'appliquer aux autres cas que nous avons traités dans le Mémoire précédent. Par un ſemblable raiſonnement, on trouve que pour l'équation $r - t - \frac{2p}{x} = 0$, de l'*article XV* du Mémoire, l'intégrale première complète eſt l'équation aux différences ordinaires

$$dz + dy\varphi(x, y - x) - \frac{dx + dy}{2x}\varphi'(x, y - x) = 0,$$

où φ eſt une fonction arbitraire de deux quantités, & où φ'

eſt le coéfficient de du dans la différentielle de $\varphi\,(u, v)$. Enfin l'intégrale finie eſt le ſyſtème des deux équations

$$z = \psi\,(x + y, x - y),$$

$$\psi' + \psi'' = 2\,x\,\psi''',$$

dans leſquelles ψ eſt une fonction arbitraire de deux quantités, où ψ', ψ'' ſont les coéfficiens de du, dv dans la différentielle de $\varphi\,(u, v)$, & où ψ''' eſt la moitié du coéfficient de $du\,dv$ dans la différentielle ſeconde de la même fonction.

CONCLUSION GÉNÉRALE.

Il réſulte de ce ſupplément :

1.° que les équations aux différences ordinaires, pour leſquelles les conditions d'intégrabilité ne ſont pas ſatisfaites, ne contiennent rien d'abſurde, ni d'impoſſible, & qu'elles ſont ſuſceptibles d'une véritable intégration en quantités finies.

2.° Que les intégrales de ces équations ſont complétées, par des fonctions arbitraires de quantités variables, fonctions que l'on n'avoit encore employées que pour les intégrales des équations aux différences partielles.

3.° Que les conditions d'intégrabilité ont ſeulement pour objet d'indiquer le nombre des équations dont l'intégrale finie doit être compoſée, toute élimination d'indéterminées étant ſuppoſée faite.

4.° Que les intégrales du plus grand nombre des équations aux différences partielles ne ſont pas ſuſceptibles d'être exprimées par une ſeule équation, même en ſuppoſant que l'élimination de toutes les indéterminées ſoit faite ; c'eſt-à-dire, par exemple, que dans le cas de trois variables, le plus grand nombre des équations aux différences partielles appartient à des courbes à double courbure, & non pas à des ſurfaces courbes, ce que toutes

les méthodes ordinaires d'intégration supposent tacitement; & alors le nombre des quantités qui entrent dans les fonctions arbitraires est plus grand que celui des variables principales diminué d'une unité.

5.° Qu'il y a certaines équations aux différences partielles, dont les intégrales intermédiaires sont de véritables équations aux différences ordinaires.

6.° Enfin, que la Géométrie peut encore faire de très-grands progrès, parce qu'on a le moyen de mettre en analyse des manières nouvelles d'engendrer les courbes, & parce qu'on a la faculté d'entendre un grand nombre de propriétés de l'étendue, qui sont exprimées par les relations qu'ont entr'elles des équations jusqu'ici regardées comme impossibles.

ADDITION.

DANS le supplément qui précède, j'ai construit plusieurs équations aux différences ordinaires élevées; mais de toutes les équations linéaires, qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, & que j'ai intégrées, je n'en ai construit aucune; je vais montrer, par un exemple, ce que ces sortes d'équations signifient dans l'espace.

Si l'on suppose qu'un œil, réduit à un point unique, soit placé d'une manière quelconque, par rapport à une surface courbe, j'appelle *ligne du contour apparent* de cette surface, la courbe composée des points extrêmes de cette surface, que l'œil peut apercevoir; cette ligne est le contact de la surface courbe avec une surface conique qui lui seroit circonscrite, & dont le sommet seroit au point de l'œil; d'après cela, je suppose qu'il s'agisse de trouver la ligne du contour apparent d'une surface quelconque de révolution autour de l'axe des z, vue par un œil situé dans le point dont les coordonnées sont a, b, c, indépendamment de la courbe génératrice de la surface.

L'équation de la surface de révolution est

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

& son équation aux différences partielles est

$$py - qx = 0.$$

L'équation de la surface conique à base quelconque, & dont le sommet est au point de l'œil, est

$$\frac{z - c}{x - a} = \psi\left(\frac{y - b}{x - a}\right),$$

& son équation aux différences partielles est

$$p(x - a) + q(y - b) = z - c.$$

Or, il est évident que pour la courbe demandée, non-seulement les x, y, z de la surface de révolution & de la surface conique, sont respectivement les mêmes, mais encore que les quantités p, q, sont les mêmes dans les deux surfaces, puisque tout le long de la courbe, ces deux surfaces ont le même plan tangent. Donc dans les deux équations

$$py - qx = 0, p(x - a) + q(y - b) = z - c,$$

les cinq quantités x, y, z, p, q ont les mêmes valeurs; donc si l'on prend dans ces deux équations les valeurs de p & de q, & qu'on les substitue dans $dz = pdx + qdy$, qui a également lieu pour les deux surfaces, on aura

$$[x(x - a) + y(y - b)]dz = (z - c)(xdx + ydy),$$

équation aux différences ordinaires linéaires, qui ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, & qui, considérée seule, exprime le contour apparent d'une surface quelconque de révolution autour de l'axe des z, vue par un œil placé dans le point dont les coordonnées sont a, b, c. L'intégrale de cette équation est le système des deux suivantes

$$z = \varphi\,(x^2 + y^2),$$

$$2\,[\,x\,(x - a) + y\,(y - b)\,]\,\varphi' = \varphi - c,$$

dans lesquelles φ est une fonction arbitraire.

On voit donc que toute équation aux différences ordinaires à trois variables, linéaire, du premier ordre, & qui ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, appartient à la courbe de contact de deux surfaces courbes générales, c'est-à-dire, de deux surfaces données chacune par une équation aux différences partielles linéaires.

Fautes à corriger dans ce Mémoire.

Pages,	*Lignes,*	*Au lieu de,*	*Lisez,*
502.	27.....	faisant la,..........	faisant sur la,
504.	12.....	le mot qu'elle exprime,	ce mot, qu'elle exprime,
507.	22.....	sommes,...........	sommets,
517.	dernière,.	le..............	la
522.	25.....	$d\left(\frac{\psi\zeta}{d\zeta}\right)$,........	$\left(\frac{d.\psi\zeta}{d\zeta}\right)$,
528.	7.....	THÉORÈME III,..	THÉORÈME II,
529.	16.....	N,..............	M,
533.	18 & 26,	u^2..............	$\frac{u^2}{2}$,
	21.....	o,..............	z,
	27.....	y,..............	$z - y$,
	28.....	z,..............	$-z$,
545.	19.....	dx'^2..............	dx^2.



SUITE

SUITE DE L'ESSAI

Pour connoître la Population du Royaume, & le nombre de ses habitans, en adaptant aux Villes, Bourgs & Villages, portés sur chacune des Cartes de M. de Cassini, l'année commune des Naissances, & en la multipliant par 26.

Par M.rs DU SÉJOUR, le Marquis DE CONDORCET & DE LA PLACE.

Population de la Carte de la France, n.° 133. ISLE-DE-RÉ.

« CETTE Isle contient la ville de Ré, & sept villages.

L'année commune des naissances de la ville de Ré, est de . . . . 149.

Celle des 7 villages, est de . . . . 528.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
5 ½.	1.	7.	3874.	13728.	17,602.	2496.

Cette île n'a qu'environ 5 lieues ½ carrées de superficie habitable; le reste est occupé par des rochers & des bancs, couverts le plus souvent par la mer.

LILLE.

Population de la Carte de la France, n.° 41.

« CETTE Carte contient les villes de Lille, de Douai, de Saint-Amand & de Condé, & 187 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Lille, est de 2462.
Dans celle de Douai.......... de............. 665.
Dans celle de Saint-Amand...... de............. 296.
Dans celle de Condé.......... de............. 155.
Et dans les 187 bourgs ou villages, de............ 7749.

OMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
107.	4.	187.	93028.	201474.	294502.	1883.

Cette Carte ne contient pour la France que 107 lieues; le surplus dépend de la Flandre Autrichienne.

ISLE D'OLERON.

Population de l'île d'Oleron, portée sur les Cartes, n.os 133 & 134.

« CETTE île contient la ville d'Oleron, & 5 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Oleron, est de 95.
Et dans les 5 bourgs ou villages, de.............. 484.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
12.	1.	5.	2470.	12584.	15054.	1094.

Cette île ne contient que 12 lieues carrées habitées; il y en a environ 3 de sables, qui ne sont susceptibles d'aucune culture.

Population de la Carte de la France, n.° 52. CLERMONT-FERRAND.

« CETTE Carte contient les villes de Clermont, de Riom, de Thiers, d'Ambert, de Billom & de Maringues, « & 228 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Clermont, est de		789.
Dans celle de Riom	de	526.
Dans celle de Thiers	de	508.
Dans celle d'Ambert	de	228.
Dans celle de Billom	de	143.
Dans celle de Maringues	de	124.
		2318.
Et dans les 228 bourgs ou villages, de		9534.
TOTAL		11852.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	6.	228.	60268.	247884.	308152.	791.

Population de la Carte de la France, n.° 5. SAINT-OMER.

« CETTE Carte contient les villes d'Hesdin, de Lens, de Lilliers, de Saint-Omer, de Saint-Pol, de Saint- « Venant, d'Armentières, de Béthune & de Cassel, & « 435 bourgs ou villages. »

L'année commmune des naissances dans la ville d'Hesdin, est de		117.
Dans celle de Lens	de	76.
Dans celle de Lilliers	de	115.

Dans celle de Saint-Omer.......de............ 647.
Dans celle de Saint-Pol........de............ 107.
Dans celle de Saint-Venant......de............ 59.
Dans celle d'Armentières........de............ 229.
Dans celle de Béthune..........de............ 162.
Dans celle de Caffel...........de............ 130.

1642.
Et dans les 435 bourgs ou villages, de............ 9020.

TOTAL............ 10662.

NOMBRE des LIEUES de fuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
246.	9.	435.	42692.	234520.	277212.	953.

Cette Carte ne contient, pour la France, que 246 lieues; le furplus dépend de la Flandre Autrichienne.

DUNKERQUE.

Population de la Carte de la France, n.° 6.

« CETTE Carte contient les villes de Dunkerque, » Bergues, Bourgbourg, Gravelines, Ardres & Calais, & 103 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiffances dans la ville de Dunkerque,
eft de.................................. 1032.
Dans celle de Bergues..........de............ 231.
Dans celle de Bourgbourg.......de............ 126.
Dans celle de Gravelines........de............ 101.
Dans celle d'Ardres............de............ 50.
Dans celle de Calais...........de............ 225.

1765.
Et dans les 103 bourgs ou villages, de............ 3024.

TOTAL............ 4789.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
83.	6.	103.	45890.	78624.	124514.	947.

Cette Carte ne contient, pour la France, que 83 lieues; le reste est couvert par la mer, & occupé par le pays étranger.

Population de la Carte de la France, n.° 86. MÂCON.

« CETTE Carte contient les villes de Mâcon, de Roanne, de Semur & de Villefranche, & 313 bourgs « ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Mâcon, est de	956.
Dans celle de Roanne . . . . de	272.
Dans celle de Semur en Brionnois, . . de	45.
Dans celle de Villefranche . . . . de	184.
	1457.
Et dans les 313 bourgs ou villages, de	8086.
TOTAL	9543.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	4.	313.	37882.	210236.	248118.	841.

EU.

Population de la Carte de la France, n.° 23.

« CETTE Carte contient les villes d'Eu, du Tréport & de Saint-Vallery, & 156 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Eu, est de	109.
Dans celle du Tréport.......... de	34.
Dans celle de Saint-Vallery...... de	103.
	246.
Et dans les 156 bourgs ou villages, de	2209.
TOTAL	2455.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS. des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
82.	3.	156.	6396.	57434.	63830.	778.

Cette Carte ne contient que 82 lieues cultivées; le reste est couvert par la mer & par les sables de l'embouchure de la Somme.

BOURG EN BRESSE.

Population de la Carte de la France, n.° 117.

« CETTE Carte contient la ville de Bourg, & 273 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Bourg, est de	286.
Et dans les 273 bourgs ou villages, de	6483.
TOTAL	6769.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
245.	1.	273.	7436.	168558.	175994.	688.

Cette Carte ne contient, pour la France, que 245 lieues; le surplus dépend de la Savoie.

Population de la Carte de la France, n.° 53. ISSOIRE.

« CETTE Carte contient les villes d'Issoire & de Brioude, & 235 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Issoire, est de.................................. 181.

Dans celle de Brioude..........de............ 171.

352.

Et dans les 235 bourgs ou villages, de............ 5842.

TOTAL............. 6194.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	235.	9152.	151892.	161044.	607.

CHALLON-SUR-SAÔNE.

Population de la Carte de la France, n.° 85.

« CETTE Carte contient les villes de Challon-sur-Saône, Clugny & Montcenis, & 252 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Challon, est de.................................... 934.
Dans celle de Clugny..........de............. 149.
Dans celle de Montcenis........de............. 50.
Et dans les 252 bourgs ou villages, de............ 5593.

TOTAL............ 6726.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	3.	252.	29458.	145496.	174954.	582.

MONTLUÇON.

Population de la Carte de la France, n.° 12.

« CETTE Carte contient les villes de Montluçon, Gueret & Evaux, & 219 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Montluçon, est de.................................... 190.
Dans celle de Gueret..........de............. 121.
Dans celle d'Évaux............de............. 71.

382.

Et dans les 219 bourgs ou villages, de............ 5436.

TOTAL............ 5818.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	3.	219.	9932.	141336.	151238.	565.

Population

Population de la Carte de la France, n.° 114. DIJON.

« CETTE Carte contient les villes de Dijon & de Gray, & 273 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Dijon, est de.................................. 621.

Dans celle de Gray...........de............ 170.

791.

Et dans les 273 bourgs ou villages, de............ 5434.

TOTAL............ 6225.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	273.	20566.	141284.	161850.	565.

Population de la Carte de la France, n.° 8. ORLÉANS.

« CETTE Carte contient les villes d'Orléans, de Montargis & de Pithiviers, & 212 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Orléans, est de.................................. 1194.

Dans celle de Montargis.........de........... 197.

Dans celle de Pithiviers.........de........... 91.

1482.

Et dans les 212 bourgs ou villages, de............ 5208.

TOTAL............ 6690.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	3.	212.	38572.	135408.	173980.	541.

SENS.

Population de la Carte de la France, n.° 46.

« CETTE Carte contient les villes de Sens, de Provins, » de Nogent-sur-Seine & de Montereau, & 290 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Sens, est de	540.
Dans celle de Provins..........de	157.
Dans celle de Montereau.......de	118.
Dans celle de Nogent..........de	112.
	727.
Et dans les 290 bourgs ou villages, de	4825.
TOTAL	5552.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	4.	290.	18902.	125450.	144352.	502.

Population de la Carte de la France, n.° 22.

BOULOGNE.

« CETTE Carte contient les villes de Boulogne & de Montreuil, & 69 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Boulogne, est de	295.
Dans celle de Montreuil........de	125.
	420.
Et dans les 69 bourgs ou villages, de	882.
TOTAL	1302.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
46.	2.	69.	10920.	22932.	33852.	498.

Population de la Carte de la France, n.° 21.

AMBLETEUSE ou PAS DE CALAIS.

« CETTE Carte ne contient aucune ville, mais seulement 18 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans ces 18 bourgs ou villages, est de	225.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
12.	0.	18.	0.	5850.	5850.	488.
Cette Carte ne contient que 12 lieues de superficie; le reste est couvert par la mer.						

AUTUN.

Population de la Carte de la France, n.° 84.

« CETTE Carte contient les villes d'Autun, de Beaune, » de Saulieu, d'Arnay-le-Duc & de Châteauchinon, & 207 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Autun, est de	283.
Dans celle de Beaune . . . . de	351.
Dans celle de Saulieu . . . . de	108.
Dans celle d'Arnay-le-Duc . . . . . . de	86.
Dans celle de Châteauchinon . . . . . de	85.
	913.
Et dans les 207 bourgs ou villages, de	4629.
TOTAL	5542.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	5.	207.	23738.	120354.	144092.	481.

BOURGES.

Population de la Carte de la France, n.° 10.

« CETTE Carte contient les villes de Bourges & d'Issoudun, & 170 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Bourges, est de	951.
Dans celle d'Issoudun . . . . de	464.
	1415.
Et dans les 170 bourgs ou villages, de	4588.
TOTAL	6003.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	170.	36790.	119288.	156078.	477.

Population de la Carte de la France, n.° 49.

NEVERS.

« CETTE Carte contient les villes de Nevers & de la Charité, & 208 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Nevers, est de.................................. 475.
Dans celle de la Charité........de.............. 182.

657.

Et dans les 208 bourgs ou villages, de............ 4566.

TOTAL............ 5223.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	208.	17082.	118716.	135798.	475.

Population de la Carte de la France, n.° 11.

LA CHÂTRE.

« CETTE Carte contient les villes de la Châtre & de Saint-Amand, & 170 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de la Châtre, est de.................................. 171.
Dans celle de Saint-Amand......de............ 224.

395.

Et dans les 170 bourgs ou villages, de............ 4176.

TOTAL............ 4571.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	170.	10270.	108576.	118846.	434.

MOULINS.

Population de la Carte de la France, n.° 50.

« CETTE Carte contient les villes de Moulins, de » Bourbon-Lancy & de Saint-Pierre-le-Moutier, & 142 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Moulins, est de	636.
Dans celle de Bourbon-Lancy....de	102.
Dans celle de Saint-Pierre-le-Moutier, de	114.
	852.
Et dans les 142 bourgs ou villages, de	4039.
TOTAL	4891.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	3.	142.	19500.	105014.	174514.	420.

AUBUSSON.

Population de la Carte de la France, n.° 13.

« CETTE Carte contient la ville d'Aubusson, & 157 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Aubusson, est de	180.
Et dans les 157 bourgs ou villages, de	3845.
TOTAL	4025.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	1.	157.	4680.	99970.	104650.	400.

Population de la Carte de la France, n.° 83. AVALON.

« CETTE Carte contient les villes d'Avalon, de Montbart, de Noyers & de Semur en Auxois, & 239 « bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Avalon, est de	144.
Dans celle de Montbart........de	79.
Dans celle de Noyers..........de	75.
Dans celle de Semur en Auxois,...de	132.
	430.
Et dans les 239 bourgs ou villages, de	3710.
TOTAL	4140.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	4.	239.	11180.	96460.	107640.	386.

Population de la Carte de la France, n.° 58. NARBONNE.

« CETTE Carte contient les villes de Narbonne, d'Agde & de Besiers, & 75 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Narbonne, est de. . . . . 293.
Dans celle de Bésiers. . . . . de. . . . . 495.
Dans celle d'Agde. . . . . de. . . . . 239.

1027.

Et dans les 75 bourgs ou villages, de. . . . . 1259.

TOTAL. . . . . 2286.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
105.	3.	75.	26702.	32734.	59436.	311.

Cette Carte ne contient que 105 lieues de superficie; le reste est couvert par la mer.

MONTPELLIER.

Population de la Carte de la France, n.° 92.

« CETTE Carte contient les villes de Montpellier & d'Arles, & 107 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Montpellier, est de. . . . . 1104.
Dans celle d'Arles. . . . . de. . . . . 615.

1719.

Et dans les 107 bourgs ou villages, de. . . . . 2066.

TOTAL. . . . . 3785.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
183.	2.	107.	44694.	53716.	98410.	293.

Cette Carte ne contient que 183 lieues de superficie; le reste est couvert par la mer.



MÉMOIRE

I. TAB des décès en Religion dans le Royaume, ée 1783 inclusivement.

ANNÉ	T S		EXCÉDANT des MORTS. sur les Naissances.	EXCÉDANT des NAISSANCES sur les Morts.
	ION.	TOTAL DES MORTS.		
1770 . .	4.	709,786.	. . . .	240,742.
1771 . .	3.	770,101.	. . . .	143,113.
1772 . .	3.	864,656.	. . . .	40,924.
1773 . .	5.	840,639.	. . . .	59,799.
1774 . .	5.	774,988.	. . . .	164,620.
1775 . .	3.	817,480.	. . . .	117,000.
1776 . .	).	740,699.	. . . .	198,375.
1777 . .	).	751,711.	. . . .	246,480.
1778 . .	3.	744,160.	. . . .	188,640.
1779 . .	3.	966,467.	. . . 9800 . .	
1780 . .	7.	914,017.	. . . .	75,289.
1781 . .	3.	881,138.	. . . .	89,268.
1782 . .	1.	948,502.	. . . .	27,201.
1783 . .	4.	952,205.	. . . 4264 . .	
Résultat des 14 anné	5.	11,696,549.	14,064.	1,591,451.
Ann. com	5.	834,037.	À déduire sur les résultats de la colonne de l'excédant des Naissances sur les Morts.	14,064.
			Reste.	1,577,387.
			Donc l'année commune, sur 14, est de	112,670.

II. *POPnéralités, pendant l'année 1783.*

NUMÉR. qui constatent l'ordre des Généralités & Provinces.	DÉNO[...] DES GÉNÉRA[...] compri[...] distinguées en pays [...] la ville de PARIS [...] comme C[...]	Naissances avec les Décès. EXCÉDANT des Décès sur [l]es Naissances.	EXCÉDANT absolu des Morts sur les Naissances.	OBSERVATIONS.
	PARIS (V	322.		
	GÉNÉRALIT			
1.	PARIS....	6,438.		
2.	ORLÉANS	5,178.		
3.	TOURS....	8,747.		
4.	POITIERS	346.		
5.	BOURGES.	1,695.		
6.	LIMOGES.	〃		
7.	LA ROCHE	1,527.		
8.	BORDEAU	〃		
9.	AUCH....	〃		
10.	MONTAU	〃		
11.	GRENOBL	〃		
12.	LYON.....	〃		
13.	RIOM.....	〃		
14.	MOULINS.	1,897.		
15.	CHÂLONS	159.		
16.	LE CLERM	90.		
17.	SOISSON	8.	4,264.	
18.	AMIENS.	1,089.		
19.	ROUEN..	1,150.		
20.	CAEN....	〃		
21.	ALENÇON	3,140.		
	GÉNÉRAL			
22.	RENNES.	11,121.		
23.	PERPIGNA	〃		
24.	MONTPEL	〃		
25.	AIX.....	2,839.		
26.	DIJON...	5,754.		
27.	BESANÇO	〃		
28.	STRASBO	〃		
29.	METZ....	1,380.		
30.	NANCY..	〃		
31.	VALENCI	〃		
32.	LILLE...	1,017.		
33.	ÎLE DE C	〃		
RÉSULTAT du Royaum		53,897.		

Ce Tableau présente des résultats d'autant plus affligeans, que, par comparaison avec ceux des quatre années antérieures, le nombre des Naissances y est diminué; que les décès y excèdent les Naissances, ce qui, depuis quatorze ans, n'étoit encore arrivé qu'en l'année 1779; qu'enfin les Mariages ne s'y trouvent pas dans la proportion nécessaire pour réparer, dans les années suivantes, la grande perte que la population a éprouvée.

Les maladies épidémiques, qui avoient ravagé la généralité d'Amiens en 1781, & qui avoient paru cesser en 1782, s'y sont renouvelées en 1783.

Les généralités d'Orléans, de Tours, de Poitiers, de Bourges, de la Rochelle, de Moulins, d'Alençon & de Rennes, qui, en 1782, avoient essuyé le même fléau, en ont encore été affligées en 1783.

L'épidémie s'est étendue dans les généralités de Paris, de Châlons, de Rouen, d'Aix, de Dijon, de Metz & de Lille.

Enfin les autres Généralités n'offrent pas des résultats capables d'indemniser de la mortalité que la plus grande partie du Royaume a éprouvée pendant le courant de l'année 1783.

MÉMOIRE
SUR LA COMBINAISON
DU PRINCIPE OXYGINE,
Avec l'Esprit-de-vin, l'Huile, & différens Corps combustibles.

Par M. LAVOISIER.

J'AI fait voir dans un Mémoire imprimé dans le recueil de l'Académie pour l'année 1781, *page 492*, que si on brûloit de l'esprit-de-vin dans un appareil propre à condenser la plus grande partie de l'eau produite par la combustion, on obtenoit environ dix-huit onces d'eau pour une livre ou seize onces d'esprit-de-vin. J'ai reconnu depuis que ce phénomène avoit constamment lieu dans la combustion d'un grand nombre de matières végétales & animales, & qu'on obtenoit également des huiles qui brûlent, un poids d'eau plus considérable que celui du combustible qui avoit été consommé.

L'appareil dont je me suis servi pour ce genre d'expériences, consiste dans une lampe construite sur les principes de celles de M.rs Meusnier, Argand, Lange & Quinquet; la mèche doit en être circulaire, elle doit avoir un canal intérieur qui donne un libre accès au courant d'air; la flamme doit être revêtue d'une cheminée de verre, dont on puisse à volonté rétrécir ou élargir l'ouverture inférieure; enfin, la mèche doit être mouchée courte, afin d'éviter la fumée, & que toute l'huile ou l'esprit-de-vin, élevé par la mèche, puisse brûler. A l'égard de la bougie, comme il auroit été très-difficile de lui fournir de l'air par un canal intérieur, & d'employer une mèche circulaire & creuse, j'ai été obligé de me borner à la cheminée extérieure de verre : mais pour que la combustion se

fît toujours à une même hauteur, & que la flamme de la bougie demeurât conftamment à l'embouchure de la cheminée de verre, je l'ai renfermée dans un tuyau de fer-blanc, dont elle occupoit toujours le haut, par le moyen d'un reffort à boudin qui la preffoit par-deffous, à la manière des cierges à reffort qu'on emploie maintenant dans la plupart des églifes.

Le tuyau de verre dans lequel brûle cette lampe ou bougie, s'adapte à une cheminée de fer-blanc, qui conduit la vapeur dans un ferpentin où elle fe condenfe comme on le voit, *figure 5*.

On n'obtient point, dans ces expériences, une quantité d'eau toujours conftante; le même combuftible en donne plus ou moins, fuivant que l'expérience a été fuivie avec plus ou moins de foin; mais, comme je l'ai déjà dit, à moins qu'on n'ait opéré très-négligemment, elle excède communément d'un huitième le poids de l'efprit-de-vin. L'augmentation eft plus confidérable avec l'huile; mais on n'obtient, avec la bougie, qu'un poids d'eau au plus égal à celui de la cire qui a été confommée. On verra dans la fuite de ce Mémoire, que cette différence à l'égard de la bougie, tient à ce qu'on ne peut adapter à cette combuftion le tuyau intérieur d'airage, & à ce qu'il fe forme de la fumée qui fe diffipe en pure perte: en effet, en opérant par une autre méthode dont je donnerai bientôt la defcription, on retire plus de dix-huit onces d'eau de la combuftion d'une livre de cire.

Ces augmentations de poids s'expliquent d'une manière toute naturelle, en admettant, comme je l'ai annoncé ailleurs, que l'eau n'eft point une fubftance fimple, qu'elle eft compofée d'air vital & de gaz inflammable. On ne peut douter en effet que l'efprit-de-vin, les huiles, & prefque tous les combuftibles ne contiennent de l'air inflammable: on en a la preuve en faifant paffer ces fubftances à travers un tube de verre rougi au feu; la matière charbonneufe fe dépofe dans l'intérieur du tube, & il en reffort de l'air

inflammable mêlé communément d'un peu d'acide charbonneux, & qui tient du charbon en dissolution.

Mais si l'esprit-de-vin & les huiles sont composés principalement d'air inflammable & de substance charbonneuse; si, d'un autre côté, il est démontré que, dans une combustion quelconque, l'air vital, ou plutôt sa base, que j'ai nommé *principe oxygine* se combine avec la substance qui brûle; enfin si principe oxygine, combiné avec l'air inflammable, forme de l'eau, si, combiné avec la substance charbonneuse, il forme de l'air fixe ou acide charbonneux, il est évident que, dans la combustion de l'esprit-de-vin & des huiles, il doit se former de l'eau & de l'acide charbonneux, & que le poids total des matières doit se trouver augmenté de toute la quantité d'air vital qui s'est combiné avec la substance qui a été brûlée. Cette théorie de la combustion est démontrée en partant des bases que j'ai cherché à établir dans mes précédens Mémoires; mais il me restoit à déterminer avec précision les quantités d'eau & d'acide charbonneux formées pendant la combustion des différentes substances, afin d'en conclure la quantité d'air inflammable & de principe charbonneux qu'elles contiennent: c'est l'objet que je me suis proposé à l'égard de quelques-unes, dans les expériences dont je vais rendre compte.

Une première condition de ce genre d'expériences étoit d'opérer la combustion dans des vaisseaux fermés, afin de ne rien perdre, & de pouvoir déterminer la quantité des substances employées & obtenues avant & après l'opération: mais la combustion de l'esprit-de-vin dans des vaisseaux fermés, sur-tout dans l'air vital, présentoit de grandes difficultés; en effet, à 66 degrés du thermomètre de M. de Réaumur, il prend l'état aériforme, & alors, quand il est mêlé avec l'air vital, au lieu de brûler paisiblement, il détonne avec fracas. Cette circonstance ne me permettoit pas d'opérer avec l'esprit-de-vin dans l'air vital, comme je l'avois fait pour le charbon, le phosphore &

quelques autres ſubſtances. Mais, avant de rendre compte des précautions particulières que j'ai priſes pour cette combuſtion, il eſt néceſſaire que je donne une idée de l'appareil dont j'ai coutume de me ſervir dans mes expériences pneumato-chimiques au mercure : il ſeroit peut-être difficile de m'entendre ſans cette connoiſſance préliminaire.

Après avoir eſſayé de différentes matières, je me ſuis déterminé à faire conſtruire en marbre la cuve dont je me ſers pour contenir le mercure.

J'ai donc fait tailler un bloc de marbre *BCDE*, *figures 1, 2 & 3*, de deux pieds de long ſur un pied de large & neuf pouces d'épaiſſeur; je l'ai fait creuſer d'environ quatre pouces pour contenir du mercure; & pour qu'on pût emplir commodément les jarres deſtinées aux expériences, j'y ai fait creuſer une rigole *TV* de quatre autres pouces, *figure 2.* Enfin, comme cette rigole pouvoit être embarraſſante dans quelques expériences, j'ai diſpoſé les choſes de manière qu'on pût la boucher & la condamner au moyen de petites planches qui entrent dans une rainure *xx*.

Avec cet appareil j'opère auſſi en grand ſur le mercure, qu'on a coutume de le faire ſur l'eau, & les tranſvaſions ſe font avec facilité.

Combuſtion de l'Eſprit-de-vin.

C'eſt dans cet appareil, que nous avons fait dans l'air vital, M. de la Place & moi, toutes les combuſtions de charbon & de phoſphore dont nous avons rendu compte dans le Mémoire que nous avons publié ſur la chaleur en 1780. Mais à l'égard de l'eſprit-de-vin, je me ſuis trouvé forcé, comme je l'ai dit, de prendre quelques précautions particulières.

Je me ſuis d'abord déterminé à n'opérer que dans de l'air atmoſphérique, pour éviter le danger d'une détonation; mais comme je ne pouvois pas eſpérer alors de faire durer long-temps la combuſtion, à cauſe de la grande quantité d'air vital que l'eſprit-de-vin conſomme en brûlant, j'ai diſpoſé mon appareil de manière à pouvoir

rendre de l'air vital à meſure qu'il s'en conſommoit. Cet appareil eſt repréſenté, *figure 4*.

On voit en *A* une cloche de criſtal de 15 à 18 pintes de capacité; on conçoit qu'elle doit être très-forte, afin de ſoutenir le poids de mercure qui doit s'y élever.

Sous cette cloche, qui eſt remplie d'air commun, on place une lampe *R* à eſprit-de-vin, dont le poids eſt très-exactement déterminé. On a dû placer ſur la mèche un petit atome de phoſphore, dont on expliquera l'uſage dans un moment. Cette cloche ſe poſe ſur le bain de mercure contenu dans la cuve *BCDE*. Enfin, on élève le mercure en ſuçant avec un ſiphon juſqu'à la hauteur *HI*.

L'intérieur de cette cloche communique par un ſiphon de verre *IKLM*, avec la cloche *S* qui eſt remplie d'air vital, & qui repoſe ſur une cuve d'eau. On peut ouvrir & fermer la communication entre les deux cloches, par le moyen d'un robinet *M*.

Avant de commencer l'expérience, on marque exactement ſur les deux cloches la hauteur de l'eau & celle du mercure; on meſure la hauteur de ces deux fluides au-deſſus de leur niveau, afin de connoître l'état de compreſſion ou de dilatation de l'air ſur lequel on opère; après quoi on allume la lampe *R* avec un fer rouge recourbé qu'on paſſe ſous le mercure: le phoſphore s'allume d'abord, & il communique l'inflammation à la mèche.

Peu de temps après que la lampe a été allumée, on s'aperçoit que ſa flamme diminue de vivacité; alors, pour prolonger la combuſtion, on ouvre le robinet *M*; auſſitôt une portion d'air vital paſſe de la cloche *S* dans la cloche *A*; en même-temps, l'eau monte dans la cloche *S*, & le mercure deſcend dans la cloche *A*, juſqu'à ce que la hauteur des deux fluides ſoit, dans chaque cloche, en raiſon inverſe de leur peſanteur ſpécifique. Il y a alors équilibre, tout demeure en repos, & on referme le robinet *M*. L'air de la cloche *A* étant devenu beaucoup plus propre à la combuſtion, au moyen de l'air vital qui y a été introduit, la lampe *R* y brûle mieux qu'elle n'avoit même brûlé dans le

premier instant; le volume d'air diminue de nouveau, le mercure monte; & lorsqu'on voit que la flamme est languissante, on redonne de nouvel air vital. On peut ainsi rendre deux ou trois fois de l'activité à la flamme, par une introduction d'air vital; mais, peu à peu, la quantité d'air fixe qui résulte de la combustion, s'accumule, & on arrive bientôt au terme où la combustion ne peut plus avoir lieu.

Cette expérience ne réussit pas toujours, & elle est souvent contrariée par de petits accidens; un des plus fréquens est la fracture de la cloche: la chaleur de la flamme en échauffe quelquefois tellement la voûte, qu'elle casse; aussi, d'un assez grand nombre que j'ai faites, n'y en a-t-il eu qu'une seule dont je sois pleinement satisfait.

La combustion faite, on laisse refroidir; on mesure exactement le volume des airs restant, en tenant compte de leur état de dilatation & de compression. On détermine ensuite la quantité d'air fixe ou acide charbonneux aériforme qui a été produite, en introduisant sous la cloche de l'alkali caustique en liqueur. Enfin, l'opération finie, on repèse la lampe, pour connoître la quantité d'esprit-de-vin qui a été consommée.

	gros	grains
Le poids de l'esprit-de-vin que je suis parvenu à brûler dans cette expérience, a été de......	1	21,50.
La quantité d'air vital consommé par la combustion, a été de 220,28 pouces, pesant, à raison d'un demi-grain le pouce cube....	1.	38,32.
TOTAL du poids des matières avant la combustion..........	2.	59,82.

La combustion finie, il s'est trouvé dans la cloche, air fixe ou acide charbonneux, 95,28 pouces, pesant, à raison de 0,695 grains le pouce cube............ 1 gros 23,28 grains.

De plus, il s'est trouvé une quantité d'eau assez considérable, partie répandue

en gouttelettes sur les parois intérieures de la cloche, partie rassemblée & nageant sur la surface du mercure. On conçoit qu'il auroit été impossible de recueillir cette eau, de manière à en déterminer le poids avec exactitude; mais il m'a été aisé de le conclure par le calcul. On ne peut douter en effet que le poids des matières qui ont servi à la combustion, ne soit le même avant & après l'opération. En supposant qu'il y eût quelque différence, elle ne pourroit être dûe qu'à la dissipation de la matière de la chaleur & de la lumière, qui seule s'échappe à travers les pores des vaisseaux: or, j'ai démontré ailleurs, que ces deux matières n'avoient qu'une pesanteur absolument insensible; je puis donc conclure pour le poids de l'eau . . . gros. 1. grains. 36,54.

TOTAL du poids des matières après la combustion . . . . 2. 59,82.

Mais 1 gros 23,28 grains d'acide charbonneux contiennent, air vital . . . . 68,60.

La quantité totale consommée dans l'expérience, étoit de . . . . 1. 38,32.

Il y a donc eu un excédant employé à faire de l'eau, & qui est de . . . . 41,72.

A quoi ajoutant la quantité de gaz inflammable nécessaire pour former de l'eau, à raison de 15 parties pour 85 d'air vital, & qui est de . . . . 7,36.

On aura, pour la quantité d'eau formée, . . 49,08.

	gros.	grains.
La quantité existante après l'expérience, étoit de	1.	36,54.
Il en existoit donc toute formée dans l'esprit-de-vin	"	59,46.

D'après cela, on pourra récapituler ainsi le produit des substances après la combustion.

	gros.	grains.
Air vital employé à faire de l'acide charbonneux	"	68,60
Air vital employé à faire de l'eau	"	41,72
Charbon contenu dans l'acide charbonneux	"	26,68
Gaz inflammable contenu dans l'eau qui s'est formée	"	7,36
Eau qui existoit dans l'esprit-de-vin avant la combustion	"	59,46
TOTAL du poids des matières après la combustion	2.	59,82

Si on retranche de ces quantités l'air vital qui n'a été introduit, dans l'expérience, que comme un moyen d'analyse, il restera pour la composition de 1 gros 21 grains ½ d'esprit-de-vin, les quantités qui suivent:

	gros.	grains.
Charbon	"	26,68
Gaz inflammable	"	7,36
Eau toute formeé	"	59,46
TOTAL	1.	21,50

D'où l'on conclura,

Composition d'une livre d'Esprit-de-vin.

	onces.	gros.	grains.
Charbon	4.	4.	37 ½
Gaz inflammable	1.	2.	5 ½
Eau toute formée	10.	1.	29
TOTAL	1 livre	"	"

Composition

Composition d'un quintal d'Esprit-de-vin.

	livres.	onces.	gros.	grains.
Charbon..........	28.	8.	4.	6.
Gaz inflammable....	7.	13.	7.	46.
Eau toute formée....	63.	9.	4.	20.
TOTAL....	100.	"	"	"

Enfin, en réunissant ensemble la quantité d'eau existant dans l'esprit-de-vin, avec celle qui s'est formée pendant sa combustion, par la combinaison du gaz inflammable & de l'air vital, on aura pour la quantité résultante de la combustion d'une livre d'esprit-de-vin. 1 livre 2 onces 4 gros 42 grains.

Et pour celle résultante de la combustion d'un quintal.. 116. 1. 2. 24.

Ces résultats s'accordent assez bien avec les premiers aperçus que j'ai donnés sur le même objet, dans mon Mémoire sur la décomposition de l'eau, imprimé en 1781.

Ce phénomène singulier, qu'une substance très-volatile dont tous les principes sont susceptibles de se dissiper pendant la combustion, fournisse néanmoins un résidu, ou plutôt un résultat plus pesant qu'elle-même, avoit échappé jusqu'ici à tous les physiciens: il étoit absolument inexplicable avant qu'on sût que l'air vital se fixoit dans les corps pendant l'acte de la combustion, circonstance dont je crois pouvoir m'attribuer la découverte.

Quoique j'aie lieu de croire ces résultats assez exacts, je dois avertir de deux causes d'incertitude que comporte nécessairement ce genre d'expériences. Premièrement, je n'ai pu déterminer la quantité d'esprit-de-vin brûlé, qu'en pesant la lampe avant & après la combustion; mais il est possible qu'indépendamment de la portion qui s'est brûlée, une autre se soit vaporisée par la chaleur, & que j'aie moins brûlé d'esprit-de-vin, que ne l'indiquoit

la différence du poids. Je ſais que cette quantité ainſi évaporée, ne peut pas être très-conſidérable, puiſqu'autrement il ſe ſeroit fait une détonation dans l'intérieur des vaiſſeaux ; mais elle peut être ſuffiſante cependant pour troubler ſenſiblement l'exactitude des réſultats ci-deſſus.

Secondement, il eſt impoſſible de raſſembler l'eau qui ſe forme pendant cette expérience ; une partie tapiſſe les parois de la cloche, une autre nage ſur le mercure, & on eſt obligé de conclure ce poids, de celui des matériaux employés : quoique cette méthode paroiſſe ſûre, elle n'eſt pas cependant auſſi ſatisfaiſante que ſi on pouvoit peſer l'eau directement & exactement.

Je ne prétends pas non plus que ce ſoit une manière rigoureuſe d'analyſer l'eſprit-de-vin ; indépendamment de l'eau, du charbon & du gaz inflammable qui entrent eſſentiellement dans ſa combinaiſon, il eſt probable qu'il contient encore, en très-petite quantité, quelques autres principes qui échappent à ce genre d'analyſe. Par exemple, l'eau qu'on obtient par cette combuſtion ſous une cloche, eſt légèrement acide, elle rougit le papier bleu, & cette circonſtance indique, ou qu'il exiſte une petite quantité d'acide dans l'eſprit-de-vin, ou qu'il s'en forme pendant ſa combuſtion.

Combuſtion de l'Huile d'Olive.

La combuſtion de l'huile d'olive ne renferme pas autant de cauſes d'incertitude que celle de l'eſprit-de-vin, parce que l'huile d'olive n'étant pas ſuſceptible de ſe volatiliſer aiſément, on peut connoître avec une exactitude rigoureuſe la quantité brûlée, par la différence du poids déterminé avant & après la combuſtion. J'ai donc quelque lieu de penſer que les réſultats que je vais expoſer ne laiſſent rien à deſirer du côté de l'exactitude. J'aurois été cependant plus ſatisfait encore ſi j'euſſe pu répéter l'expérience plus en grand ; mais il auroit fallu employer des appareils

extrêmement compliqués, & je doute que je fuſſe parvenu à des réſultats beaucoup plus rigoureux.

L'appareil dont je me ſuis ſervi pour la combuſtion de l'huile, eſt encore celui repréſenté, *figure 4*, mais quelques précautions que j'aie priſes, la quantité d'huile que je ſuis

		grains
parvenu à brûler n'a pas été bien conſidérable, je n'ai pu la porter qu'à.....	0	19,25
La quantité d'air vital conſommé, s'eſt trouvée de 124 pouces, peſant, à raiſon d'un demi-grain le pouce cube.......	0	62,
	gros	grains
Ce qui donne pour le poids total des matières employées avant la combuſtion	1	9,25

La quantité d'acide charbonneux aériforme que j'ai ob-

		grains
tenu, étoit de 79 pouces $\frac{1}{2}$, ce qui revient, en poids, à.............	0	54,25
A l'égard de l'eau qui s'eſt formée, elle n'a pu être ni raſſemblée ni peſée, & j'en ai expoſé ailleurs la raiſon; elle eſt ici la même que pour l'eſprit-de-vin: je l'ai donc conclue par le calcul, & toujours en partant de la ſuppoſition, que le poids des matières eſt le même avant & après l'opération, ce que je regarde comme évident; j'ai eu..................	0	27,00
	gros	grains
TOTAL après la combuſtion...	1	9,25

D'après ces données, & en ſuppoſant qu'un quintal d'acide charbonneux ſoit compoſé de 72 parties d'air vital & de 28 de charbon, on pourra faire le calcul ſuivant:

	gros.	grains.
Quantité d'air vital employé à faire de l'acide charbonneux	//	39,06
Quantité employée à faire de l'eau	//	22,94
Quantité de gaz inflammable néceſſaire pour former 27 grains d'eau	//	4,05
Quantité de charbon contenu dans 54 grains $\frac{1}{2}$ d'air fixe ou acide charbonneux	//	15,20
TOTAL	1.	9,25

19 grains $\frac{1}{4}$ d'huile d'olive ſont donc compoſés de

	grains.
Charbon	15,20
Gaz inflammable	4,05
TOTAL	19,25

D'où l'on conclura,

Compoſition d'une livre d'Huile d'olive.

	livres.	onces.	gros.	grains.
Charbon	//	12.	5.	5.
Gaz inflammable	//	3.	2.	67.
TOTAL	1.	//	//	//

Compoſition d'un quintal d'Huile d'olive.

	livres.	onces.	gros.	grains.
Charbon	78.	15.	2.	68.
Gaz inflammable	21.	//	5.	4.
TOTAL	100.	//	//	//

Enfin, on voit qu'en brûlant une livre d'huile d'olive avec toutes les précautions convenables, on peut en obtenir 1 livre 6 onces 3 gros 38 grains d'eau; & d'un quintal, 140 livres 4 onces 1 gros 17 grains.

Il faut, pour arriver à ce résultat, c'est-à-dire, pour obtenir cette quantité d'eau, qu'on ait fourni à la flamme toute la quantité d'air vital nécessaire pour que la combustion soit complète; circonstance qui se rencontre dans les lampes de M.[rs] Meusnier, Argand, Lange & Quinquet: autrement, c'est-à-dire, si la quantité d'air est insuffisante, il y a bien décomposition de l'huile, c'est-à-dire, séparation de la matière charbonneuse & du gaz inflammable; mais à défaut d'une suffisante quantité d'air vital, il n'y a pas recomposition complète d'eau & d'acide charbonneux, & il s'échappe une portion de charbon & de gaz inflammable libre. C'est cet effet qu'on exprime quand on dit qu'une lampe fume.

Combustion de la Cire.

Cette même méthode appliquée à la bougie, m'a donné également la quantité d'eau qui se forme pendant sa combustion. Je me suis servi, dans cette expérience, d'une simple cloche de cristal remplie d'air vital, & placée sur la cuve de mercure: mais, comme les bougies ordinaires coulent beaucoup dans l'air vital, parce qu'il y a dans cet air beaucoup moins de distance entre la flamme & la cire, qu'il n'y en a dans l'air ordinaire, j'ai été obligé d'employer un lampion de cire.

	pouces
Dans une première expérience, la cloche contenoit, air vital..................	183,51
Il en est resté, après la combustion & l'absorbtion par l'alkali caustique..........	50,41
Donc quantité d'air vital réellement employée..................	133,10

Cette quantité d'air vital réduite en poids, à raison d'un

	grains
demi-grain par pouce cube, devoit peser....	66,55
La quantité de cire consommée s'est trouvée de	21,90
TOTAL des matières consommées........	88,45

La quantité d'air fixe ou acide charbonneux qui s'est formé, étoit de 90,046 pouces; & à raison de 06,95 grains le pouce cube, elle devoit peser.... 62,58 grains.

Donc, déficit dû à l'eau qui s'étoit formée, & qui en effet nageoit sur le mercure..... 25,87

Mais 25,87 grains, d'eau sont composés de

Principe oxygine	21,99 grains.
Gaz inflammable aqueux	3,88
TOTAL	25,87

Ainsi, des 66,55 grains d'air vital qui ont servi à cette expérience, il en a été employé à former de l'eau..................... 21,99 grains

Et à former de l'air vital............ 44,56

TOTAL égal......... 66,55

Ce qui donne pour la composition de la cire

Substance charbonneuse	18,02 grains.
Gaz inflammable	3,88
TOTAL	21,90

Composition d'une livre de Cire.

	livres.	onces.	gros.	grains.
Substance charbonneuse	//	13.	1.	23.
Gaz inflammable	//	2.	6.	49.
TOTAL	1.	//	//	//

Composition d'un quintal de Cire

	livres.	onces.	gros.	grains.
Substance charbonneuse	82.	4.	3.	68.
Gas inflammable	17.	11.	4.	4.
TOTAL	100.	//	//	//

J'ai répété une seconde fois cette expérience avec le même soin, & j'ai obtenu les résultats qui suivent:

	pouces
Quantité d'air vital contenu dans la cloche avant la combustion	194,80
Quantité restante après la combustion, mais avant l'addition de l'alkali caustique	150,30
Diminution opérée par la combustion	44,50
Quantité d'air restante après l'absorbtion par l'alkali caustique	53,51
Donc, quantité d'air vital consommé dans l'expérience	141,29

	grains
Cette dernière quantité d'air vital, à raison d'un demi-grain le pouce cube, devroit peser.	70,64
Cire consommée	21,75
TOTAL des substances consommées	92,39
Il ne s'est produit que 96,438 pouces d'air fixe ou acide charbonneux, qui, à raison de 0,695 grains le pouce cube, devoient peser	67,08
Donc, déficit ou eau formée	25,31

Mais 25,31 grains d'eau sont composés de..

	grains
Principe oxygine	21,51
Principe inflammable de l'eau	3,80
TOTAL	25,31

	grains
D'où il résulte que sur la quantité d'air vital employé dans l'expérience, & qui étoit de.	70,64
Il en a été employé à former de l'eau	21,51
Et par conséquent à former de l'acide charbonneux	49,13

La cire, d'après ces données est composée de

	grains
Matière charbonneuse.........	17,95
Principe inflammable de l'eau....	3,80
TOTAL...........	21,75

D'où l'on conclura

Composition d'une livre de Cire.

	livres.	onces.	gros.	grains.
Substance charbonneuse.........	″	13.	1.	46.
Principe inflammable de l'eau...	″	2.	6.	26.
TOTAL......	1.	″	″	″

Composition d'un quintal de Cire.

Substance charbonneuse.......	82.	8.	3.	64.
Principe inflammable de l'eau...	17.	7.	4.	8.
TOTAL........	100.	″	″	″

En prenant un milieu entre le résultat de ces deux expériences, on trouve qu'une livre de cire formeroit, en brûlant, une quantité d'eau de 1 livre 2 onces 6 gros 5 grains.

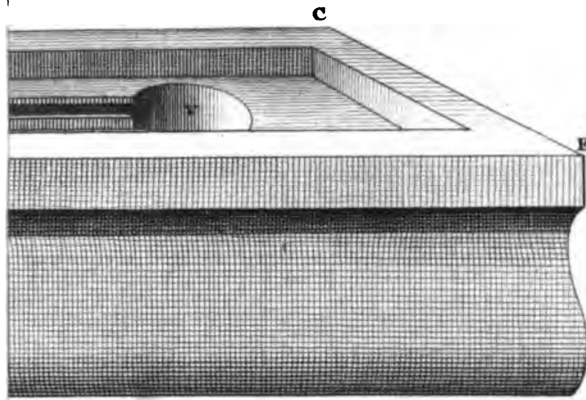
Et qu'un quintal de cire en formeroit................. 117. 3. 7. ″

Je dois avertir que dans toutes ces expérienes, le volume des airs doit être corrigé de la variation du baromètre & du thermomètre, & ramené à une pression de 28 pouces, & à une température de 10 degrés du thermomètre de Réaumur. Je suis entré ailleurs dans le détail des calculs qu'exige cette correction.



ESSAI

Fig. 1.



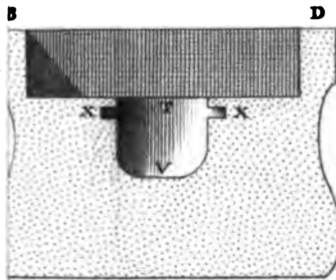
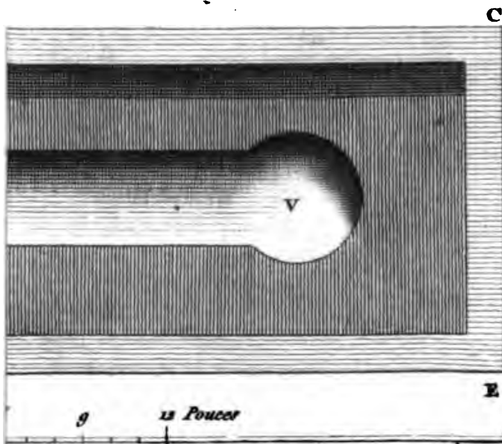
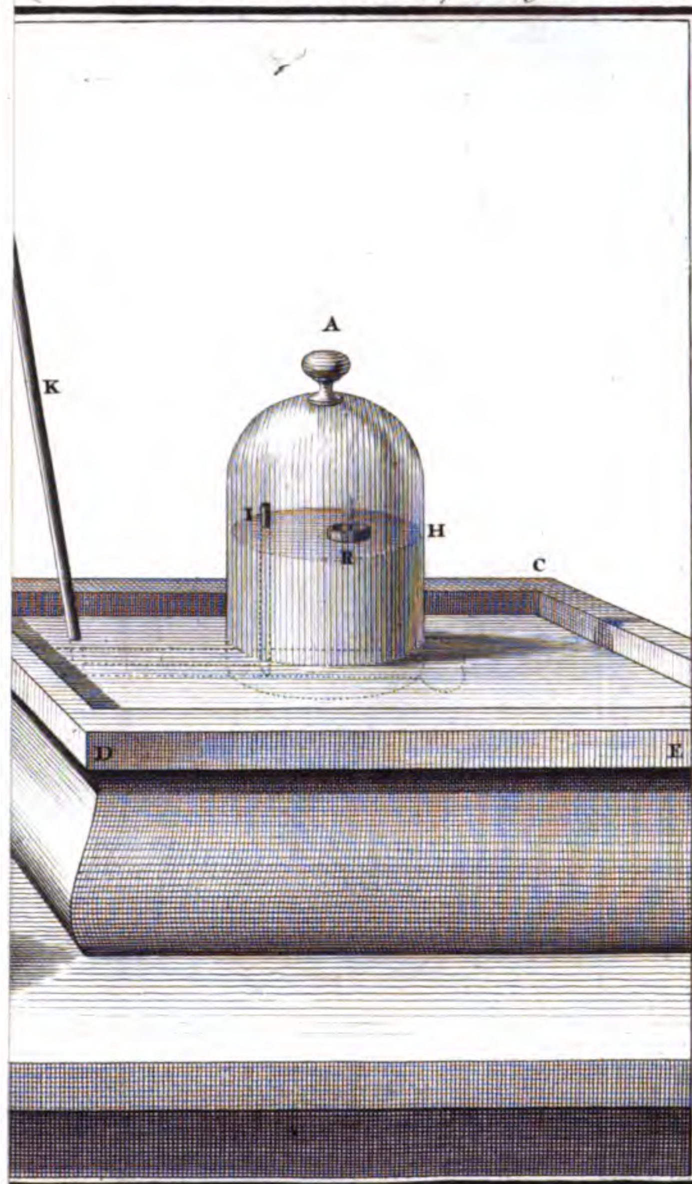


Fig. 2

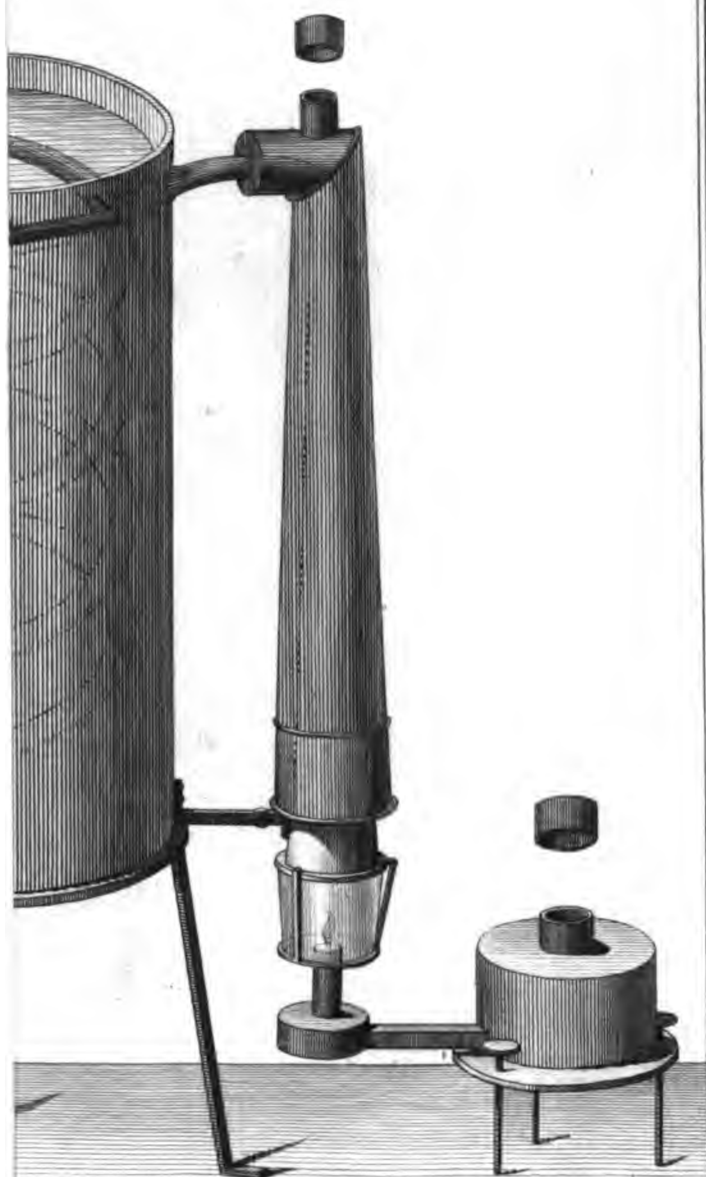


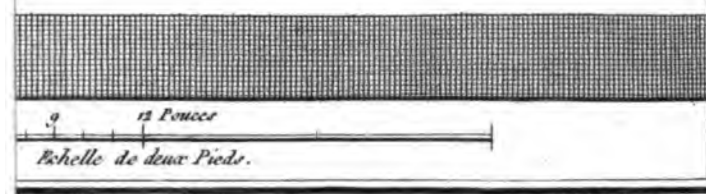
Echelle de deux Pieds

Y. le G. sculp.



Y. le Gouaz sculp.





Y. le Gouaz sculp.

ESSAI DE COMPARAISON

ENTRE

LES MOUVEMENS DES ANIMAUX

ET CEUX DES PLANTES.

Et description d'une espèce de Sainfoin, *dont les feuilles sont dans un mouvement continuel.*

Par M. BROUSSONET.

L'ÉTUDE de la zootomie peut seule, en nous mettant à portée d'établir une comparaison entre les mêmes organes dans les différentes espèces d'animaux, nous éclairer sur les fonctions auxquelles les parties analogues sont destinées dans l'homme. Les anatomistes se sont adonnés à la dissection des animaux; dans un temps où n'ayant point encore perfectionné celle de l'homme, la physiologie ne pouvoit retirer aucun avantage de ces connoissances; dès que l'inspection des cadavres a été permise, & que celle des animaux a pu dès-lors devenir utile; on a paru en négliger l'étude. Les recherches anatomiques ont été faites d'abord sur des êtres dont l'organisation se rapprochoit le plus de celle de l'homme, tels que les quadrupèdes; on n'a examiné que long-temps après quelques espèces qui s'en éloignent un peu plus. On avoit cru que l'inspection des parties, dans les animaux dont la forme a le plus de rapport avec celle de l'homme, faciliteroit la découverte de l'usage de ces mêmes parties; mais cette comparaison n'est pas aussi avantageuse à l'objet que se propose le physiologiste, que celle qui naît du rapprochement des êtres les plus éloignés, & dans lesquels on a de la peine à reconnoître, au premier abord, les traces de l'analogie. Plus les objets diffèrent entr'eux, plus les résultats qui naissent de la

Lû le 31 août 1785.

comparaison qu'on en fait, sont lumineux. On ne sera pas sans doute surpris qu'on ait négligé de faire le rapprochement des espèces appartenantes à des règnes différens, puisqu'il n'avoit pas même été fait entre les animaux des divers ordres, dont les différences sont bien moins essentielles. Les physiologistes n'ont pas retiré des travaux de Grew, de Malpighi, de M. Duhamel, &c. tous les avantages qu'ils auroient peut-être pu en obtenir pour expliquer plusieurs phénomènes de l'économie animale. On s'est contenté de saisir çà & là un petit nombre de faits isolés; mais les fonctions les plus importantes, celles qui ont une analogie très-marquée avec ces mêmes fonctions dans les animaux, n'ont été bien connues, dans les plantes, que de nos jours. Les naturalistes du dernier siècle savoient à peine qu'on pût retrouver dans les végétaux des traces de la respiration, de la génération & de la circulation. On a cru pouvoir rendre raison de quelques-uns de ces phénomènes communs aux deux règnes, en les examinant dans des êtres qui, par leur forme, paroissent également appartenir au végétal & à l'animal; mais, outre que ces êtres sont très-peu connus par les anatomistes, ils appartiennent d'ailleurs exclusivement à un seul règne, & n'ont de commun avec le règne voisin, que la forme, presque toujours accidentelle. La Nature a varié les formes à l'infini, elles caractérisent les espèces, c'est ce qui paroît lui avoir coûté le moins; leur différence ne consistant que dans des parties plus ou moins alongées, plus ou moins grosses, placées plus ou moins près de telle ou telle autre partie, le nombre a pu en être beaucoup & facilement augmenté. Son économie ne s'est manifestée que dans les fonctions qu'elle a toujours établies sur les mêmes principes, ne leur assignant aucune différence dans les espèces, mais seulement dans les grandes classes dont elles sont en quelque sorte l'apanage.

Les diverses parties des plantes jouissent de la faculté de se mouvoir, mais les mouvemens qu'elles exécutent

ſont d'une nature bien différente de ceux des animaux; les plus ſenſibles, ceux qui ſont produits le plus rapidement dans les plantes, ſont preſque toujours déterminés par quelque cauſe irritante. L'irritabilité, qui n'eſt que la ſenſibilité manifeſtée par le mouvement, eſt une loi générale à laquelle la nature a ſoumis tous les êtres vivans, c'eſt elle qui veille continuellement à leur conſervation; plus puiſſante dans les animaux que dans les plantes, elle peut être ſouvent confondue dans celles-ci avec des phénomènes qui dépendent d'une cauſe bien différente. L'organe qui eſt ſoumis, dans le végétal, à l'action de l'aiguillon, eſt le ſeul qui ſe meuve: jamais l'irritation de pluſieurs parties ne produit, comme dans les animaux, cette prompte combinaiſon de ſenſations, d'après laquelle on voit ſe remuer certains organes, quoiqu'ils ne ſoient pas directement affectés, & qu'ils puſſent d'ailleurs être paſſifs.

Plus l'organiſation eſt parfaite dans les différentes parties des animaux, plus les ſignes d'irritabilité y ſont ſenſibles. Les parties qui ſe rapprochent le plus de celles des végétaux, & dont par conſéquent l'organiſation eſt la plus imparfaite, ſont les moins irritables. La même loi ſe retrouve ſur les plantes, mais avec des réſultats oppoſés; les ſignes d'irritabilité y ſont plus ſenſibles à meſure que les parties ſe rapprochent davantage de celles des animaux, ils ſont nuls dans celles qui en ſont les plus éloignées. Cette aſſertion eſt ſur-tout prouvée par ce qu'on obſerve dans les organes deſtinés, dans les végétaux, à perpétuer l'eſpèce; ces parties ſont, ſuivant toutes les apparences, les ſeules irritables; les feuilles, l'écorce, les tiges & les racines ne donnent aucun ſigne d'irritabilité.

La faculté de ſe reproduire, dans les plantes comme dans les animaux, eſt une fonction propre à l'eſpèce, & ſans laquelle l'individu peut ſubſiſter; mais la nature paroît y avoir attaché dans les plantes beaucoup plus d'importance que dans la plupart des animaux. Tout, dans l'individu végétal, paroît concourir preſque uniquement à ce but; c'eſt pour

le remplir que la végétation a lieu, que les différentes parties se développent; c'est ici que sont prodiguées la variété, la richesse des couleurs, que l'organisation est perfectionnée. Dès que le vœu de la nature est rempli, que les semences ont acquis dans leur capsule le degré de maturité qui leur est nécessaire, les sucs nourriciers cessent de couler dans les vaisseaux, l'individu se dessèche & périt. Les plantes se rapprochent des animaux par les organes de la génération, non-seulement parce qu'ils sont en elles les seules parties irritables, mais encore parce qu'ils sont les seuls qui les fassent jouir en quelque sorte de la vertu de la locomotion. Je crois inutile de détailler ici les mouvemens subits des étamines, des pistils, &c. de plusieurs plantes, dès qu'on les irrite; ces phénomènes sont trop bien connus des physiciens.

Les mouvemens vitaux, dans les plantes, sont ceux qu'on peut observer le plus communément; ils sont lents, entièrement déterminés par des circonstances qui ne manquent jamais de se répéter, & sont répandus également sur toutes les parties. Dans les animaux au contraire, presque tous les mouvemens vitaux sont très-sensibles, tels sont le battement du cœur, celui des artères, la dilatation du thorax, &c. comme ils sont absolument nécessaires à la conservation des individus, ils se reproduisent toujours, dans ceux de la même espèce, d'une manière semblable & dans la même direction, ce qui a également lieu dans les plantes. Les plantes grimpantes, le houblon, par exemple, suit constamment, en s'entortillant autour d'une perche, la direction du midi au couchant.

En interrompant ces sortes de mouvemens dans les végétaux, ceux-ci périssent bientôt; si on détache, par exemple, une plante grimpante dont la direction étoit sur une branche de droite à gauche, & qu'on la place dans une direction contraire, elle se dessèche dans peu, sur-tout si elle n'a pas assez de vigueur pour reprendre sa situation naturelle. On donne de la même manière la mort à un

animal, lorſqu'on arrête quelqu'un de ſes mouvemens vitaux.

La loi par laquelle les plantes ſont forcées à ſe mouvoir de telle ou telle manière, eſt très-puiſſante; lorſque deux plantes grimpantes, dont l'une eſt plus foible que l'autre, viennent à ſe rencontrer, deux chèvre-feuilles par exemple, ils s'entrelacent mutuellement, comme pour augmenter en quelque ſorte leur force; l'un ſe dirige à droite, l'autre à gauche, celui-ci eſt toujours le plus foible, il eſt forcé de prendre une direction contraire à celle qu'il auroit ſuivie s'il ſe fût trouvé hors de la portée de l'autre: mais ſi par quelqu'accident ces deux chèvre-feuilles viennent enſuite à ſe ſéparer, ils reprennent l'un & l'autre leur direction naturelle, c'eſt-à-dire, de droite à gauche.

Les mouvemens eſſentiellement vitaux qui ont, dans les plantes, le plus grand rapport avec ceux des animaux, ſont le cours de la ſéve, le paſſage de l'air dans les trachées, les différentes poſitions que prennent les fleurs de quelques plantes à certaines heures du jour, &c. mais en obſervant la manière dont tous ces mouvemens s'exécutent dans les plantes, nous verrons qu'ils offrent un plus grand nombre de modifications que les mouvemens analogues qui ont lieu dans les animaux. La température de l'atmoſphère, ſon agitation, la lumière, &c. influent beaucoup ſur les mouvemens des plantes, en accélérant ou retardant le cours de leurs fluides; & comme elles ne peuvent jamais changer de place, ces variations produiſent en elles des changemens plus ſenſibles & plus uniformes que dans les animaux.

La rareté des fluides dans les vaiſſeaux des plantes, occaſionne quelquefois des mouvemens particuliers; ainſi dès que les ſemences de la balſamine, de l'alleluia, du ſablier, &c. ſont parvenues à un certain degré de maturité, les ſucs ceſſent de s'y porter, les parties qui compoſent les capſules ſe deſſèchent, & jouiſſant alors de toute leur élaſticité, elles ſe ſéparent ſubitement & jettent à une certaine diſtance les graines qu'elles renfermoient. Cette

action peut être considérée comme vitale puisqu'elle tend à la conservation de l'espèce; mais elle est modifiée, comme on voit, par une cause externe, puisqu'elle est accélérée ou retardée suivant le plus ou moins grand degré de sécheresse ou d'humidité de l'atmosphère.

L'abondance des fluides détermine aussi, dans les plantes comme dans les animaux, plusieurs mouvemens vitaux. L'action prompte des étamines de la pariétaire, l'inflexion des péduncules des fleurs, des pistils, paroissent devoir être attribuées à une cause semblable: ces sortes de mouvemens qui s'observent sur-tout dans les organes destinés à la reproduction de l'individu, n'ayant lieu que dans des circonstances qui les rendent absolument nécessaires, paroissent être en quelque sorte l'effet d'une combinaison particulière; ils ne sont cependant que mécaniques, puisqu'ils sont toujours reproduits de la même manière & dans les mêmes circonstances. C'est ainsi que la rose de Jéricho, & les fruits secs de plusieurs espèces de Mesembryanthemum ne s'épanouissent que lorsque leurs vaisseaux sont remplis d'eau.

Le dégagement subit des fluides produit une espèce de mouvement; c'est à cette cause qu'il faut rapporter un grand nombre de phénomènes qu'on observe dans les feuilles de plusieurs plantes, & qui ne doivent pas être attribués à l'irritabilité. Les glandules qu'on voit au milieu de chaque feuille du *dionæa*, sont à peine piquées par quelque insecte, que celle-ci se replie sur elle-même & saisit aussi-tôt l'animal: la piqûre paroît déterminer un dégagement de fluide qui retenoit la feuille ouverte en remplissant ses vaisseaux. Cette explication est d'autant plus probable, que dans les premiers temps de la végétation de cette plante, lorsque les glandules ne sont presque pas développées, & que probablement les sucs ne coulent pas en abondance dans ses vaisseaux, les feuilles sont repliées sur elles-mêmes de la même manière qu'elles le deviennent après qu'elles ont été piquées par un insecte, lorsque la plante est plus avancée. On observe un phénomène analogue à celui-ci,

sur les feuilles des deux espèces de rossolis *. Le mécanisme est ici très-facile à apercevoir; les feuilles sont d'abord repliées sur elles-mêmes, les sucs ne sont point encore portés jusque dans les petits poils dont elles sont recouvertes, mais après leur développement, la présence du fluide est démontrée par une goutte qu'on voit à l'extrémité de chaque poil; c'est en absorbant ce fluide, que l'insecte dégorge les vaisseaux de la feuille qui se replie sur elle-même & reprend son premier état: la promptitude de l'action est proportionnée à la quantité de poils touchés par l'insecte. Ce mouvement pourroit être comparé en quelque sorte à celui qui a lieu dans l'extrémité d'un animal, laquelle retenue dans un état de flexion par une tumeur dans l'articulation, reprend tout-à-coup son ancienne position au moment où l'on donne issue à l'humeur qui faisoit obstacle. Quelques botanistes ont donné une explication très-ingénieuse du mouvement des sensitives; ils l'attribuent à des molécules qui s'amassent dans les vaisseaux de la plante, & qui se dégagent au moment de l'attouchement: mais la cause est ici moins facile à saisir.

* M. Roth.

Les phénomènes qui dépendent de l'abondance des fluides, sont sur-tout apparens dans les plantes qui croissent dans les endroits humides; le Rossolis, le Dionæa, sont de cet ordre; & l'on sait, d'après les expériences de M.rs Dufay & Duhamel, que les sensitives sont sur-tout sensibles, lorsque le soleil est caché par des nuages, & que l'air est humide & chaud.

L'influence des causes externes modifie quelquefois les mouvemens vitaux dans les plantes, de manière qu'on seroit tenté de les attribuer à la volonté, comme ceux qui dépendent entièrement de cette faculté dans les animaux. Si l'on met une perche en terre auprès d'une plante grimpante, elle la saisit toujours * pour s'y entortiller, dans quelqu'endroit qu'on la place. La même chose a lieu pour les vrilles de la vigne qui s'attachent toujours à un bâton qu'on leur présente, quelque part qu'il soit placé, pourvu

* M. Mustel.

qu'elles puiſſent y atteindre; mais ces mouvemens ſont entièrement vitaux, la plante grimpante & les vrilles ſe portent ſucceſſivement dans toutes les directions, & ne ſauroient par conſéquent manquer de rencontrer les corps qui ſont à leur portée. Ces mouvemens ont lieu tant que les parties prennent de l'accroiſſement; dès qu'elles ceſſent de pouſſer, ſi elles n'ont atteint aucun corps pour s'y fixer, elles ſe recourbent ſur elles-mêmes. Une racine pouſſe ſur la paroi d'un foſſé; ſi elle ſuivoit la ligne horizontale, elle ſeroit bientôt à découvert & périroit; mais elle ſe recourbe avant d'avoir atteint le foſſé, & comme ſi elle étoit dirigée par une ſorte d'inſtinct, elle pouſſe en en-bas, paſſe au-deſſous du foſſé, remonte du côté oppoſé, & parvenue à la même hauteur où elle étoit d'abord, elle continue de pouſſer horizontalement. Ceci a également lieu lorſque la racine rencontre quelque corps ſolide. Si on met à découvert une racine & qu'on place tout auprès, en évitant pourtant le contact, une éponge pleine d'eau, la racine ſe rapproche de l'éponge, & ſe dirige dans tous les points où on la place ſucceſſivement: cette obſervation démontre, ſur-tout, juſqu'à quel point les mouvemens vitaux dans les plantes peuvent être modifiés par des cauſes externes, & combien ils diffèrent eſſentiellement de ceux que la volonté détermine dans les animaux.

Les mouvemens produits par la préſence des fluides dans les vaiſſeaux, ſont plus ou moins ſenſibles dans les feuilles des différentes eſpèces de plantes. Quelques-unes paroiſſent ne jouir d'aucune ſorte de mouvement, d'autres ont des feuilles ſuſceptibles de ſe mouvoir en différens ſens; leurs mouvemens ſont ordinairement modifiés par différentes cauſes, mais aucune ne paroît jouir d'un mouvement auſſi ſenſible & auſſi continu qu'une eſpèce de ſainfoin. Cette plante ſingulière a été découverte au Bengale, dans des lieux humides & argileux aux environs de Dacca, par Milady Monſon, que ſon zèle pour l'hiſtoire naturelle avoit déterminé à entreprendre un voyage dans les Indes;

zèle

zèle d'autant plus louable, que les personnes de son sexe ont rarement la force & plus rarement encore le courage de le diriger vers un pareil objet. La mort l'a surprise au milieu de ses courses botaniques. Linné avoit cru devoir consacrer à sa mémoire un genre de plante sous le nom de *Monsonia*. M. le chevalier Banks ayant bien voulu me communiquer les manuscrits de Milady Monson, j'en ai extrait les observations qui ont rapport aux mouvemens de cette plante, & tels qu'elle les avoit observés au Bengale; je les comparerai avec ceux que j'ai eu occasion d'examiner sur les individus qu'on cultive dans les serres en Europe; mais je crois nécessaire auparavant de donner la description de cette plante, parce que *Linné* le fils est le seul auteur qui en ait parlé dans son *Supplementum plantarum;* mais il n'a pas vu les fleurs, & sa description est dès-lors incomplette. Je joins encore à ce Mémoire un dessin, parce que je ne connois aucune figure de cette plante.

Les Indiens la nomment *Burum chandali*. Linné a cru devoir la rapporter au genre d'*hedysarum* (sainfoin), & la désigner sous le nom spécifique de *gyrans* (tournant); je lui conserverai la dénomination de sainfoin oscillant, ou de plante oscillante, que M. Daubenton lui a donnée dans le cabinet du Roi. Ce nom exprime beaucoup mieux que celui de *gyrans*, les mouvemens de ses folioles.

La racine est ordinairement annuelle, quelquefois bisannuelle, & dans nos serres elle dure souvent plus de deux ans; elle est également branchue & fibreuse. Les branches partent d'une tige qui s'élève très-peu; elles sont communément au nombre de six ou sept; elles viennent à la hauteur de trois ou quatre pieds; elles sont ligneuses, lisses, cylindriques, de la grosseur du petit doigt, supportant des rameaux placés alternativement, déliés, plians & recouverts d'un épiderme lisse & vert: les feuilles sont disposées alternativement sur les branches & les rameaux, elles sont presque toujours composées de trois folioles, rarement & seulement vers le bas des tiges simples, elles sont soutenues

par un pétiole d'un ou deux pouces de long, légèrement velu & garni à la base de deux stipules alongées, pointues & roussâtres. La foliole intermédiaire, plus longue que le pétiole, est ordinairement de trois ou quatre pouces sur un de large; elle est lancéolée, oblongue, unie sur les bords, très-lisse, d'un vert pâle, glauque dans le milieu, & légèrement veinée. Les deux folioles latérales qu'on pourroit en quelque sorte regarder comme des appendices de l'intermédiaire, sont supportées par des pétioles courts, fixés sur le pétiole commun; elles sont lancéolées & étroites: on voit à leur base de petites stipules relevées, subulées, caduques & vertes.

Les fleurs forment des épis redressés, alongés, qui partent des aisselles, ou qui terminent les branches; elles sont papilionnacées, petites, d'un jaune foncé, situées deux à deux & embrassées par des bractées ovales, aiguës, caduques, & qui se recouvrent en partie les unes les autres. Le calice est à quatre dents, presque labié, d'abord vert; mais à mesure qu'il approche de la maturité, il devient rougeâtre & quadrangulaire. La corolle est composée de cinq pétales, l'étendard *(a)* est arrondi, échancré, convergent sur les côtés, les *(b)* ailes sont plus courtes que la carène; celle-ci *(c)* est presque ovale, comprimée, de la longueur de l'étendard, & formée par deux pétales réunis. Les étamines *(d)* au nombre de dix, sont séparées en deux corps: neuf sont réunies entre elles par leurs filamens; la dixième est isolée; chacune supporte une anthère alongée & assez grosse. Le germe est linéaire, comprimé, surmonté d'un style simple, subulé, tourné en en-haut, & terminé par un stigmate obtus.

Le fruit est un légume *(e)* d'environ deux pouces, légèrement recourbé, comprimé, formant un étranglement entre chaque semence; celles-ci *(f)* sont petites, réniformes, comprimées, très-lisses, grisâtres & marquées d'une tache.

Le sainfoin oscillant est en fleur au Bengale au mois de septembre; les légumes ont déjà acquis toute leur ma-

turité en novembre, & ils laiſſent pour lors échapper les graines qu'ils renferment. Il fleurit rarement en Europe, & ſa culture demande beaucoup de ſoin; il doit être renfermé dans une ſerre chaude, & n'en ſortir preſque jamais. La première fois qu'on l'a vu en Europe, c'eſt en 1777, en Angleterre, dans le jardin de Lord Bute, à Luton-Park, il y fleurit en mars.

Aucune partie de cette plante ne donne des ſignes d'irritabilité quand on la pique. Dans la journée, la foliole du milieu eſt étendue horizontalement, & eſt immobile; dans la nuit elle ſe recourbe & vient s'appliquer ſur les branches. Les folioles latérales ſont toujours en mouvement, portées alternativement, vers le haut & vers le bas; toute l'action du mouvement eſt dans le pétiole qui paroît ſe contourner: ces folioles décrivent un arc de cercle. Aux Indes, deux minutes ſuffiſent pour faire exécuter aux folioles tout leur mouvement; je ne les ai jamais vues ſe remuer auſſi promptement que cela dans nos ſerres. Le mouvement qui les porte en en-bas eſt plus prompt que celui qui les fait aller en en-haut; le premier eſt même quelquefois exécuté par interruptions, ou du moins il n'eſt point égal. Le mouvement en en-haut eſt au contraire toujours uniforme. Le plus ſouvent chaque foliole ſe meut dans un ſens oppoſé; c'eſt-à-dire, que l'une eſt tournée en en-bas, quand l'autre regarde en en-haut: quelquefois une des folioles eſt ſtable, tandis que l'autre ſe remue; ce mouvement eſt ſi naturel, que ſi l'on vient à l'interrompre, en fixant une des folioles, il recommence dès que l'obſtacle eſt levé.

Le mouvement n'a plus lieu, dès que les grandes folioles ſont agitées par le vent. Dans les animaux, la tranſpiration eſt ſur-tout accélérée par le cours du ſang, par l'action des muſcles, &c. Dans les plantes, où la circulation des fluides eſt très-lente, la perſpiration paroît être augmentée par des cauſes externes, l'agitation de l'air en eſt une des principales, les feuilles qui ſont les organes deſtinés à cette fonction, ſont ordinairement ſoutenues par des pétioles minces & qui leur

permettent de se mouvoir en tous sens, si cette structure manque, les organes des végétaux sont construits différemment; la chaleur du soleil, l'humidité ou une grande abondance de fluides dans des vaisseaux construits d'une manière particulière déterminent la perspiration de plusieurs plantes. Le Dionæa, le Rossolis, &c. comme nous l'avons déjà remarqué, croissent dans des lieux humides, où les fluides abondent, plusieurs sensitives viennent dans des endroits où l'air est très-peu agité; ou bien celles dont la perspiration ne peut s'opérer de toutes ces manières, ont un petit nombre de feuilles ordinairement succulentes, & recouvertes d'un épiderme très-mince. Quand le soleil est très-chaud, les folioles du sainfoin oscillant sont aussi immobiles; mais, lorsque le temps est chaud & humide, ou qu'il pleut, elles se meuvent très-bien.

Ce mouvement paroît absolument nécessaire à cette plante; car, dès qu'elle a poussé les premières feuilles, il commence à avoir lieu; & il se continue même pendant la nuit, mais il s'affoiblit avec le temps; dans nos serres il a lieu, sur-tout dans la première année; à la seconde il est très-peu sensible; dans son pays natal, toutes les feuilles sont en mouvement, jamais je ne les ai vues se remuer toutes dans nos serres. Dans le moment que la plante est le plus chargée de fleurs, que la fécondation des germes a lieu, les folioles sont beaucoup plus agitées. Dans les plantes comme dans les animaux, le temps de la reproduction des individus est toujours celui où tous les organes sont dans leur plus grande perfection. Dès que le temps de la génération est passé, les folioles cessent de se mouvoir; les sensitives ne sont presque plus sensibles après ce temps, les pétales de plusieurs plantes ne se referment plus périodiquement.

Ce mouvement d'oscillation est tellement naturel à la plante oscillante, qu'il a non-seulement lieu pendant deux ou trois jours sur les folioles d'une branche qu'on a coupée, & qui a été mise dans l'eau, mais qu'il est même continué pendant quelque temps sur les feuilles des rameaux



Y. le Gouaz sculp.

qu'on a séparés de la plante, & qu'on n'a point mis dans l'eau. Ne peut-on pas, dans ce dernier cas, le comparer en quelque sorte aux battemens du cœur des animaux, après que cet organe a été arraché? Les feuilles semblent tenir lieu de cœur dans les végétaux, elles augmentent par leurs mouvemens le cours des fluides, comme ce viscère, par ses contractions détermine la circulation du sang. Dès que les feuilles se séparent d'une plante, les progrès de la végétation sont arrêtés, & les végétaux ressemblent à ces animaux, dont le sommeil périodique est caractérisé par une diminution dans les battemens du cœur.

Les Indiens, qui sont de tous les peuples ceux qui s'adonnent le plus à la connoissance des plantes, n'ont point manqué de remarquer le mouvement singulier des feuilles de celle-ci, & ce phénomène étoit trop extraordinaire pour qu'il ne devînt pas, chez une nation superstitieuse, l'objet d'un culte particulier. Ils cueillent à un certain jour de l'année, qu'ils nomment *lunichur*, deux folioles latérales dans l'instant qu'elles sont le plus rapprochées, ils les pilent ensemble avec la langue d'une espèce de chouette, & l'amant plein de foi croit, avec cette préparation, se rendre favorable l'objet de son amour. Je ne crains point de rapporter ce trait d'après Milady Monson, persuadé que rien de ce qui a rapport à l'histoire d'une plante aussi curieuse que celle-ci ne doit être omis.

Le mouvement, comme nous venons de le voir, est un attribut moins essentiel aux végétaux qu'aux animaux, plusieurs plantes ont des parties qui en donnent à peine quelques signes, plusieurs en ont aussi qui sont entièrement cataleptiques, ce qui s'observe plus rarement dans les animaux, excepté dans ceux qui sont rapprochés par leur forme du règne végétal; cette singularité est sur-tout remarquable dans une espèce de dracocephalum de Virginie, dont les péduncules des fleurs conservent toutes les positions qu'on leur donne. Cette plante me paroît devoir être mise en opposition avec celle dont je viens de parler. Son histoire est consignée dans les Mémoires de l'Académie, *année 1712*.



MESSIEURS DE LA SOCIÉTÉ Royale des Sciences établie à Montpellier, ont envoyé à l'Académie le Mémoire suivant, pour entretenir l'union intime qui doit être entre elles, comme ne faisant qu'un seul Corps, aux termes des Statuts accordés par le Roi, au mois de Février 1706.

OBSERVATIONS SUR LA CRISTALLISATION DE L'HUILE DE VITRIOL.

Par M. CHAPTAL.

LE 3 du mois de Janvier 1786, les ouvriers de ma fabrique d'Acides minéraux, en retirant des galères l'huile de vitriol rectifiée, en trouvèrent une cornue qui n'avoit pas le degré de concentration suffisant, & en remplirent une dame-jeanne qu'ils déposèrent, selon la coutume, dans un coin du hangar : le surlendemain, ils voulurent prendre cette huile pour lui faire subir une seconde rectification; mais quel fut leur étonnement, lorsqu'ils trouvèrent dans la bouteille une masse solide qui en occupoit le milieu, & d'où partoient des cristaux qui alloient se terminer contre les parois du vase! Ils se hâtèrent de confier ce prodige à M. Berard, Directeur de ma fabrique, qui m'instruisit du phénomène le lendemain. Je crus

d'abord, qu'on avoit laissé dans le hangar quelque bouteille remplie d'eau, & que les bulles d'air qu'on observe souvent dans la glace, disposées sur la même ligne du centre à la circonférence de la bouteille, en avoient imposé à M. Berard, & que c'étoient-là les cristaux de l'huile de vitriol dont il me parloit; je lui fis part de mes doutes, il s'obstina à me dire que c'étoit une véritable cristallisation d'huile de vitriol.

Mes doutes ne me parurent pas suffisamment éclaircis, mais des occupations réitérées, ne me permirent d'aller à la fabrique que le 18 : on avoit conservé cette bouteille, & l'ouverture en étoit simplement recouverte par un bouchon de terre cuite.

Je ne fus pas peu étonné, lorsque j'aperçus une masse ou groupe de cristaux, qui pesoit au moins 60 livres, puisque mes bouteilles sont ordinairement de cette contenance. Il y avoit dans le fond une couche de 2 pouces d'huile de vitriol, provenant d'un commencement de fonte ou *deliquium* de ces cristaux.

Je m'empressai de casser la dame-jeanne, pour avoir le plaisir de manier ces cristaux, & d'en déterminer la figure. Le thermomètre étoit en ce moment à + 7, l'onctueux de la surface de ces cristaux étoit celui de l'huile de vitriol. Leur température étoit plus chaude au tact que celle de tous les corps voisins; tels que les bois, les pierres, les verres, &c. la couleur étoit d'un jaune rembruni, la cassure lisse, unie & vitreuse.

Je détachai de ce groupe plusieurs cristaux bien formés; &, dans tous, la forme m'a paru un prisme hexaèdre aplati, terminé par une pyramide hexaèdre. Un examen plus approfondi du cristal m'a présenté les formes suivantes:

L'épaisseur du prisme est à peine le quart de la largeur. La pyramide d'un prisme de 8 pouces 7 lignes avoit 11 lignes de longueur.

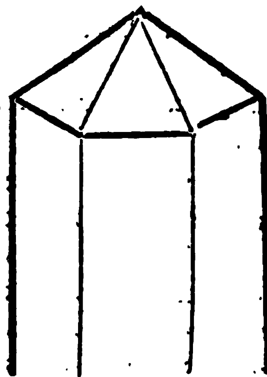
Les deux grands côtés du prisme aplati forment deux

parallélogrammes, les quatre petits s'unissent à angle aigu, & forment un angle obtus à leur réunion aux grands côtés du prisme.

Les petits côtés du prisme se terminent du côté de la pyramide par une ligne inclinée aux grands côtés du prisme, & qui forme avec eux un angle obtus; par ce moyen, la pyramide résulte de l'assemblage de six triangles isocèles.

Je n'ai pas trouvé de cristal à deux pyramides; ils étoient tous implantés dans une masse commune qui occupoit le milieu de la bouteille.

J'ai essayé de représenter, dans cette figure, la forme de ces cristaux. Les côtés de la pyramide & du prisme ont à peu-près leurs largeur & dimensions respectives.



À mesure que je maniois les cristaux à l'air libre & à une chaleur de 7 degrés au-dessus de 0, il découloit de la masse, de l'huile noirâtre qui noircissoit le bois, & attaquoit si fortement mes mains, qu'elles devinrent luisantes, calleuses, & que l'épiderme fut détruit.

Je remplis un vaisseau de verre à large ouverture, de 15 à 16 livres de ces cristaux bien figurés; je les ai montrés & laissé manier, pendant mon cours, à trois ou quatre cents auditeurs, & je les ai conservés jusqu'au 30 Janvier, alors le *deliquium* a été complet.

L'huile

L'huile de vitriol provenue de la fonte de ces criſtaux, eſt d'un jaune-noirâtre, marquant de 63 à 64 degrés à mon pèſe-liqueur qui donne 66 dans la bonne huile du commerce.

J'ai rectifié avec ſoin une grande partie de l'huile provenue de ces criſtaux tombés en *deliquium*; j'ai adapté pour cet effet à ma cornue un récipient bien luté, & l'appareil des gaz; mais je n'ai retiré que de la très-belle huile de vitriol, & un flegme très-acide: 2 livres 9 onces de ce *deliquium* m'ont fourni 1 livre 10 onces d'huile très-concentrée, & 15 onces d'eſprit de vitriol à 23 degrés.

L'état du thermomètre, depuis la production du phénomène juſqu'à la fonte des criſtaux, a été comme il ſuit:

Les 2, 3, 4, 5 de Janvier, il deſcendit ſous 0 de 2, & même de 3 degrés le 5 au matin; depuis ce jour, il s'eſt conſtamment tenu au-deſſus de 0, & a été juſqu'au 12: ſon terme moyen a été entre 5 & 8.

Ce phénomène me parut nouveau & intéreſſant. Je deſirois un froid aſſez vif pour pouvoir répéter l'expérience, & je commençois à déſeſpérer, lorſque, le 9 Mars, l'air ſe refroidit au point de me faire eſpérer de reproduire ce phénomène. Dans la nuit du 9 au 10, le thermomètre deſcendit à — 1; le lendemain, le thermomètre marquant — 3, je diſpoſai, à 8 heures du matin, des appareils convenables ſur une terraſſe expoſée au levant.

Je me ſervis de capſules de verre pour mes expériences, & mis dans ces vaſes.

1.° De l'huile de ma fabrique, concentrée, blanche comme l'eau, & donnant 66 $\frac{1}{2}$ au pèſe-liqueur.

2.° De l'huile de vitriol provenant du *deliquium* des premiers criſtaux, & concentrée au 65me degré.

3.° Le flegme provenu de ces concentrations, & marquant 23 degrés,

4.° De l'huile rapprochée par la concentration jusqu'au 64.me degré.

5.° L'huile provenue du *déliquium* des criſtaux, qui avoit été expoſée à l'air pendant trente-ſept jours, & ne marquant plus que 60 degrés.

Ces huiles, plus ou moins fortes, reſtèrent expoſées à l'air tout le jour & toute la nuit du 10 au 11.

Le 11, à 8 heures du matin, le thermomètre marquant — 2, je trouvai, 1.° que l'huile de l'expérience, *n.° 1*, n'avoit éprouvé aucun changement du moins en apparence.

2.° Que celle de l'expérience, *n.° 2*, préſentoit, au fond de la liqueur, ſur les parois du vaſe, une couche de petits criſtaux de la groſſeur d'une tête d'épingle, dont la forme très-bien caractériſée paroiſſoit celle d'un rhombe alongé.

3.° Le flegme marquant 23 degrés, ne préſentoit aucun changement.

4.° L'huile marquant 64 degrés, préſentoit à ſa ſurface trente à quarante criſtaux figurés en rhombes alongés, ayant à peu-près 4 lignes de long ſur 3 de large, & une d'épaiſſeur.

J'ai décanté la liqueur que furnageoient les criſtaux, & en ai trouvé une couche de ſemblables au fond du vaſe. L'huile décantée, miſe dans un grand vaſe de verre (le thermomètre montant toujours par la chaleur du ſoleil qui donnoit déjà ſur les murs voiſins), a été convertie preſque toute en criſtaux dans l'eſpace d'un quart d'heure. L'huile qui ſurnageoit, coulée ſur des plaques de verre, s'y figeoit dans la minute, & formoit une ſuite de criſtaux implantés les uns dans les autres; un carreau de vitre enduit de cette huile, s'en eſt recouvert, au point que j'ai retiré 2 onces 7 gros d'huile de vitriol de la fonte de cette eſpèce d'incruſtation.

5.° L'huile provenant du *déliquium* des criſtaux, & affoiblie au 60.me degré par ſon expoſition à l'air, n'a donné

aucun ſigne de criſtalliſation, quoique j'en euſſe rempli des tubes de verre minces, pour que le froid la frappât mieux.

Au plaiſir de répéter mon expérience, j'ai joint la ſatisfaction de rendre témoins de tous ces phénomènes pluſieurs de mes confrères à l'Académie, tels que M.rs Mourgues, Peyre, Joyeuſe, Bertholon, Brun, &c. Deux d'entr'eux, M.rs Peyre & Joyeuſe, aſſociés-chimiſtes, ont eu le plaiſir de voir ſe former & croître, à vue d'œil, des criſtaux de l'huile décantée de deſſus la première couche criſtalline, & miſe dans une grande capſule. Pluſieurs criſtaux ont acquis, ſous nos yeux, en quelques minutes, une longueur d'un pouce; & nous avons vu que le rhombe qui paroît d'abord, n'eſt qu'un ſegment de priſme, & qu'il s'alonge par l'addition & l'application de nouveaux criſtaux.

Dans le nombre infini de criſtaux qui ſe ſont formés, il y en a avec pyramide, & d'autres ſans pyramide.

Il me paroît réſulter de cette expérience, 1.° que l'huile très-concentrée ne criſtalliſe point; 2.° que l'huile concentrée entre le 63 & le 65 $\frac{1}{2}$ à un aréomètre marquant 66 dans celle du commerce, criſtalliſe facilement; 3.° que le degré de froid convenable eſt depuis — 1 juſqu'à — 3.

Ce fait me paroît nouveau, & je vais le rapprocher de deux connus qui paroiſſoient avoir de l'analogie avec lui.

1.° Meyer rapporte (Eſſais de chimie, *chap. XVIII*) que lorſqu'on rectifie une huile de vitriol bien fumante, telle que celle de Nordhaus, il paſſe des vapeurs qui ſe condenſent, dans le récipient bien luté, en une liqueur que le froid coagule en une matière ſaline: ce ſel fume violemment quand on ouvre le récipient. Le chimiſte d'Oſnabruck a cru que c'étoit une combinaiſon de ſon *cauſticum* avec l'huile de vitriol; & on m'a rapporté que M. de Fourcroy qui a vérifié l'expérience, attribuoit ce phénomène à une combinaiſon particulière de gaz ſulfureux & d'huile de vitriol.

Ce phénomène, très-intéreſſant par lui-même, & ſur-tout

par la manière dont ce dernier chimiste l'envisage, ne me paroît avoir aucun rapport avec les observations que j'ai rapportées ci-dessus; 1.° les cristaux dont j'ai parlé, ne se volatilisent point, ils se fondent au feu & se réduisent en huile; 2.° exposés à l'air, il ne s'en dégage ni fumée ni odeur.

Nous devons à M. le duc d'Ayen de superbes expériences sur la congélation de l'huile de vitriol: ce célèbre amateur des sciences profita du froid extraordinaire qu'on éprouva à Paris, à la fin de Janvier 1776, pour exposer à une fenêtre, dans des soucoupes de porcelaine, de l'acide vitriolique à divers degrés de concentration. La nuit du 27 au 28, l'acide concentré se gela après 7 ou 8 heures d'exposition; l'acide affoibli par l'eau, ne donna aucun signe de congélation, même après 30 heures.

M. de Morveau a répété l'expérience le 15 Février 1782; & après avoir obtenu de la glace par un froid artificiel de 16 au-dessous de 0, il se convainquit que l'huile pouvoit se geler à un froid moindre; & les portions d'huile qui avoient résisté à l'impression d'un froid aussi violent, se figèrent à quelques degrés au-dessus de 0: il observa même des stries à la surface de la glace, ce qui me paroît annoncer un délinéament de cristallisation; mais, d'un côté, le rapprochement ou trop forte concentration de la liqueur, & de l'autre, le froid violent qu'on lui appliqua, précipitèrent confusément les parties intégrantes de l'huile, & ne lui permirent pas un arrangement symétrique.

Le manque d'eau de cristallisation doit nécessairement s'opposer à la formation des cristaux; & pour que le phénomène eût lieu, il falloit de l'huile de vitriol qui n'eût été portée, par la rectification naturelle, qu'au 63.me ou 65.me degré, & je ne crois pas qu'on obtienne cet effet en affoiblissant à ce degré l'huile déjà concentrée; car l'huile de vitriol préalablement concentrée, & ensuite affoiblie par l'eau, ne me paroît pas exactement de la même nature que celle qui est portée au même degré par une concentration

naturelle. 1.° Il y a un principe colorant & autres matières qu'on dégage par la rectification, & qu'on ne redonne point par l'addition de l'eau; 2.° l'huile dont on a arrêté la concentration au 64.me degré, ne dissout pas l'indigo, au point de porter la partie colorante sur les étoffes; tandis que l'huile bien concentrée & affoiblie par l'eau au même degré, fait du très-beau bleu : ces expériences ont été faites & répétées très en grand dans la fabrique de flanelles de Mrs Isnel & Luchaire à Montpellier. 3.° Les cristaux de l'huile au 65.me degré, tombés en *deliquium*, & exposés à la même température, n'ont plus cristallisé, quoique le *deliquium* ne marquât que 64. Ce fait me paroît prouver que l'eau & l'humidité de l'air, qui se combinent avec l'acide, y développent & entretiennent une chaleur permanente qui ne le rend pas *impressionable* au même degré de froid.

Le 11 au soir & le 12, deux onces de ces cristaux enfermés dans une cornue que j'ai bouchée bien exactement avec un bouchon de liége, & exposés à une température de + 4 degrés, ne sont pas tombés en *deliquium*, tandis que les cristaux qui s'étoient formés dans la grande capsule, & que j'ai laissés dans le vase, exposés à une température de + 1, sont presque tous tombés en *deliquium*, au point d'être déjà totalement déformés; ce qui me fait présumer qu'on pourra garder les cristaux dans un laboratoire, en mettant le flacon qui les contient, dans un endroit frais: on pourroit essayer de plonger le flacon dans l'eau, l'éther ou autre liqueur froide.

Le phénomène que je viens de décrire est sans contredit une véritable cristallisation; mais il paroît se rapprocher des congélations, en ce que, dans la première expérience de ma fabrique, tout le liquide s'étoit figé en cristaux, & qu'il n'y avoit pas une goutte de ce que nous appelons *eau-mère*. Mais il me paroît qu'un sel quelconque, qui ne sera tenu en fusion ou dissolution que par sa seule eau de cristallisation, doit produire des effets semblables, si on lui applique un froid suffisant pour pénétrer toute la masse.

Ce fait me paroît prouver encore que la loi de la cristallisation si bien présentée par M.rs Linné, de l'Isle, Sage, Daubenton, Haüy, est plus générale qu'on ne l'a cru, & qu'elle s'étend jusqu'à ces matières que nous étions autorisés à regarder comme des êtres simples, avant les belles expériences de M. Lavoisier.



EXTRAIT
DES OBSERVATIONS
ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES,
Faites à l'Observatoire royal, en l'année 1785.

M. le Comte DE CASSINI, Directeur.

M.rs DE VILLENEUVE & RUELLE, Élèves.

Nota. SA MAJESTÉ ayant voulu qu'à commencer du 1.er Janvier 1785, on suivît, à son Observatoire royal, un cours complet & continuel d'observations astronomiques & physiques, a créé trois places d'observateurs, qui, sous les yeux du directeur de l'Observatoire, doivent faire toutes les observations qui peuvent avoir lieu, tant le jour que la nuit, depuis le commencement jusqu'à la fin de chaque année. L'extrait de ces observations & de leurs résultats est imprimé particulièrement tous les ans, & distribué aux principaux Savans de l'Europe: mais l'Académie ayant desiré qu'il fît partie de ses Mémoires, on le trouvera à l'avenir à la fin de chaque volume.

AVERTISSEMENT.

Les nouveaux instrumens que Sa Majesté a commandés pour son Observatoire royal, ont été commencés cette année, & doivent être achevés dans le courant de 1786. Le sieur Lenoir est chargé de la construction d'un Cercle entier de trois pieds de diamètre; le sieur Megnié a entrepris celle du Quart-de-cercle mural de sept pieds & demi de rayon. Ce grand instrument est exécuté à l'Observatoire même, dans un vaste atelier disposé à cet effet, où seront établis à demeure les outils & toutes les principales machines nécessaires à la construction des grands instrumens d'Astronomie: une spacieuse fonderie a été bâtie & distribuée de la manière la plus commode pour faire des essais sur la fonte en cuivre des différentes parties de l'instrument. Ce sera donc à l'avenir dans le même lieu que seront faits & les instrumens & les observations; l'artiste & le savant réunis se prêteront un secours réciproque, dont les arts & les sciences ne peuvent tirer qu'un très-grand avantage.

Sa Majesté, en confiant la construction des nouveaux instrumens de son Observatoire, à des artistes François, a eu principalement en vue de ranimer l'industrie nationale, & de mettre les artistes de la capitale dans le cas de disputer à une nation rivale la prééminence qu'elle a depuis quelque temps obtenue dans les arts par les chef-d'œuvres qui sont sortis de chez elle. L'on sait ce que peuvent opérer en France les regards du Souverain; on doit donc juger favorablement des heureux effets que va produire la protection marquée que Sa Majesté daigne accorder dans cette occasion aux Artistes françois.

En attendant que la construction de ces nouveaux instrumens soit achevée, nous avons fait usage de ceux qne nous possédions précédemment; la plupart appartiennent à l'Académie, qui, autant que ses facultés le lui ont permis, s'est toujours empressée à seconder nos travaux, & à suppléer au dénuement où nous nous sommes trouvés pendant long-temps par l'état de vétusté & d'imperfection où étoient réduits les anciens instrumens de l'Observatoire. Un fonds annuel que Sa Majesté vient d'affecter à l'entretien & à l'augmentation de nos instrumens, nous met aujourd'hui dans une

situation

situation bien différente. Nous avons déjà fait l'acquisition d'un superbe télescope de cinq pieds de foyer, de la construction du sieur Dollond, & dont le pouvoir amplifiant, à l'imitation de ceux de M. Herschel, va jusqu'à trois mille fois. Plusieurs autres instrumens de toute espèce, & propres à diverses observations, ont été acquis ou commandés & commencent déjà à former une collection précieuse qui assure à l'avenir la richesse, la gloire & l'utilité de l'Observatoire royal dont l'établissement semble renaître sous une nouvelle forme. La suite nombreuse d'observations dont nous offrons ici les résultats, va faire connoître l'usage que nous avons fait des nouveaux secours que nous avons obtenus : il est nécessaire d'entrer dans quelques explications pour l'intelligence des tableaux dans lesquels nous avons tâché de présenter en raccourci tous les principaux résultats de nos opérations.

Les hauteurs du baromètre, que l'on trouvera parmi les observations météorologiques, ont été déterminées depuis le mois de Juillet, avec un excellent instrument de la construction du sieur Megnié; par le moyen d'une petite cuvette que l'on plonge à chaque observation dans le mercure, & qui se remplit également, on obtient toujours un niveau constant : ce baromètre mesure jusqu'aux centièmes de ligne les variations de la hauteur du mercure; à c'est M. Lavoisier, membre de l'Académie, que nous sommes redevables de cet instrument.

Le thermomètre à mercure, avec lequel nous avons observé la température de l'air, a été construit par le sieur Mossy, d'après les ordres de l'Académie; la division a été faite sur glace par le sieur Richer, avec le plus grand soin, on y distingue les degrés & dixièmes de degrés.

Un autre thermomètre placé au fond des caves où il reste perpétuellement, a été également construit par ordre de l'Académie, sous l'inspection & la direction de M. Lavoisier: sa construction ingénieuse & particulière a pour objet de déterminer si la température des caves de l'Observatoire est constante, si on peut la prendre pour un terme fixe; & au cas qu'elle ait quelques variations, d'en rechercher les loix, d'en mesurer l'étendue au centième de degrés près.

La déclinaison de l'aiguille aimantée a été observée avec une aiguille d'acier fondu, de neuf pouces de longueur: nous nous

propofons de faire exécuter inceſſamment un nouvel inſtrument pour cette ſorte d'obſervation.

La variation diurne a été déterminée avec une aiguille ſuſpendue à des fils de ſoie, ſelon la méthode de M. Coulomb.

Quant aux obſervations aſtronomiques, tous les lieux des planètes ont été déterminés par des obſervations faites dans le méridien, comme étant les plus exactes : les paſſages ont été pris avec une lunette méridienne achromatique de trois pieds & demi, exécutée par le ſieur Charité, artiſte François, ſur le modèle d'un pareil inſtrument anglois, de la conſtruction du ſieur Ramſden ; & les hauteurs ont été obſervées avec un quart-de-cercle de ſix pieds de rayon, conſtruit en 1743, par le ſieur Langlois, ce qui à la vérité néceſſitoit toujours le concours de deux obſervateurs ; mais ſi cette méthode eſt plus embarraſſante, & ne permet pas de faire un auſſi grand nombre d'obſervations qu'avec les inſtrumens muraux, elle a peut-être l'avantage, en ſéparant les deux parties de l'obſervation, d'y employer l'eſpèce d'inſtrument qui eſt la plus propre à chacune. En effet, je ne balancerois jamais, pour l'obſervation des paſſages, à donner la préférence à la lunette méridienne ſur le meilleur mural, à cauſe des inégalités du plan de ce dernier inſtrument, impoſſibles à éviter, très-difficiles à reconnoître, plus encore à déterminer, ſans parler des changemens accidentels dont ce plan eſt ſuſceptible ; & pour les hauteurs, la difficulté de vérifier un mural, lui donne certainement de l'infériorité vis-à-vis des quarts-de-cercle mobiles, qu'on peut retourner, renverſer, & vérifier avec la plus grande facilité & auſſi fréquemment qu'on le juge à propos.

Les éclipſes des ſatellites de Jupiter, des étoiles par la Lune, & autres phénomènes inſtantanés de ce genre, ont été obſervés avec de très-bonnes lunettes achromatiques à trois verres, de trois pieds & demi de foyer & de quarante-deux lignes d'ouverture, de la conſtruction du ſieur Dollond.

Les tables auxquelles nous avons comparé les réſultats de nos obſervations, ſont celles que M. de la Lande a raſſemblées à la ſuite de ſon Aſtronomie, édition de 1771; *les ſignes + & − que nous avons employés pour l'erreur des tables, indiquent qu'il faut ajouter ou retrancher de la poſition actuelle déduite des tables, pour avoir celle qui a été obſervée.*

HISTOIRE PHYSIQUE

de l'année 1785.

SI l'on ne considère les observations météorologiques, que sous un certain point de vue, si l'on n'envisage pour ainsi dire qu'en masse & sans réflexion cette multiplicité de causes accidentelles, momentanées & locales, qui paroissent influer sans cesse sur la constitution de l'atmosphère, & occasionner les changemens continuels de la température; on peut être tenté de croire que le hasard a plus de part que toute autre chose aux phénomènes météorologiques, qu'il est impossible d'y reconnoître des règles certaines, & qu'en conséquence il n'y a qu'une simple curiosité, sans aucune utilité, à les observer. Mais le philosophe instruit, qui examine & approfondit tout avant de prononcer, est bien éloigné de penser ainsi. Plus il a observé la Nature, plus il a pénétré ses secrets, & plus il est persuadé que dans le vaste plan de cet univers il n'est point d'effet sans cause, point d'évènement dû au hasard, point de mouvement sans loix. Les comètes observées pendant nombre de siècles, & prises pour des météores fortuits, ont enfin été reconnues pour des planètes, & rangées au nombre des corps réguliers de notre système. Il y a à peine une vingtaine d'années que l'on fait les observations météorologiques avec l'assiduité & l'exactitude nécessaires; les instrumens qu'on y emploie se perfectionnent tous les jours. Ne pouvons-nous donc pas espérer qu'en redoublant d'attention, en multipliant les observations des phénomènes météorologiques, nous parviendrons quelque jour à découvrir certaines loix, certaines périodes dont la connoissance ne sera pas moins utile à la société, que glorieuse & importante pour la physique.

Les observations de l'état & des variations de l'atmosphère pendant le cours de cette année, ont été faites journellement à l'Observatoire, & répétées à différentes heures du jour & de la nuit. On va rapporter ci-après les résultats généraux, qui seront

ſuivis d'un tableau particulier pour chaque mois, des circonſtances les plus remarquables de la température.

	La plus grande.	La plus petite.	Variation annuelle.
Hauteur du Baromètre.	pouc. lign. 28. 5,2.11 Avril.	pouces. 27,0.29 Mars.	pouc. lign. 1. 5,2.
Hauteur du Thermomètre.			
Expoſé à l'air libre.........	+ 24^d,2.26 Juill.	− 8^d,7.1 Mars.	32^d,9.
Placé au fond des caves......	9^d 14/100 27 Déc.	9^d 11/100 1 Janv.	3/100
Variation diurne de l'aiguille aimantée...	15′ 4″ en Mai.	4′ 7″ en Janv.	13′,7.

Jours de pluie..... 107.
Jours de neige.... 16.
Jours de gelée.... 49.

Quantité d'eau tombée dans l'année. 15 pouces 5 lign.,0.

Déclinaiſon de l'aiguille aimantée, le 1.er Janv. 21^d 35′, — le 30 Mai 22^d 0′.

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1785.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	CIRCONSTANCES & Remarques.
JANVIER.	Plus grande hauteur 28 pouc. 3 lign.,8 le 23. Plus petite hauteur 27 pouc. 1 lign.,0 le 2. Huit jours de pluie, 9 lignes,2 d'eau. Un jour de neige.	Plus grande hauteur + 9^d,1 le 5. Plus petite hauteur — 2^d,5 le 24. Huit jours de gelée.	S. S. O. E. S. E. S. E.	Il y a eu pendant ce mois, quinze jours de brume & ce brouillard; il a été épais particulièrement les 12, 13, 20, 21, 23 & 25. Très-mauvais temps les 5, 6 & 9. Le vent a été très-grand les quatre derniers jours du mois, de l'O. au S.
FÉVRIER.	Plus grande hauteur 28 pouc. 5 lign.,0 le 12. Plus petite hauteur 27 pouc. 0 lign.,8 le 22. Trois jours de pluie, 1 pouc. 1 lign.,9. Dix jours de neige.	Plus grande hauteur + 5^d,5 le 7. Plus petite hauteur — 7^d,5 le 28. Quatorze jours de gelée.	N. N. O. S. S. E. N. N. E.	Il n'y a eu que quatre jours de brume. Les vents ont été très-forts pendant ce mois, particulièrement les 27 & 28.

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1785.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	CIRCONSTANCES & Remarques.
MARS.	Plus grande hauteur 28pouc. 3lign.,3 le 17. Plus petite hauteur 27pouc. 0lign.,0 le 29. Trois jours de neige. Un jour de grêle.	Plus grande hauteur + 7d,8 le 21. Plus petite hauteur — 8d,7 le 1. Treize jours de gelée.	N. N.E. N.	Il y a eu pendant ce mois dix jours de brume & brouillard. Plusieurs jours de fort beau temps. Une aurore boréale foible le 22.
AVRIL.	Plus grande hauteur 28pouc. 5lign.,2 le 11. Plus petite hauteur 27pouc. 4lign.,0 le 2. Cinq jours de pluie, 6lignes,2 d'eau. Un jour de neige.	Plus grande hauteur + 17d,4 le 18. Plus petite hauteur — 0d,7 le 3. Un jour de gelée.	N.E. N.E. N.N.E.	Il y a eu pendant ce mois sept jours de brume. Généralement très-beau temps, surtout vers la fin du mois.
MAI.	Plus grande hauteur 28pouc. 4lign.,5 le 13. Plus petite hauteur 27pouc. 8lign.,0 le 18. Cinq jours de pluie, 3lignes d'eau.	Plus grande hauteur + 21d,0 le 24. Plus petite hauteur + 5d,8 le 22.	N.N.E. O.S.O. O.N.O.	Il y a eu cinq jours de brume, particulièrement le 5 de ce mois Aurore boréale le 23. Grande sécheresse pendant tout le mois. Il n'a commencé que le 27 à tomber quelques gouttes d'eau : les jours suivans la pluie a été forte.
JUIN.	Plus grande hauteur 28pouc. 3lign.,8 le 10. Plus petite hauteur 27pouc. 9lign.,1 le 5. Neuf jours de pluie, 22lignes,8 d'eau. Un jour de grêle.	Plus grande hauteur + 22d,2 le 27. Plus petite hauteur + 4d,8 le 24.	O.S.O. N.N.E. N.E.	Il a tonné les 8 & 28.

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1785.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	*CIRCONSTANCES & Remarques.*
JUILLET.	Plus grande hauteur $28^{pouc.}$ $3^{lign.}$,4 le 9. Plus petite hauteur $27^{pouc.}$,$0^{lign.}$,4 le 29. Quinze jours de pluie, $2^{pouc.}$ $4^{lign.}$,5 d'eau.	Plus grande hauteur + 24^{d},2 le 26. Plus petite hauteur + 10^{d},2 le 24.	N. O. O. S. O. S. O.	Il y a eu quelques coups de tonnerre le 20.
AOÛT.	Plus grande hauteur $28^{pouc.}$ $3^{lign.}$,7 le 27. Plus petite hauteur $27^{pouc.}$ $7^{lign.}$6 le 3. Douze jours de pluie, $2^{pouc.}$ $0^{lign.}$6 d'eau.	Plus grande hauteur + 20^{d},3 le 2. Plus petite hauteur + 6^{d},3 le 27.	S. S. O. O. S. E.	Le vent a été toujours très-fort pendant ce mois, principalement les 4 & 13. Tonnerre les 2, 3, 4 & 5. Léger brouillard le 23.
SEPT.	Plus grande hauteur $28^{pouc.}$ $4^{lign.}$,7 le 29. Plus petite hauteur $27^{pouc.}$ $3^{lign.}$,7 le 25. Quinze jours de pluie, $1^{pouc.}$ $10^{lign.}$ d'eau.	Plus grande hauteur + 19^{d},5 le 19. Plus petite hauteur + 7^{d},6 le 29.	S. O. S. S. O. S. O.	Le vent a été communément très-fort & des plus violens les 6 & 25. Tonnerre le 23. Sept jours de brume & brouillard.
OCTOBRE.	Plus grande hauteur $28^{pouc.}$ $4^{lign.}$,9 le 14. Plus petite hauteur $27^{pouc.}$ $8^{lign.}$,3 le 8. Quatorze jours de pluie, $1^{pouc.}$ $10^{lign.}$,4 d'eau.	Plus grande hauteur + 15^{d},5 le 12. Plus petite hauteur + 0^{d},3 le 27.	S. S. O. S.	Il y a eu quinze jours de brouillard. Vents violens les 12 & 28.

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1785.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	CIRCONSTANCES & Remarques.
NOVEMB.	Plus grande hauteur 28 pouc. 4 lign.,6 le 17. Plus petite hauteur 27 pouc. 1 lign.,5 le 30. Douze jours de pluie, 2 pouc. 1 lign.,5 d'eau.	Plus grande hauteur + 12d,5 le 5. Plus petite hauteur — 1d,9 le 18. Deux jours de gelée.	S. O. S. O.	Il y a eu quatorze jours de brouillard. Vents violens les 1, 19, 26 & 28.
DÉCEMB.	Plus grande hauteur 28 pouc. 3 lign.,5 le 18. Plus petite hauteur 27 pouc. 0 lign.,7 le 1. Six jours de pluie, 0 pouc. 6 lign.,9 d'eau, 4 jours de neige.	Plus grande hauteur + 8d,9 le 19. Plus petite hauteur — 7d,8 le 31. Onze jours de gelée.	S. O. E. S. E. N. E.	Il y a eu dix jours de brouillard. Vent violent les 2, 6 & 29.



HISTOIRE CÉLESTE

De l'année 1785.

L'ASTRONOMIE n'attend sa perfection que du temps, elle est l'élève des siècles. Le génie, par des découvertes heureuses, peut bien à la vérité hâter quelquefois la marche lente de ses progrès; mais il a beau faire, s'il n'a derrière lui une longue suite d'observations sur laquelle il puisse s'appuyer & construire, ses efforts seront inutiles, il ne bâtira que des systèmes.

Chaque année n'ajoute communément que peu de chose aux lumières de l'Astronomie; mais ce peu de chose, en s'accumulant, devient au bout d'un ou plusieurs siècles, la base & le fondement de quelque grande & belle théorie. Il est des temps plus heureux que d'autres, où la rencontre de certaines circonstances, l'apparition de quelque phénomène particulier, augmentent tout-à-coup nos connoissances, découvrent ou confirment quelque vérité nouvelle ou soupçonnée. Notre siècle sans doute a été l'un des plus favorisés de ce côté: deux passages de Vénus sur le Soleil, dans l'espace de neuf années, ont enfin fixé la parallaxe du Soleil, l'un des élémens les plus importans de l'Astronomie; mais s'il reste encore quelque doute sur cette détermination intéressante, ce ne sera qu'en 1874, c'est-à-dire, au bout de cent cinq ans que le retour du même phénomène pourra en procurer la vérification. Une nouvelle planète vient, en 1781, d'être ajoutée à notre système; quatre années d'observations nous ont fourni une ébauche de sa théorie: la révolution de ce nouvel astre paroît être de quatre-vingt-trois ans; ce ne sera donc que dans quatre ou cinq siècles, qu'après l'avoir observé assiduement plusieurs fois dans les mêmes points de son orbite, l'on pourra parvenir à une exacte connoissance de ses mouvemens. Plus de quarante comètes ont été aperçues & observées depuis quatre-vingt-cinq ans, & leur retour ne doit avoir lieu au plus tôt que dans le siècle prochain. En attendant, presque chaque année nous

en

en fait découvrir quelques nouvelles au retour desquelles nos successeurs devront également veiller, pour parvenir à déterminer la durée de leur révolution. Si cette connoissance précieuse est réservée aux siècles futurs, au moins est-il vrai qu'ils nous en seront redevables, puisque ce sont nos observations comparées aux leurs qui serviront de base; ainsi l'on pourroit en quelque sorte comparer les travaux des Astronomes, à ceux de ces respectables pères de famille, qui travaillent & n'amassent que pour la jouissance de leurs enfans & pour enrichir leur postérité.

On voit donc combien peut devenir intéressante, précieuse même un jour, pour les progrès de l'Astronomie, la collection suivie d'observations astronomiques que nous commençons à rassembler. Dans le cours de cette année, par exemple, nous avons déterminé près de cent quatre-vingts lieux de planète, & fixé l'erreur de la théorie dans les divers points de leurs orbites, où l'on avoit peu coutume de les suivre auparavant. Cette vérification répétée pendant plusieurs années, à chaque révolution & dans les mêmes points, ne peut manquer de nous conduire à une connoissance complète des mouvemens célestes, de leurs inégalités, & des équations par lesquelles on peut les représenter. Dès-lors on conviendra que l'Astronomie nous sera redevable de quelque chose, & beaucoup plus, peut-être, que si nous eussions fait une découverte même brillante, mais souvent peu utile aux progrès de la science. C'est cette persuasion qui ne cesse d'animer le zèle de nos coopérateurs (1), & leur donne la force, le courage & la patience, en s'adonnant entièrement à la pratique de l'Astronomie, de s'exposer aux fatigues de l'observation & des veilles, & de surmonter l'ennui & les difficultés des calculs astronomiques, dont les tableaux suivans vont offrir les résultats.

(1) M.rs de Villeneuve & Ruelle, Élèves.

LE SOLEIL.

Il n'y a eu cette année aucune éclipſe de Soleil viſible à Paris: celle du 9 Février n'a eu lieu que pour l'Afrique & l'Aſie; elle a dû être centrale & totale au Congo: celle du 4 Août a dû être centrale & annulaire dans l'Amérique ſeptentrionale.

Il a paru de temps en temps quelques taches ſur le diſque du Soleil, mais elles ont été peu conſidérables.

Au mois de Mars, on a obſervé

La hauteur du bord ſupérieur du Soleil, le 21 . . . 41^d 57′ 50″,2.

D'où l'on conclud { la déclinaiſon vraie du centre. 0. 31. 0, *bor.*
l'heure de l'équinoxe, le 19 à 16^h 34. 49.

Au mois de Juin, on a déterminé

La hauteur ſolſticiale du centre du Soleil . . . . 64. 37. 47.

D'où l'on conclud

L'obliquité de l'écliptique apparente . . . . 23. 27. 59.

Au mois de Septembre, on a obſervé

La hauteur du bord ſupérieur du Soleil, le 22 . . . 41^d 31′ 36″,8.

D'où l'on conclud { la déclinaiſon vraie du centre. 0. 4. 26 *bor.*
l'heure de l'équinoxe, le 22 à 4^h 33. 8.

On a déterminé, par obſervation, le paſſage du centre du Soleil dans le parallèle de pluſieurs Étoiles, ainſi qu'on le voit dans le Tableau ſuivant.

				Différ. d'aſc. dr.
Paſſage du Soleil dans le parallèle de	α de l'Hydre	le 27 Févr.	à 21^h 10′ 30″	157^d 29′ 41″0.
	i d'Orion	4 Mars	5. 53. 30	95. 24. 22,0.
	β de l'Éridan	5 Mars	19. 30. 26	" " "
	σ d'Orion	7 Avril	5. 58. 56	150. 39. 14,0.
	δ du Lion	16 Avril	2. 49. 33	130. 21. 32,0.
	Arcturus	20 Mai	21. 57. 40	" " "
	π du Serpent	16 Juin	12. 33. 59	" " "
	γ d'Hercule	24 Juillet	10. 30. 7	118. 25. 29,0.
	Sirius	6 Nov.	17. 41. 55	" " "
	β de la Baleine	16 Nov.	22. 7. 3	135. 2. 38,6.
	γ du Lièvre	5 Déc.	7. 16. 3	191. 5. 50,5.

VÉNUS.

Cette Planète a achevé, dans le courant de cette année, deux révolutions moins quatre ſignes treize degrés trois quarts autour du Soleil, & s'eſt trouvée

DANS SON NŒUD		EN CONJ.	Dans ſa plus grande digr.		STATIONNAIRE.		ÉCLIPSÉE par la LUNE.
Deſcend.	Aſcendant.	Inférieure.	Occident.	Orientale.			
2 Juin.	23 Sept.	29 Mai.	2 Août.	28 Mars.	8 Mai.	19 Juin.	12 Avril.

On a déterminé, par obſervation, quarante-deux lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les réſultats ſuivans :

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Poſition ſuppoſée de l'ÉTOILE.		Lieu obſervé de VÉNUS.		Erreur des Tables.	
			Aſcenſ. droite.	Déclinaiſon.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Janv. 12	2. 34. 22,0	ε Baleine.	37. 18. 1,0	12. 47. 31,0A.	330. 43. 5,0	0. 32. 30A.	+0. 24	+0. 6
Mars 1	2. 44. 48,0	ο du Lion.	142. 25. 39,0	10. 51. 41,0B.	26. 34. 5,0	1. 25. 13B	1. 4	0. 22
2	2. 45. 7,0	α Écreviſſe.	131. 41. 11,0	12. 40. 43,0	27. 39. 13,0	1. 30. 12	0. 49	0. 25
3	2. 45. 24,3	*Idem.*	131. 41. 11,0	12. 40. 43,0	28. 44. 11,0	1. 35. 15	0. 33	0. 28
Avril 5	2. 52. 10,0	ζ du Lion.	151. 11. 4,0	24. 28. 47,0	61. 2. 42,0	4. 10. 6	0. 33	0. 27
7	2. 51. 45,0	ε du Lion.	143. 24. 48,0	24. 25. 13,0	62. 41. 3,0	4. 17. 32	0. 59	0. 35
9	2. 51. 8,5	*Idem.*	143. 24. 48,0	24. 25. 13,0	64. 15. 18,0	4. 24. 23	0. 42	0. 38
10	2. 50. 45,0	*Idem.*	143. 24. 48,0	24. 25. 13,0	65. 1. 4,0	4. 27. 30	0. 30	0. 54
11	2. 48. 48,0	μ du Lion.	145. 8. 18,0	24. 25. 13,0	66. 30. 25,0	4. 33. 29	0. 45	0. 29
15	2. 47. 49,4	*Idem.*	145. 8. 18,0	24. 25. 13,0	68. 36. 28,0	4. 41. 44	0. 38	0. 54
17	2. 46. 8,0	*Idem.*	145. 8. 18,0	24. 25. 13,0	69. 54. 59,0	4. 46. 10	0. 28	0. 54
25	2. 35. 28,5	α Cour.	231. 24. 32,0	27. 26. 43,0	74. 15. 49,0	4. 55. 5	0. 12	0. 35
29	2. 27. 18,6	*Idem.*	231. 24. 32,0	27. 26. 43,0	75. 48. 45,0	4. 53. 32	−0. 9	0. 41
Mai 1	2. 22. 21,5	ε Bouvier.	218. 54. 49,2	27. 59. 8,0	76. 24. 22,0	4. 50. 41	0. 8	0. 39
4	2. 13. 47,3	*Idem.*	218. 54. 49,2	27. 59. 8,0	77. 2. 40,0	4. 43. 46	0. 19	0. 38

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Position supposée de l'ÉTOILE.		Lieu observé de VÉNUS.		Erreur des T…	
			Ascens. droite.	Déclinaison.	Longitude.	Latitude.	En long.	E…
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	[illegible]
Mai 5	2. 10. 38,5	α Cour.	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5 B.	77. 11. 34,0	4. 40. 42 B.	+0. 1	+[illegible]
6	2. 7. 17,3	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 17. 53,0	4. 37. 5	−0. 3	0.[illegible]
8	2. 0. 4,0	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 24. 5,0	4. 28. 41	+0. 3	0.[illegible]
9	1. 56. 9,0	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 23. 24,0	4. 23. 37	−0. 15	0.[illegible]
10	1. 52. 7,2	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 20. 39,0	4. 18. 15	0. 5	[illegible]
11	1. 47. 53,6	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 15. 35,0	4. 12. 28	0. 16	[illegible]
12	1. 43. 29,5	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 7. 55,0	4. 5. 53	0. 4	[illegible]
14	1. 34. 4,4	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	76. 45. 19,5	3. 51. 23	0. 26	[illegible]
15	1. 29. 6,8	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	76. 30. 27,0	3. 43. 42 B.	0. 34	[illegible]
Juin 9	22. 49. 35,9	γ d'Herc.	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	63. 1. 31,0	1. 40. 50 A.	0. 23	+[illegible]
10	22. 44. 1,3	*Idem.*	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	62. 38. 18,0	1. 53. 13	0. 28	0.[illegible]
11	22. 33. 35,0	*Idem.*	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	62. 17. 13,0	2. 4. 10	0. 34	[illegible]
12	22. 33. 19,6	*Idem.*	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	61. 58. 59,0	2. 14. 47	0. 6	+[illegible]
23	21. 45. 27,2	α d'Herc.	256. 13. 13,5	14. 39. 5,0	61. 7. 13,0	2. 42. 25	0. 8	−[illegible]
Juill. 24	20. 49. 0,9	γ d'Hercule	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	77. 52. 36,0	4. 6. 26	+0. 57	0.[illegible]
25	20. 48. 32,0	*Idem.*	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	78. 41. 54,0	4. 3. 59,5	0. 28	0.[illegible]
Août 6	20. 47. 13,5	*Arcturus.*	211. 29. 19,2	20. 18. 18,0	89. 26. 37,0	3. 25. 37 A.	−1. 40	0.[illegible]
11	20. 48. 47,2	*Idem.*	211. 29. 19,2	20. 18. 18,0	94. 16. 19,7	3. 6. 38	+1. 51	+0.[illegible]
12	20. 49. 14,0	*Idem.*	211. 29. 19,2	20. 18. 18,0	95. 15. 35,0	3. 2. 11	1. 48	+0.[illegible]
16	20. 51. 19,1	*Idem.*	211. 29. 19,2	20. 18. 18,0	99. 14. 53,0	2. 45. 11,0	1. 18	−[illegible]
19	20. 53. 15,0	ε Pégase.	318. 2. 36,0	18. 53. 51,0	102. 17. 43,0	2. 32. 11	0. 41	+0.[illegible]
26	20. 58. 48,6	*Idem.*	318. 2. 36,0	18. 53. 51,0	109. 37. 47,0	2. 0. 33	0. 49	−0.[illegible]
29	21. 1. 29,0	*Idem.*	318. 2. 36,0	18. 53. 51,0	112. 50. 45,0	1. 46. 55	1. 7	−0.[illegible]
Oct. 23	21. 52. 24,3	α Baleine.	43. 47. 5,1	3. 14. 43,0	176. 27. 38,0	1. 28. 46 B.	0. 56	+0.[illegible]
Nov. 15	22. 5. 26,8	Rigel.	76. 4. 31,9	8. 27. 27,0	204. 39. 32,0	1. 45. 44	0. 46	+0.[illegible]
28	22. 11. 59,8	γ Éridan.	57. 1. 28,6	14. 7. 36,6	220. 47. 57,0	1. 36. 30	1. 7	−0.[illegible]
Déc. 7	22. 17. 9,8	*Syrius.*	98. 55. 42,5	16. 25. 32,7 A.	232. 1. 20,0	1. 23. 54	0. 41	+0.[illegible]

MARS.

Cette Planète a parcouru, dans le courant de cette année, un arc de 212^d 5$'$ autour du Soleil, & s'est trouvée

EN QUADRATURE.	DANS SON NŒUD ascendant.	STATIONNAIRE.	EN OPPOSITION.
14 Août.	24 Octobre.	21 Octobre.	27 Novembre.

On a déterminé, par observation, vingt-deux lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les résultats suivans:

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Position supposée de l'ÉTOILE. Ascens. droite.	Déclinaison.	Lieu observé de MARS. Longitude.	Latitude.	Erreur des Tables. En long.	En latit.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
oût 10	17. 47. 32,0	e Pégase.	318. 2. 35,5	18. 53. 51,4B.	50. 5. 36,0	1. 49. 17A.	—1. 53	—0. 24
11	17. 46, 4,7	γ Dauphin.	309. 11. 20,8	1. 21. 58,7	50. 41. 5,0	1. 48. 53	1. 11	0. 17
16	17. 38. 49,0	α Flèche.	292. 38. 4,0	17. 32. 10,4	53. 32. 19,0	1. 45. 45	1. 36	0. 23
19	17. 34. 23,5	*Idem.*	292. 38. 4,0	17. 32. 10,4	55. 12. 9,0	1. 43. 44	2. 5	0. 23
26	17. 23. 51,3	e Pégase.	318. 2. 35,5	18. 53. 51,4	58. 55. 23,0	1. 38. 18	2. 19	0. 25
27	17. 22. 18,7	*Idem.*	318. 2. 35,5	18. 53. 51,4	59. 26. 18,0	1. 37. 23	2. 12	0. 26
ct. 23	15. 0. 6,8	α Bélier.	28. 47. 28,5	22. 26. 49,6	75. 14. 54,0	0. 2. 41	3. 27	0. 44
25	14. 51. 48,8	*Idem.*	28. 47. 28,5	22. 26. 49,6	75. 6. 35,0	0. 2. 42B.	3. 43	+0. 43
26	14. 47. 35,1	*Idem.*	28. 47. 28,5	22. 26. 49,6	75. 1. 39,0	0. 5. 30	3. 13	0. 44
ov. 7	13. 50. 36,8	*Idem.*	28. 47. 28,5	22. 26. 49,6	72. 48. 52,0	0. 40. 42	4. 33	0. 47
15	13. 7. 18,4	Alcyone.	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	70. 21. 6,0	1. 5. 5	4. 33	0. 44
16	13. 1. 38,9	*Idem.*	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	70. 0. 13,0	1. 8. 10	4. 18	0. 47
17	12. 55. 56,4	*Idem.*	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	69. 39. 2,0	1. 11. 2	4. 43	0. 38
21	12. 32. 47,7	*Idem.*	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	68. 10. 50,0	1. 22. 42	4. 10	0. 43
28	11. 51. 15,4	*Idem.*	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	65. 31. 15,0	1. 41. 21	4. 12	0. 34
éc. 7	10. 58. 43,2	δ Gémeaux	106. 59. 21,0	22. 21. 31,0	62. 21. 12,0	2. 0. 54	4. 15	0. 32
9	10. 47. 18,7	α Bélier.	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	61. 44. 21,0	2. 4. 41	4. 9	0. 45
10	10. 41. 39,0	*Idem.*	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	61. 26. 51,0	2. 6. 25	4. 4	0. 48
11	10. 35. 59,0	ζ Taureau.	81. 13. 27,3	20. 59. 48,0	61. 9. 47,0	2. 7. 49	4. 15	0. 35
12	10. 30. 29,4	α Bélier.	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	60. 53. 48,0	2. 9. 34	3. 58	0. 49
13	10. 23. 58,5	*Idem.*	28. 47. 29	22. 29. 54,7	60. 38. 23,0	2. 10. 56	3. 53	0. 43

Les circonſtances favorables dans leſquelles les obſervations précédentes ont été faites, procurent les réſultats ſuivans :

Quadrature de Mars, le 14 Août, à....		0h	14′	6″,0 t. vr.
Longitude géoc. de Mars en quadrature..	1ſ	21d	58.	55,0.
Paſſage de Mars par ſon nœud aſcendant, le 24 Octobre, à.............		14h	54.	31,0 t. vr.
Lieu du nœud aſcendant de Mars.......	1.	17d	48.	0,0.
Oppoſition de Mars, le 27 Novembre, à..		6h	24.	28,7 t. vr.
Longitude en oppoſition............	2.	5d	59.	22,0.
Latitude en oppoſition.............		1.	38.	5,0. bor.

JUPITER.

Cette Planète a parcouru, dans le courant de cette année, un arc de 33d 3′ $\frac{1}{3}$ autour du Soleil, & s'eſt trouvée

EN conjonction.	EN QUADRATURE.		EN oppoſition.	STATIONNAIRE.	
10 Mars.	4 Juillet.	26 Déc.	1 Octobre.	3 Août.	29 Nov.

On a déterminé, par obſervation, quarante-huit lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les réſultats ſuivans:

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Poſition ſuppoſée de l'ÉTOILE. Aſcenſ. droite.	Déclinaiſon.	Lieu obſervé de JUPITER. Longitude.	Latitude.	Erreur des Tables. En long.	En lat.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Avril 28	21. 42. 19,2	γ Vierge.	187. 42. 45,0	0. 16. 13,0 A.	2. 19. 3,1	1. 6. 52 A.	−4. 34	+0. [illegible]
Mai 1	21. 33. 15,2	η Vierge.	182. 14. 24,0	0. 31. 30,0 B.	2. 58. 9,0	1. 6. 59	4. 42	−0. [illegible]
3	21. 27. 7,8	*Idem.*	182. 14. 24,0	0. 31. 30,0	3. 23. 6,0	1. 7. 11	5. 12	−0. [illegible]
7	21. 14. 45,6	ζ Vierge.	200. 57. 9,0	0. 30. 19,0	4. 13. 6,0	1. 7. 46	5. 13	−0. [illegible]
9	21. 8. 2,2	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 19,0	4. 38. 3,0	1. 8. 15	4. 49	+0. [illegible]
10	21. 5. 23,2	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 19,0	4. 50. 4,0	1. 8. 22	4. 58	−0. [illegible]

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Position supposée de l'ÉTOILE.		Lieu observé de JUPITER.		Erreur des Tables.	
			Ascens. droite.	Déclinaison.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Mai 11	21. 2. 12,5	ζ Vierge.	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0 B.	5. 2. 0,0	1. 8. 23 A.	—5. 7	—0. 10
12	20. 59. 3,6	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	5. 14. 16,0	1. 8. 34	4. 51	—0. 8
13	20. 54. 52,5	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	5. 26. 25,0	1. 9. 3	4. 38	+0. 11
14	20. 52. 37,0	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	5. 37. 33,0	1. 8. 51	5. 21	—0. 10
20	20. 33. 3,6	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	6. 46. 40,0	1. 9. 48	5. 24	—0. 15
21	20. 29. 47,5	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	6. 58. 0,0	1. 10. 13	5. 18	—0. 1
22	20. 26. 27,2	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	7. 9. 15,0	1. 10. 32	5. 10	+0. 10
23	20. 23. 6,7	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	7. 20. 21,0	1. 10. 34	5. 5	+0. 11
Juin 12	19. 13. 31,2	γ Ophiucus.	264. 17. 48,4	2. 48. 10,0	10. 38. 9,0	1. 14. 43	5. 24	—0. 2
13	19. 9. 54,7	*Idem.*	264. 17. 48,4	2. 41. 10,0	10. 46. 40,0	1. 14. 59	5. 53	0. 0
25	18. 25. 54,8	*Idem.*	264. 17. 48,4	2. 41. 10,0	12. 19. 23,5	1. 17. 42	6. 43	0. 13
Août 3	15. 58. 2,8	β Ophiucus	263. 13. 45,7	4. 40. 15,5	14. 36. 53,0	1. 28. 42	6. 29	0. 1
4	15. 54. 10,9	*Idem.*	263. 13. 45,7	4. 40. 15,5	14. 36. 37,0	1. 28. 54	6. 37	0. 7
5	15. 50. 19,5	*Idem.*	263. 13. 45,7	4. 40. 15,5	14. 36. 24,0	1. 29. 16	6. 35	0. 1
19	14. 56. 10,9	θ Serpent.	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	14. 9. 49,0	1. 32. 48	6. 38	+0. 15
20	14. 52. 23,0	*Idem.*	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	14. 6. 38,0	1. 32. 57	5. 45	+0. 23
23	14. 40. 35,2	*Idem.*	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	13. 55. 33,0	1. 33. 40	6. 33	+0. 24
28	14. 21. 3,4	*Idem.*	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	13. 34. 0,0	1. 34. 59	6. 13	—0. 14
Sept. 1	14. 5. 15,4	*Idem.*	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	13. 12. 56,0	1. 35. 44	6. 38	0. 21
13	13. 17. 28,4	δ l'Aigle.	288. 40. 40,	2. 42. 13,3	11. 56. 39,0	1. 37. 42	6. 41	0. 22
Oct. 1	12. 4. 48,2	γ Baleine.	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	9. 38. 5,0	1. 38. 46	6. 37	0. 30
11	11. 22. 52,8	*Idem.*	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	8. 18. 8,0	1. 38. 15	6. 45	0. 30
12	11. 18. 43,4	*Idem.*	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	8. 10. 32,0	1. 38. 12	6. 42	0. 27
13	11. 14. 33,8	*Idem.*	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	8. 2. 42,0	1. 38. 0	6. 42	0. 34
16	11. 1. 59,2	*Idem.*	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	7. 40. 29,0	1. 37. 39	6. 29	0. 35
25	10. 24. 5,1	α Lien ♓.	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 37. 34,0	1. 36. 6	6. 51	0. 46
26	10. 19. 51,5	*Idem.*	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 31. 26,0	1. 36. 0	6. 42	0. 42
27	10. 15. 35,2	*Idem.*	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 24. 58,0	1. 35. 43	6. 52	0. 48
28	10. 11. 22,8	*Idem.*	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 18. 57,0	1. 35. 39	6. 48	0. 40
29	10. 7. 19,7	*Idem.*	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 13. 22,0	1. 35. 30	6. 33	0. 37
30	10. 2. 53,5	*Idem.*	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 7. 49,0	1. 35. 21	6. 17	0. 34
Nov. 15	8. 54. 30,6	δ d'Orion.	80. 16. 49,6	0. 28. 5,5	4. 59. 30,0	1. 31. 44	5. 46	0. 17
16	8. 50. 15,2	*Idem.*	80. 16. 49,6	0. 28. 5,5	4. 56. 54,0	1. 31. 15	5. 42	0. 29
17	8. 45. 55,0	*Idem.*	80. 16. 40,6	0. 28. 5,5	4. 54. 47,0	1. 31. 12	5. 23	0. 16
28	7. 58. 32,3	*Idem.*	80. 16. 49,6	0. 28. 5,5	4. 40. 44,0	1. 28. 13	5. 10	0. 5

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Position supposée de l'ÉTOILE.		Lieu observé de JUPITER.		Erreur des Tables	
			Ascens. droite.	Déclinaison.	Longitude.	Latitude.	En long.	En lat.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Déc. 1	7. 45. 37,1	δ d'Orion.	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4A.	4. 41. 32,0	1. 27. 4A.	—4. 47	—0.
5	7. 38. 26,5	*Idem.*	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4	4. 44. 38,0	1. 25. 42	5. 14	0.
7	7. 19. 52,6	*Idem.*	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4	4. 47. 55,0	1. 25. 7	5. 4	0.
9	7. 11. 20,6	α Nœud ♓.	27. 45. 18,4	1. 43. 37,4B.	4. 51. 53,0	1. 24. 28	4. 59	0.
10	7. 7. 4,0	*Idem.*	27. 45. 18,4	1. 43. 37,4	4. 53. 56,0	1. 24. 15	5. 8	0.
12	6. 58. 33,7	δ d'Orion.	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4	4. 58. 58,0	1. 23. 43	5. 14	0.
13	6. 54. 20,2	*Idem.*	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4	5. 2. 9,0	1. 23. 26	4. 52	0.

Les observations du mois d'Octobre, donnent encore le résultat suivant:

Opposition de Jupiter, 1.er Octobre, à. 22h 9' 44" *temps vrai.*

Longitude en opposition........... 0s 9d 34. 35.

Latitude en opposition............ 1. 38. 39.

SATURNE.

Cette Planète a parcouru, dans le courant de cette année, un arc de 12 degrés autour du Soleil, & s'est trouvée

EN conjonction.	EN QUADRATURE.		EN opposition.	STATIONNAIRE	
15 Janv.	24 Avril.	21 Octobre.	24 Juillet.	13 Mai.	30 Oct.

On a déterminé, par observation, trente-trois lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les résultats suivans:

785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILES comparées.	Position supposée de l'ÉTOILE.		Lieu observé de SATURNE.		Erreur des T	
			Ascens. droite.	Déclinaison.	Longitude.	Latitude.	En long.	En
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	
uin 11	15. 6. 14,7	β Scorpion.	208. 15. 27,5	19. 12. 21,0 A.	304. 45. 6,0	0. 25. 0 A.	—10. 4	—
12	15. 1. 56,2	*Idem.*	238. 15. 27,5	19. 12. 21,0	304. 42. 36,0	0. 25. 13	10. 2	
13	14. 57. 37,2	*Idem.*	238. 15. 27,5	19. 12. 21,0	304. 39. 52,0	0. 25. 10	10. 5	
ill. 18	12. 24. 58,8	μ Sagittaire.	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	302. 29. 46,0	0. 29. 18	9. 2	
22	12. 7. 51,9	*Idem.*	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	302. 12. 13,0	0. 29. 41	8. 55	
23	12. 3. 35,8	*Idem.*	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	302. 7. 38,0	0. 29. 43	9. 1	
25	11. 55. 6,4	*Idem.*	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	301. 58. 46,0	0. 29. 57	9. 2	
26	11. 50. 53,0	*Idem.*	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	301. 54. 22,0	0. 30. 1	9. 0	
28	11. 42. 26,7	*Idem.*	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	301. 45. 35,0	0. 30. 8	8. 54	
31	11. 29. 54,8	*Idem.*	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	301. 32. 21,0	0. 30. 29	8. 54	
oût 1	11. 25. 37,8	*Idem.*	270. 14. 46,7	21. 5. 57,9 B.	301. 27. 45,0	0. 30. 24	9. 9	
3	11. 17. 23,6	*Idem.*	270. 14. 46,7	21. 5. 57,9	301. 19. 12,0	0. 30. 35	9. 2	
4	11. 13. 15,0	*Idem.*	270. 14. 46,7	21. 5. 57,9	301. 15. 3,0	0. 30. 45	8. 52	
5	11. 9. 6,4	*Idem.*	270. 14. 46,7	21. 5. 57,9	301. 10. 41,0	0. 30. 54	8. 55	
7	11. 0. 54,7	*Idem.*	270. 14. 46,7	21. 5. 57,9	301. 2. 22,0	0. 31. 0	8. 46	
9	10. 52. 41,5	*Idem.*	270. 14. 45,7	21. 5. 5,79	300. 53. 27,0	0. 30. 53	9. 19	
10	10. 48. 39,7	*Idem.*	270. 14. 45,7	21. 5. 57,9	300. 49. 48,0	0. 31. 14	8. 49	
11	10. 44. 36,2	*Idem.*	270. 14. 45,7	21. 5. 57,9	300. 45. 40,0	0. 31. 19	8. 50	
12	10. 40. 35,1	*Idem.*	270. 14. 45,7	21. 5. 57,9	300. 41. 56,0	0. 31. 35	8. 31	
17	10. 20. 31,5	*Idem.*	270. 14. 45,7	21. 5. 57,9	300. 22. 23,0	0. 31. 36	8. 28	
19	10. 12. 35,2	*Idem.*	270. 14. 45,7	21. 5. 57,9	300. 15. 16,0	0. 31. 49	8. 5	
20	10. 8. 40,1	*Idem.*	270. 14. 44,7	21. 5. 57,9	300. 10. 58,0	0. 31. 45	8. 40	
23	9. 56. 52,3	*Idem.*	270. 14. 44,7	21. 5. 57,9	300. 0. 6,0	0. 31. 51	8. 51	
26	9. 45. 12,3	*Idem.*	270. 14. 44,7	21. 5. 57,9	299. 50. 8,0	0. 31. 55	8. 44	
27	9. 41. 20,5	*Idem.*	270. 14. 44,7	21. 5. 57,9	299. 46. 57,0	0. 32. 7	8. 41	
28	9. 37. 29,2	*Idem.*	270. 14. 44,7	21. 5. 57,9	299. 44. 4,0	0. 32. 11	8. 31	
30	9. 25. 57,5	*Idem.*	270. 14. 44,7	21. 5. 57,9	299. 37. 56,0	0. 32. 25	8. 23	+
31	9. 25. 57,5	*Idem.*	270. 14. 44,2	21. 5. 57,9	299. 35. 18,0	0. 32. 34	8. 3	+
ɑ. 26	6. 0. 7,9	β Lièvre.	79. 46. 36,7	20. 56. 46,1 A.	299. 14. 34,0	0. 33. 31	7. 54	—
27	5. 56. 27,7	*Idem.*	79. 46. 36,7	20. 56. 46,1	299. 16. 57,0	0. 33. 37	7. 55	
30	5. 45. 22,8	*Idem.*	79. 46. 36,7	20. 56. 46,1	299. 24. 55,0	0. 33. 39	7. 40	
ov. 15	4. 45. 9,8	δ Lièvre.	85. 31. 49,7	20. 54. 15,6	300. 19. 40,0	0. 34. 24	7. 52	
16	4. 41. 18,0	*Idem.*	85. 31. 49,7	20. 54. 15,6	300. 23. 35,0	0. 34. 7	8. 7	

Les observations du mois de Juillet, donnent encore le résultat suivant :

Opposition de Saturne, le 24 Juillet à. . $5^h\ 53'\ 32''$ *temps vrai.*

Longitude en opposition. . . . . $10^s\ 2^d$ 4. 23.

Latitude en opposition. . . . . 0. 29. 50 *australe.*

HERSCHEL.

Cette Planète, connue depuis peu, dont la révolution d'environ quatre-vingt-trois ans, n'a parcouru dans le courant de cette année, qu'un arc de $4^d\ 30'\frac{1}{2}$ autour du Soleil : elle s'est trouvée en opposition le 3 Janvier.

On a déterminé, par observation, onze lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables construites sur les élémens déterminés par M. de la Place, ont donné les résultats suivans:

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Position supposée de l'ÉTOILE.		Lieu observé de HERSCHEL.		Erreur des T[illegible]	
			Ascens. droite.	Déclinaison.	Longitude.	Latitude.	En long.	En lat.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Janv. 11	11. 25. 1,0	δ Gémeaux	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0B.	104. 2. 48,0	0. 25. 38B.	—0. 44	+[illegible]
12	11. 20. 31,2	*Idem.*	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	104. 0. 10,0	0. 25. 36	0. 47	[illegible]
16	11. 2. 41,5	*Idem.*	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	103. 50. 18,0	0. 25. 39	0. 31	[illegible]
17	10. 58. 16,7	*Idem.*	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	103. 47. 55,0	0. 25. 40	0. 24	[illegible]
21	10. 40. 43,6	*Idem.*	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	103. 38. 4,0	0. 25. 45	0. 23	[illegible]
22	10. 36. 19,3	*Idem.*	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	103. 35. 24.0	0. 25. 36	0. 37	[illegible]
Déc. 5	14. 35. 37,0	*Idem.*	106. 50. 21,1	22. 21. 31,0	110. 18. 1,0	0. 28. 18	0. 26	[illegible]
7	14. 26. 35,6	*Idem.*	106. 50. 21,1	22. 21. 31,0	110. 14. 5,0	0. 28. 18	0. 12	[illegible]
9	14. 17. 36,6	α du Belier.	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	110. 9. 39,0	0. 28. 38	0. 32	[illegible]
11	14. 8. 25,9	δ Gémeaux	106. 50. 21,1	22. 21. 31,0	110. 5. 22,0	0. 28. 12	0. 44	[illegible]
13	13. 59. 18,6	α du Bélier.	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	110. 1. 9,0	0. 28. 34	0. 28	[illegible]

Les observations du mois de Janvier, donnent encore le résultat suivant :

Opposition d'Herschel, le 3 Janvier, à $17^h\ 39'\ 47'',3$ ***temps vrai.***

Longitude en opposition.......... $3^s\ 14^d$ **22. 39,0.**

Latitude en opposition.......... **0. 25. 34,0** ***boréale.***

On a supposé l'erreur moyenne des Tables, de 34 secondes soustractives en longitude, & de 4 secondes additives en latitude.

LA LUNE.

On a déterminé, par obſervation, dix-huit lieux de la Lune : on en eût ſans doute obtenu un plus grand nombre, ſi les erreurs, dans les déclinaiſons calculées, n'avoient ſouvent fait manquer les hauteurs méridiennes, & rendu par-là les obſervations incomplètes.

785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Poſition ſuppoſée de l'ÉTOILE.		Lieu obſervé de la LUNE.		Erreur des Tables.	
			Aſcenſ. droite.	Déclinaiſon.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
nv. 22	10. 2. 48,4	β Taureau.	78. 11. 4,5	28. 24. 43,0B.	95. 55. 52,0	3. 44. 55A.	—1. 3	+0. 30
vr. 23	11. 51. 23,0	β pet. Chien	108. 52. 53,0	8. 42. 36,0B.	154. 0. 56,0	1. 10. 17B.	—0. 49	—0. 5
27	14. 32. 23,0	λ Vierge.	211. 53. 5,0	12. 22. 34,0A.	202. 49. 44,0	4. 38. 19A.	—0. 30	+0. 1
ai 23	11. 46. 20,5	*Antarès.*	244. 4. 29,6	25. 56. 23,0A.	241. 9. 16,0	4. 49. 20A.	—1. 5	—0. 13
26	14. 40. 7,2	π Scorpion.	236. 29. 14,2	25. 28. 59,7A.	282. 34. 20,0	2. 40. 1,5A.	+0. 5	—0. 5
27	15. 36. 29,6	ν Scorpion.	222. 53. 52,8	24. 25. 44,8A.	296. 45. 40,0	1. 31. 48A.	+0. 29	+0. 3
iin 13	5. 14. 1,8	ε Serpent.	235. 2, 23,0	5. 7. 57,0B.	160. 27. 17,0	2. 21, 15A.	—0. 53	—0. 1
18	8. 51. 20,6	μ Sagittaire.	270. 14. 43,1	21. 5. 59,0A.	222. 23. 14,0	5. 8. 10,5A	—0. 40	—0. 24
iill. 18	9. 3. 49,7	τ Sagittaire.	283. 23. 44,6	27. 57. 52,0A.	256. 25. 32,0	4. 21. 21A.	—0. 49	—0. 24
oût 20	17. 34. 28,0	β Verſeau.	320. 4. 39,1	6. 30. 7,4A.	337. 57. 16,0	2. 18. 0B.	—0. 13	—0. 14
23	15. 10. 46,1	ζ de l'Aigle.	283. 53. 52,0	13. 33. 41,9B.	24. 24. 24,0	5. 0. 46B.	—0. 25	+0. 0
26	17. 59. 25,0	β Cygne.	290. 31. 34,7	27. 31. 24,0B.	88. 17. 14,0	4. 43. 0B.	—0. 37	—0. 16
ept. 19	13. 5. 58,0	ε Dauphin.	305. 44. 56,2	10. 35. 26,2B.	16. 59. 53,0	4. 41. 4B.	—1. 0	—0. 13
lov. 15	11. 25. 46,7	α du Bélier.	28. 47. 40,6	22. 26. 53,2B.	47. 22. 19,0	4. 55. 54B.	+0. 20	+0. 33
17	13. 32. 3,5	β Pégaſe.	343. 21. 17,8	26. 55. 40,3B.	77. 57. 55,0	3. 42. 44B.	—0. 31	+0. 0
éc. 9	6. 27. 23,5	α lien ♓.	27. 45. 18,0	1. 43. 37,0B.	355. 29. 0,0	4. 2. 35B.	—0. 23	—0. 14
12	9. 0. 56,7	ν du Bélier.	25. 27. 28,3	18. 14. 42,4B.	40. 13. 33,0	5. 6. 52B.	—0. 19	+0. 5
13	9. 58. 57,7	Alcyone.	53. 42. 26,0	23. 26. 0,0B.	55. 21. 10,0	4. 46. 56B.	—0. 10	—0. 9

On a calculé les mêmes lieux de la Lune avec les nouvelles Tables d'Euler, publiées par M. Jeaurat, & on l'a trouvé

MOIS & JOURS.		TABLES D'EULER. Erreur. En longit.	En latitude.
		M. S.	M. S.
Janvier	22	+ 0. 52	— 0. 10.
Février	23	+ 0. 27	+ 0. 22.
	27	— 0. 40	+ 0. 13.
Mai	23	+ 1. 4	— 0. 17.
	26	+ 0. 9	— 0. 6.
	27	— 0. 35	— 0. 14.
Juin	13	— 1. 19	+ 0. 7.
	18	— 0. 41	— 0. 22.
Juillet	18	— 0. 40	— 0. 8.
Août	20	— 0. 9	+ 0. 18.
	23	+ 0. 20	+ 0. 5.
	26	— 0. 16	— 0. 14.
Sept.	19	+ 0. 20	+ 0. 15.
Nov.	15	+ 1. 17	+ 0. 28.
	17	+ 0. 55	— 0. 19.
Déc.	9	+ 0. 37	— 0. 30.
	12	+ 0. 2	+ 0. 18.
	13	+ 0. 11	— 0. 9.

Occultations d'Étoiles par la Lune.

ÉTOILES éclipſées.		JOURS.	TEMPS VRAI. H. M. S.	
Pléïades	Tayeta	11 Avril	8. 55. 10,5	Immer
	Dix-huit.e	11 Avril	9. 3. 28,0	Immer
	Maïa	11 Avril	9. 7. 27,0	Immer
	Aſterope	11 Avril	9. 14. 16,7	Immer
θ d'Ophiucus		27 Avril	13. 2. 21,9	Immer
Idem.		27 Avril	13. 37. 19,2	Émer
φ du Sagittaire.		22 Juin	12. 7. 29,6	Immer
Idem.		22 Juin	13. 25. 27,2	Émer
* du Taureau.		26 Août	11. 54. 31,6	Émer
* du Sagittaire.		10 Oct.	7. 21. 21,6	Immer
* du Capricorne.		11 Oct.	9. 7. 50,7	Immer
ε des Gémeaux.		22 Oct.	11. 44. 53,8	Émer
* du Sagittaire.		5 Nov.	6. 10. 54,0	Immer
19e des Poiſſons.		9 Déc.	8. 27. 20,2	Immer
Pléïades	Celeno	13 Déc.	12. 12. 1,7	Immer
	Maïa	13 Déc.	12. 35. 13,5	Immer
	Idem.	13 Déc.	13. 43. 22,1	Émer
	Seizième	13 Déc.	12. 52. 43,1	Immer
	Dix-ſepte	13 Déc.	12. 53. 6,6	Immer
	Taïeta	13 Déc.	13. 23. 51,5	Émer
	Electra	13 Déc.	13. 3. 6,8	Émer

Éclipses des Satellites de Jupiter.

PREMIER SATELLITE.

MOIS & JOURS.		TEMPS VRAI. H. M. S.		CIRCONSTANCES.
Janv.	7	6. 58. 20,0	Émersion	près de l'horizon.
	23	5. 13. 18,5	Émersion	bandes assez term. un peu jour.
Août	7	14. 1. 34,9	Émersion	temps très-favorable.
	23	12. 20. 31,8	Immersion	à travers un nuage léger.
Sept.	1	8. 45. 18,6	Immersion	assez beau temps.
Oct.	1	11. 0. 53,7	Immersion	un peu de vapeurs.
	10	9. 37. 26,8	Émersion	temps superbe.
	26	7. 58. 44,6	Émersion	légères vapeurs.
Nov.	2	9. 53. 54,4	Émersion	assez beau temps.
	9	11. 49. 8,0	Émersion	beau ciel.
	11	6. 17. 48,7	Émersion	quelques vapeurs.
	16	13. 43. 44,0	Émersion	beaucoup de vapeurs.
Déc.	4	6. 27. 31,0	Émersion	un peu tard à cause des nuages

DEUXIÉME SATELLITE.

Août	23	15. 10. 38,5	Immersion	assez beau temps.
Oct.	12	12. 19. 5,9	Émersion	beau temps, mais grand vent.
Nov.	6	9. 32. 17,7	Émersion	temps favorable.
	13	12. 8. 57,0	Émersion	brouillard épais.
Déc.	1	6. 36. 3,0	Émersion	beaucoup de vapeurs.

TROISIÉME SATELLITE.

Août	11	10. 24. 33,0	Émersion	vapeurs de temps en temps.
Oct.	29	6. 47. 47,9	Émersion	légères vapeurs.
Nov.	5	8. 35. 24,8	Immersion	assez beau temps.
	5	10. 48. 18,4	Émersion	*idem.*

QUATRIÉME SATELLITE.

Août	23	13. 1. 18,0	Immersion	nuages légers.

Occultation de Vénus par la Lune.

Cette obſervation a été ſecondée par le temps le plus favorable.

	Temps vrai.	
12 Avril 1785	0h 1′ 39″,9	le bord obſcur de la Lune, mord ſur le bord éclairé de Vénus.
	0. 1. 59,9	immerſion de la corne auſtrale de Vénus.
	0. 3. 10,9	immerſion de la corne boréale.
	0. 50. 26,9	émerſion du bord éclairé de Vénus, de deſſous le bord éclairé de la Lune.
	0. 50. 48,0	émerſion de la corne boréale de Vénus.
	0. 52. 6,9	la corne auſtrale de Vénus eſt détachée du bord éclairé de la Lune.

Comètes.

Il a paru cette année deux Comètes, qui ont été découvertes à l'Obſervatoire royal, par M. Méchain, Aſtronome de la Marine, & de l'Académie Royale des Sciences, l'une le 7 Janvier, l'autre le 11 Mars: nous ne les avons point obſervées, tant parce que nous avons préféré de ſuivre, ſans interruption, le cours des autres Planètes, que parce que la poſition défavorable de ces Comètes auroit néceſſité de tranſporter nos inſtrumens d'un bout à l'autre de l'Obſervatoire.

Voici les élémens de leurs orbites, tels que M. Méchain les a calculés.

	Première Comète.	*Seconde Comète.*
Lieu du nœud aſcendant.......	8f 24d 12′ 5″	2f 4d 44′ 2/3
Inclinaiſon de l'orbite.........	70. 14. 12	87. 7.
Lieu du périhélie............	3. 19. 51. 56	9. 27. 34,5.
Paſſage au périhélie, temps moyen.	27 Janv. 7h 58 4	8 Avril 11h 29′
Logarithme de la diſtance périhélie.	0,0581975	9,631024.
Sens du mouvement.......	direct.	

La première de ces Comètes a été obſervée depuis le 7 Janvier juſqu'au 7 Février; elle n'a jamais été aperçue à la vue ſimple. La ſeconde n'étoit viſible qu'avec le ſecours des lunettes, dans le commencement de ſon apparition, & n'avoit qu'une chevelure; mais le 31 Mars elle a paru avec une queue de 7 à 8 degrés, qui a augmenté juſqu'au 16 Avril, dernier jour où il fut poſſible de l'obſerver à Paris.

TABLE de la déclinaiſon de pluſieurs Étoiles, déduite de leur hauteur méridienne, obſervée au quart-de-cercle mobile, en 1785.

MOIS & JOURS.	ÉTOILES.	NOMBRE d'Obſervations.	HAUTEUR OBSERVÉE.			DÉCLINAISON MOYENNE le 1er Janvier 1786.		
			D.	*M.*	*S.*	*D.*	*M.*	*S.*
Mars 7	α d'Orion	2	48.	31.	43,2	7.	21.	4 B.
Déc. 10	*Idem.*	2	48.	31.	49,4			
Oct. 13	α Perſée	2	90.	14.	54,5	49.	5.	0 B.
Nov. 17	*Idem.*	4	90.	14.	49,7			
Avril 23	α Vierge	4	31.	9.	13,8	10.	2.	11 A.
Août 20	α Flèche	4	58.	42.	21,9	17.	31.	58 B.
Sept. 14	*Idem.*	2	58.	42.	27,8			
Avril 28	α Couronne	3	68.	37.	1,5	27.	26.	43 B.
Mai 19	α Balance	3	26.	3.	15,5	15.	8.	23 A.
Oct. 25	α Baleine	4	44.	25.	22,8	3.	14.	24 B.
Oct. 27	α Lien	4	42.	54.	31,2	1.	43.	30 B.
Nov. 8	*Idem.*	2	42.	54.	30,0			
Déc. 10	*Idem.*	2	42.	54.	30,5			
Oct. 23	α Bélier	9	63.	36.	55,9	22.	26.	32 B.
Nov. 12	*Idem.*	7	63.	36.	59,5			
Déc. 11	*Idem.*	4	63.	36.	62,1			

années d'obſervations des hauteurs du Soleil dans le Solſtice. Le réſultat que nous avons trouvé, n'étant pas le même que celui qu'ont établi pluſieurs Aſtronomes, nous avons penſé qu'il ſeroit intéreſſant de rapporter ici les hauteurs méridiennes des principales Étoiles, telles que notre inſtrument nous les a données, ainſi que la déclinaiſon moyenne qui en réſulte, afin d'établir par-là une comparaiſon directe entre notre inſtrument & ceux des autres Obſervatoires.

Nota. La troiſième colonne renferme le nombre des obſervations entre leſquelles on a pris un milieu, pour réduire au jour moyen entre ceux où l'on a obſervé, la hauteur rapportée dans la quatrième colonne; cette hauteur n'eſt corrigée que de l'erreur de la diviſion & de la lunette de l'inſtrument : pour en déduire la déclinaiſon moyenne, compriſe dans la cinquième colonne, on a employé les Tables des réfractions rapportées dans l'Aſtronomie de M. de la Lande, les Tables d'aberration & de nutation de la Connoiſſance des Temps, *année 1781*, & l'on a ſuppoſé la hauteur de l'Équateur de 41ᵈ 9′ 46″.





